제 9 장 포트폴리오 이론과 자본자산 가격결정모형

Contents

제 1 절 증권투자의 수익률과 위험

I. 미래가치와 현재가치

- 미래가치와 현재가치의 계산
  - 미래가치 : $P_n = P_0(1+r)^n$
  - 현재가치 : $PV = \dfrac{P_n}{(1+r)^n}$

II. 투자수익률과 위험 1. 투자수익률

- 투자수익률 : 투자기간 중 발생한 모든 현금유입, 즉 투자수익을 투자한 시점에서 투자자산의 가치로 나눈 비율로 보유기간 수익률(holding period return)과 같은 개념으로 사후적 수익률

$$\text{투자수익률} = \frac{\text{기말의 투자가치} - \text{기초의 투자가치}}{\text{기초의 투자가치}}$$

제 1 절 증권투자의 수익률과 위험

II. 투자수익률과 위험   1. 투자수익률

- 기대수익률
  - 기대수익률 : 투자한 시점(기초시점)에서 보면 회수되는 시점(기말시점)의 투자가치는 불확실
  - 기대수익률은 미래의 발생을 확실히 알 수 없으므로 미래투자수익률의 확률분포를 이용해야 하는 사전적 수익률

$$E(R_j) = \sum_{i=1}^{n} R_i \cdot p_i$$

$E(R_j)$: 개별자산 j의 기대수익률

R_i : i상황에서의 수익률

p_i : i상황이 발생할 확률

n : 기말의 상태수

제 1 절 증권투자의 수익률과 위험

II. 투자수익률과 위험   2. 위험

- 투자의 기대수익률의 불확실성
  - 위험이란 미래의 수익률이 기대수익률에 미달하거나 투자손실로 나타날 수 있는 가능성 내지 그러한 수익률의 변동성이 어느 정도 편차를 갖느냐를 나타내는 분산이나 표준편차가 이용됨.

$$\sigma^2 = [R_1 - E(R)]^2 \cdot p_1 + [R_2 - E(R)]^2 \cdot p_2 + \cdots + [R_i - E(R)]^2 \cdot p_i$$

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} [R_i - E(R)]^2 \cdot p_i$$

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} [R_i - E(R)]^2 \cdot p_i} \qquad (9\text{-}4)$$

제 1 절 증권투자의 수익률과 위험

III. 개별자산의 기대수익률과 위험

1. 개별자산의 기대수익률

날씨상태	확 률	맥주회사 (r_1)	소주회사 (r_2)
따뜻한 날씨	0.2	50%	−20%
보 통	0.7	10	20
추운 날씨	0.1	−40	60

$$E(r_1) = 0.2 \times 50 + 0.7 \times 10 + 0.1 \times (-40) = 13\%$$

$$E(r_2) = 0.2 \times (-20) + 0.7 \times 20 + 0.1 \times 60 = 16\%$$

제 1 절 증권투자의 수익률과 위험

III. 개별자산의 기대수익률과 위험

2. 개별자산의 위험

날씨상태	확 률	맥주회사 (r_1)	소주회사 (r_2)
따뜻한 날씨	0.2	50%	−20%
보 통	0.7	10	20
추운 날씨	0.1	−40	60

$$\sigma_1^2 = 0.2\times(37)^2 + 0.7\times(-3)^2 + 0.1\times(-53)^2 = 561\%^2$$

$$\sigma_2^2 = 0.2\times(-36)^2 + 0.7\times(4)^2 + 0.1\times(44)^2 = 464\%^2$$

$$\sigma_1 = \sqrt{561} = 23.69\% \qquad \sigma_2 = \sqrt{464} = 21.54\%$$

제 1 절 증권투자의 수익률과 위험

III. 개별자산의 기대수익률과 위험

3. 투자수익률과 위험과의 관계

- **위험-수익 상충관계와 지배원리**
  - 효율적 증권이란 지배원리에 따라 선택된 증권
  - 투자자의 의사결정 기준으로 기대수익률과 분산 두 변수만을 고려하는 것은 기대수익률의 확률분포가 정규분포임을 전제 (narration 9-1)
  - 기대수익률이 정규분포를 따르는 경우 기대수익률이 15%이고 표준편차가 20%이면, 기대수익률은 68.27%의 신뢰수준에서 -5%~35%(15%+-20%)가 됨.

평균 ± 1 · 표준편차 = 68.27(%)

평균 ± 2 · 표준편차 = 95.54(%)

평균 ± 3 · 표준편차 = 99.97(%)

제 1 절 증권투자의 수익률과 위험

IV. 포트폴리오 기대수익률과 위험의 측정

1. 포트폴리오의 기대수익률

- **분산투자와 위험회피**
  - 포트폴리오의 기대수익률은 개별주식의 기대수익률을 각각의 투자 비율에 따라 가중평균한 값

$$E(R_p) = \sum_{i=1}^{n} w_i E(R_i)$$

$$\text{단, } \sum_{i=1}^{n} w_i = 1$$

  - 두자산 포트폴리오의 경우의 기대수익률은 포트폴리오를 구성하고 있는 개별주식의 기대수익률 E(ri)와 구성비율 wi가 주어지면 포트폴리오의 기대수익률은 기댓값의 연산법칙을 이용하여 구함

$$E(r_P) = E(w_1 r_1 + w_2 r_2) = w_1 \cdot E(r_1) + w_2 \cdot E(r_2)$$

$$w_1 + w_2 = 1$$

제 1 절 증권투자의 수익률과 위험

IV. 포트폴리오 기대수익률과 위험의 측정

1. 포트폴리오의 기대수익률

예 1

- 위의 맥주회사와 소주회사의 예에서 투자자가 각 주식에 투자금액의 절반씩 균등 투자하는 경우 (w1=0.5, w2=0.5) 포트폴리오의 기대수익률은 얼마인가?

(풀이)

$$E(r_P) = (0.5)(13) + (0.5)(16) = 14.5(\%)$$

제 1 절 증권투자의 수익률과 위험

Ⅳ. 포트폴리오 기대수익률과 위험의 측정

2. 포트폴리오의 위험

- 포트폴리오의 위험
  - 포트폴리오를 구성하고 있는 개별주식의 분산과 구성비율 w_i가 주어지면 포트폴리오의 분산은 분산의 연산법칙을 이용하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\sigma_P^2 = Var(r_p) = Var(w_1 r_1 + w_2 r_2) = w_1^2 \cdot \sigma_1^2 + w_2^2 \cdot \sigma_2^2 + 2 w_1 w_2 \sigma_{12}$$

$$\sigma_1^2 = E[r_1 - E(r_1)]^2$$

$$\sigma_2^2 = E[r_2 - E(r_2)]^2$$

$\sigma_{12} = E[\{r_1 - E(r_1)\}\{r_2 - E(r_2)\}]$: 공분산(covariance)

(narration 9-2)

제 1 절 증권투자의 수익률과 위험

Ⅳ. 포트폴리오 기대수익률과 위험의 측정

2. 포트폴리오의 위험

- 상관계수 (ρ) : correlation coefficient
  - 공분산을 표준화한 값
  - 공분산을 각 투자안의 표준편차로 나누어 두 투자안의 수익률의 상관관계를 보다 분명하게 측정할 수 있도록 나타낸 것

$$\rho_{12} = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1 \sigma_2}$$

  - ($-1 \le \rho \le 1$)
  - 상관계수가 +1의 값을 갖는 경우 두 투자안의 수익률은 양(+)의 기울기를 갖는 완전한 직선관계이고 −1인 경우에는 음(−)의 기울기를 갖는 완전한 직선관계이다.

제 1 절 증권투자의 수익률과 위험

Ⅳ. 포트폴리오 기대수익률과 위험의 측정

2. 포트폴리오의 위험

- 상관계수 (ρ) : correlation coefficient
  - 상관계수의 정의에 따라 공분산, 표준편차, 상관계수 사이에는 다음의 관계가 성립한다.

$$\sigma_{12} = \rho_{12} \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2$$

$$\sigma_P^2 = w_1^2 \cdot \sigma_1^2 + w_2^2 \cdot \sigma_2^2 + 2 w_1 w_2 \rho_{12} \sigma_1 \sigma_2$$

제 1 절 증권투자의 수익률과 위험

IV. 포트폴리오 기대수익률과 위험의 측정

2. 포트폴리오의 위험

- 상관계수 (ρ) : correlation coefficient
  - [표 5-1]에서 예로 든 맥주회사 주식과 소주회사 주식의 수익률 간의 공분산과 상관계수는 다음과 같이 계산된다.

$$\sigma_{12} = E[\{r_1 - E(r_1)\}\{r_2 - E(r_2)\}]$$

$$= 0.2\times(17)(-36) + 0.7\times(-3)(4) + 0.1\times(-53)(44) = -508(\%^2)$$

$$\rho_{12} = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1\sigma_2} = \frac{-508}{(23.69)(21.54)} = -0.996$$

제 1 절 증권투자의 수익률과 위험

Ⅳ. 포트폴리오 기대수익률과 위험의 측정

2. 포트폴리오의 위험

- 포트폴리오의 분산과 표준편차

예 2

(예 1)에서 구성한 포트폴리오의 분산과 표준편차를 구하라.

(풀이)

$$\sigma_P^2 = (0.5)^2(561) + (0.5)^2(464) + 2(0.5)(0.5)(-508) = 2.25\%^2$$

$$\sigma_P = \sqrt{2.25} = 1.5\%$$

제 1 절 증권투자의 수익률과 위험

Ⅳ. 포트폴리오 기대수익률과 위험의 측정

2. 포트폴리오의 위험

- 포트폴리오의 분산 계산

$$w_1 \cdot \sigma_{1P} = w_1 w_1 \sigma_{11} + w_1 w_2 \sigma_{12}$$: 자산 1의 기여도

$$= w_1 (w_1 \sigma_{11} + w_2 \sigma_{12})$$

$$\sigma_P^2 = w_1^2 \cdot \sigma_1^2 + w_2^2 \cdot \sigma_2^2 + 2 w_1 w_2 \rho_{12} \sigma_1 \sigma_2$$

$$= w_1 \cdot \sigma_{1P} + w_2 \cdot \sigma_{2P}$$

☞ 포트폴리오 위험은 개별자산이 포트폴리오의 위험에 기여하는 부분의 합으로 표시할 수 있다.

제 1 절 증권투자의 수익률과 위험

Ⅳ. 포트폴리오 기대수익률과 위험의 측정

2. 포트폴리오의 위험

포트폴리오의 분산계산

	투자안 (1)w_1	투자안 (2)w_2
투자안 (1)w_1	$w_1w_1\sigma_{11}$ $= w_1^2\sigma_1^2$ $(0.5)^2(561)$	$w_1w_2\sigma_{12}$ $= w_1w_2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2$ $(0.5)(0.5)(-508)$
투자안 (1)w_1	$w_1w_1\sigma_{12}$ $= w_1w_2\sigma_{12}\sigma_1\sigma_2$ $(0.5)(0.5)(-508)$	$w_2w_2\sigma_{22}$ $= w_2^2\sigma_2^2$ $(0.5)^2(464)$

$$\sigma_p^2 = (0.5)^2(561) + (0.5)^2(464) + 2(0.5)(0.5)(-508) = 2.25$$

제 1 절 증권투자의 수익률과 위험

Ⅳ. 포트폴리오 기대수익률과 위험의 측정

3. 포트폴리오의 위험분산 효과

- 자산 A, B, C에 대한 수익률의 확률분포가 다음과 같다고 하자.

[표 5-3] 자산 A,B,C의 수익률의 확률분포

미래상태	확 률	자산수익률 (%)		
		r_A	r_B	r_C
1	0.5	10	20	0
2	0.5	10	0	20

제 1 절 증권투자의 수익률과 위험

IV. 포트폴리오 기대수익률과 위험의 측정

3. 포트폴리오의 위험분산 효과

- 자산 A는 확실한 10%의 수익률을 보장하는 무위험자산이고 자산 B와 C는 미래상태에 따라 수익률이 달라지는 위험자산이며 B와 C는 반대방향으로 움직이므로 수익률의 상관계수는 -1이다.

- 기대수익률은 모두 10%이나 위험(표준편차)은 A가 0, B와 C는 10%이므로 평균-분산모형에 의해 위험회피형 투자자라면 아무도 B와 C를 선호하지 않는다.

- 자산 B와 C에 절반씩 투자하여 구성한 포트폴리오의 수익률은 10%이고 표준편차는 0이 되어 자산 A에 지배되지 않는다.

제 1 절 증권투자의 수익률과 위험

IV. 포트폴리오 기대수익률과 위험의 측정

3. 포트폴리오의 위험분산 효과

- 자산 B와 C를 절반씩 투자하여 구성한 포트폴리오의 기대수익률과 분산은 다음과 같다.

$$E(r_P) = w_B E(r_B) + w_C E(r_C)$$
$$= (0.5)(10) + (0.5)(10) = 10$$

$$\sigma_P^2 = w_B^2 \sigma_B^2 + w_C^2 \sigma_C^2 + 2 w_B w_C \rho_{BC} \sigma_B \sigma_C$$
$$\sigma_P^2 = (0.5)^2 (10)^2 + (0.5)^2 (10)^2 + 2(0.5)(0.5)(-1)(10)(10)$$
$$= 0$$

제 1 절 증권투자의 수익률과 위험

Ⅳ. 포트폴리오 기대수익률과 위험의 측정

3. 포트폴리오의 위험분산 효과

- 자산을 결합하여 포트폴리오를 구성함으로써 위험이 줄어들어 기대효용이 증가하는 현상을 분산효과(diversification effect) 또는 포트폴리오 효과(portfolio effect)라고 한다.

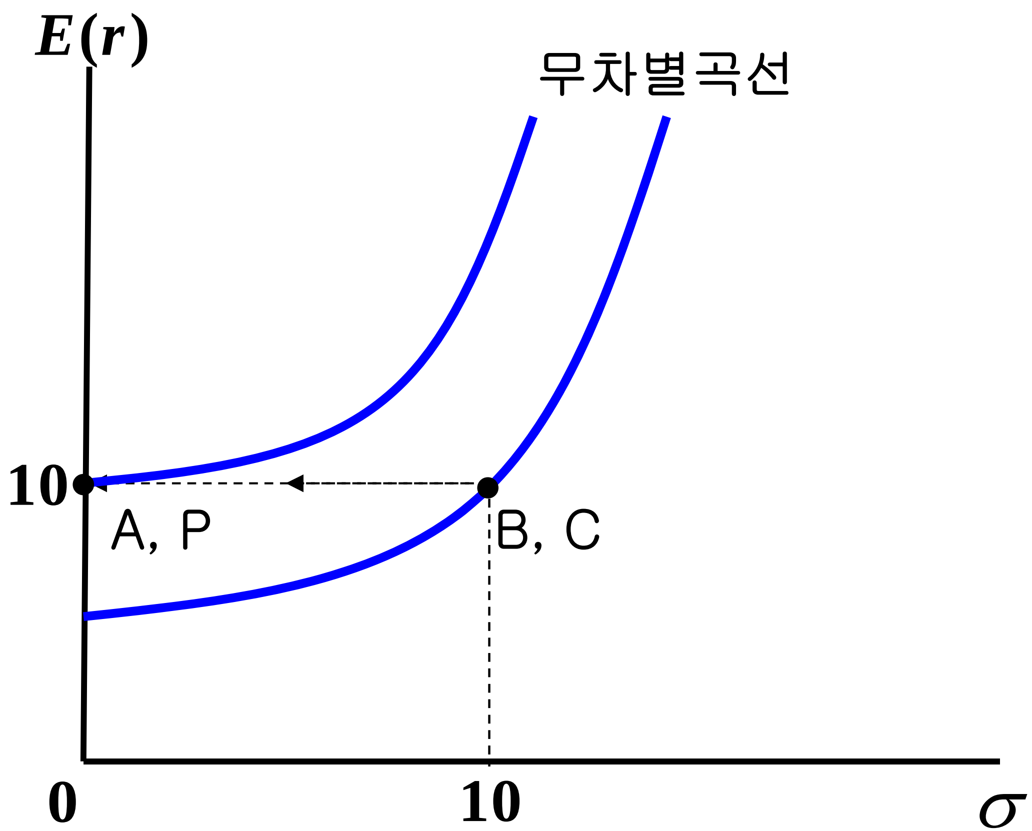
- 포트폴리오 효과는 자산간의 상관계수가 -1에 가까울수록 크게 일어나고 상관계수가 +1인 경우를 제외하면 정도의 차이는 있지만 반드시 일어난다.

제 1 절 증권투자의 수익률과 위험

Ⅳ. 포트폴리오 기대수익률과 위험의 측정

3. 포트폴리오의 위험분산 효과

[그림 10-3]
포트폴리오
분산효과의 예
(narration 9-3)



제 1 절 증권투자의 수익률과 위험

Ⅳ. 포트폴리오 기대수익률과 위험의 측정

3. 포트폴리오의 위험분산 효과

예 5

- 기대수익률과 표준편차가 다음과 같은 주식 D와 E에 각기 60%와 40%를 투자하는 포트폴리오를 구성하려 한다. 주식 D와 E의 상관계수(ρ)가 +1, 0, −1일 각각의 경우 포트폴리오의 기대수익률과 표준편차를 구하라.

	주식 D	주식 E
기대수익률	30%	10%
표 준 편 차	30%	10%

제 1 절 증권투자의 수익률과 위험

Ⅳ. 포트폴리오 기대수익률과 위험의 측정

3. 포트폴리오의 위험분산 효과

- ρ=+1일 경우

$$E(r_P) = (0.6)(30) + (0.4)(10) = 22\%$$
$$\sigma_P = \sqrt{(0.6)^2(30)^2 + (0.4)^2(10)^2 + 2(0.6)(0.4)(1)(30)(10)} = 22\%$$

- ρ=0일 경우

$$E(r_P) = (0.6)(30) + (0.4)(10) = 22\%$$
$$\sigma_P = \sqrt{(0.6)^2(30)^2 + (0.4)^2(10)^2 + 2(0.6)(0.4)(0)(30)(10)} = 18.4\%$$

- ρ=−1일 경우

$$E(r_P) = (0.6)(30) + (0.4)(10) = 22\%$$
$$\sigma_P = \sqrt{(0.6)^2(30)^2 + (0.4)^2(10)^2 + 2(0.6)(0.4)(-1)(30)(10)} = 14\%$$

제 1 절 증권투자의 수익률과 위험

Ⅳ. 포트폴리오 기대수익률과 위험의 측정

3. 포트폴리오의 위험분산 효과

- 포트폴리오결합선 (portfolio combination line)
  - 자산의 구성비율 변화에 따른 기대수익률과 위험의 조합의 집합을 나타내는 선들.
  - 상관계수가 +1일 때 포트폴리오 결합선은 직선이 된다.
  - 구성비율이 일정한 여러 포트폴리오들의 기대수익률은 같으며 위험은 두 자산의 상관계수가 1일 때 가장 크고 -1에 가까울수록 작아진다.
  - 두 자산의 상관계수가 -1일 때 특정 구성비율에 따라 포트폴리오를 구성하면 위험을 완전히 제거할 수 있다.

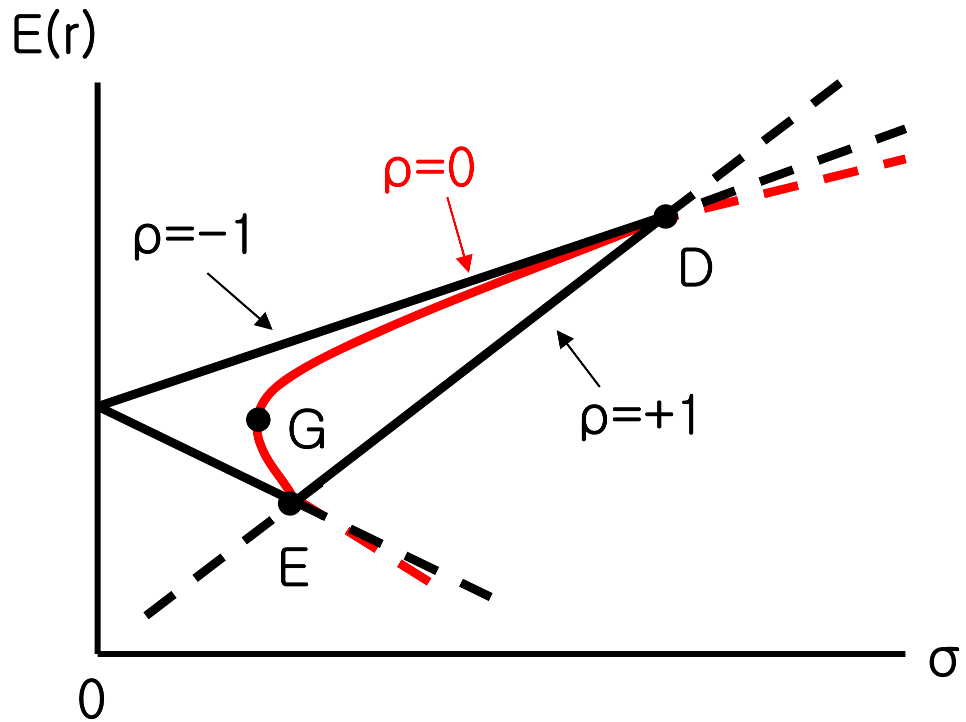
제 1 절 증권투자의 수익률과 위험

Ⅳ. 포트폴리오 기대수익률과 위험의 측정

3. 포트폴리오의 위험분산 효과

- 포트폴리오결합선 (portfolio combination line)

[그림 10-4]
[표 10-4]의 도시



제 1 절 증권투자의 수익률과 위험

IV. 포트폴리오 기대수익률과 위험의 측정

3. 포트폴리오의 위험분산 효과

- 포트폴리오결합선 (portfolio combination line)
  - 주어진 포트폴리오 결합선상의 모든 포트폴리오 중에서 위험이 가장 작은 포트폴리오를 최소분산 포트폴리오(G)라고 한다.

$$w_D^G = \frac{\sigma_E^2 - \sigma_{DE}}{\sigma_D^2 + \sigma_E^2 - 2\sigma_{DE}} \qquad \text{(식 5.13)}$$

$$w_E^G = 1 - w_D^G = \frac{\sigma_D^2 - \sigma_{DE}}{\sigma_D^2 + \sigma_E^2 - 2\sigma_{DE}} \qquad \text{(식 5.14)}$$

w_D^G : 최소분산 포트폴리오에서 주식 D가 차지하는 비율

제 1 절 증권투자의 수익률과 위험

Ⅳ. 포트폴리오 기대수익률과 위험의 측정

3. 포트폴리오의 위험분산 효과

예 6

- 앞서 살펴본 주식 D와 주식 E에 대한 투자에서 ρ_{DE}=0인 경우의 최소분산포트폴리오를 구하라.

(풀이) ρ_{DE}=0 이므로 σ_{DE}역시 0이므로,

$$w_D^G = \frac{(10)^2}{(30)^2 + (10)^2} = 0.1$$

ρ_{DE}=0인 경우 주식 D에 10%, 주식 E에 90%를 투자하면 최소분산 포트폴리오를 구성할 수 있다.

$$E(r_P) = 0.1 \times 30 + 0.9 \times 10 = 12\%$$

$$\sigma_P^2 = (0.1)^2 \times 30^2 + (0.9)^2 \times (10)^2 + 2 \times 0.1 \times 0.3 \times 0 = 90\%^2$$

$$\sigma_P = \sqrt{90} = 9.49\%$$

제 1 절 증권투자의 수익률과 위험

IV. 포트폴리오 기대수익률과 위험의 측정

3. 포트폴리오의 위험분산 효과

- 포트폴리오의 분산 계산
- 포트폴리오를 구성하는 N개의 증권에 대한 투자비율이 모두 1/N인 포트폴리오의 분산은 다음과 같음.

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} w_i w_j \sigma_{ij} = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} w_i w_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} \quad \longrightarrow \quad \sigma_p^2 = \frac{1}{N}\left(\overline{\sigma}_i^2 - \overline{\sigma}_{ij}\right) + \overline{\sigma}_{ij}$$

- 이 식에서 N이 커질수록 우변 첫항은 0으로 수렴하고 포트폴리오의 전체 위험은 주식수익률간의 공분산의 평균으로 수렴.
- 위 식의 첫째 항은 제거할 수 있는 위험으로서 체계적 위험 (unsystematic risk)이라고 함.
- 위 식의 둘째 항은 제거할 수 없는 위험으로서, 체계적 위험 (systematic risk)이라 함.

제 1 절 증권투자의 수익률과 위험

IV. 포트폴리오 기대수익률과 위험의 측정

3. 포트폴리오의 위험분산 효과

- 비체계적 위험 (unsystematic risk)
  - 포트폴리오의 위험 중 분산투자로서 제거할 수 있는 위험으로 분산 가능한 위험이라고도 한다. 앞 식 에서 $\frac{1}{n}\left(\overline{\sigma_i^2}-\overline{\sigma_{ij}}\right)$
  - 파업, 법적 문제, 판매 부진 등 개별주식을 발행한 기업의 특수한 상황과 관련이 있는 기업 고유의 위험.

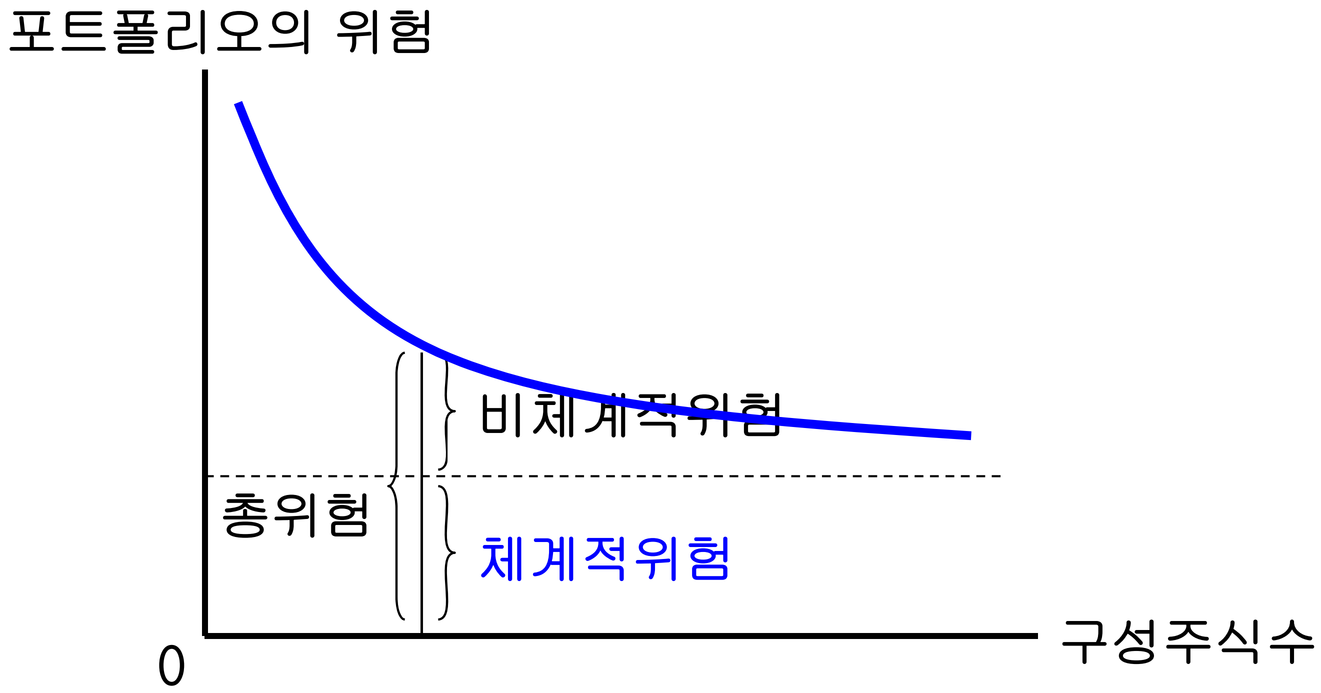
- 체계적 위험 (systematic risk)
  - 포트폴리오의 위험 중 분산투자로서 감소시킬 수 없는 위험으로 분산 불가능한 위험이라고도 한다. (식 5.17)에서 $\overline{\sigma_{ij}}$
  - 시장의 전반적인 상황과 관련이 있는 것으로 시장위험이라고도 한다. (예 : 인플레이션, 이자율 변화 등)

제 1 절 증권투자의 수익률과 위험

IV. 포트폴리오 기대수익률과 위험의 측정

3. 포트폴리오의 위험분산 효과

[그림 5-5] 체계적 위험과 비체계적 위험



제 1 절 증권투자의 수익률과 위험

Ⅳ. 포트폴리오 기대수익률과 위험의 측정

3. 포트폴리오의 위험분산 효과

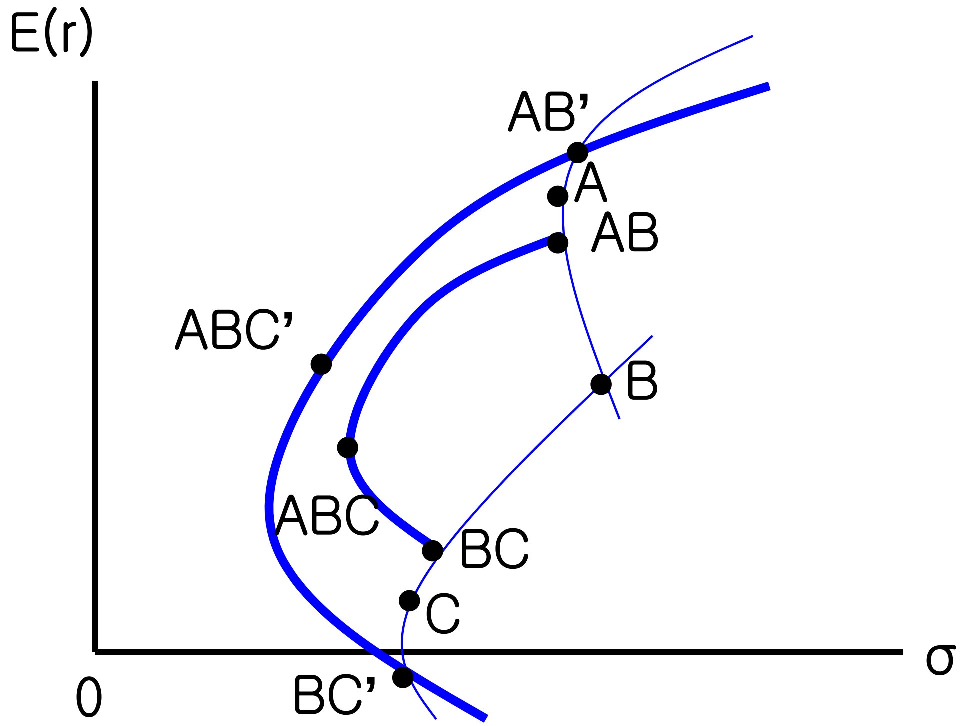
- 모든 투자자의 투자기간은 1기간이다.
- 투자자는 위험회피적이고 기대효용을 극대화하려 한다.
- 투자자의 투자결정은 투자대상의 기대수익률과 표준편차에 의존하며, 평균-분산 모형(지배원리)에 따라 투자대상을 선택한다.
- 자본시장에 마찰요인이 없어 거래비용과 세금이 없으며 모든 투자자가 같은 무위험이자율로 대출과 차입을 할 수 있다.

제 1 절 평균-분산 포트폴리오이론

Ⅳ. 포트폴리오 기대수익률과 위험의 측정

4. 최적 포트폴리오의 선택

[그림 5-6] 세 자산으로 구성된 포트폴리오의 집합

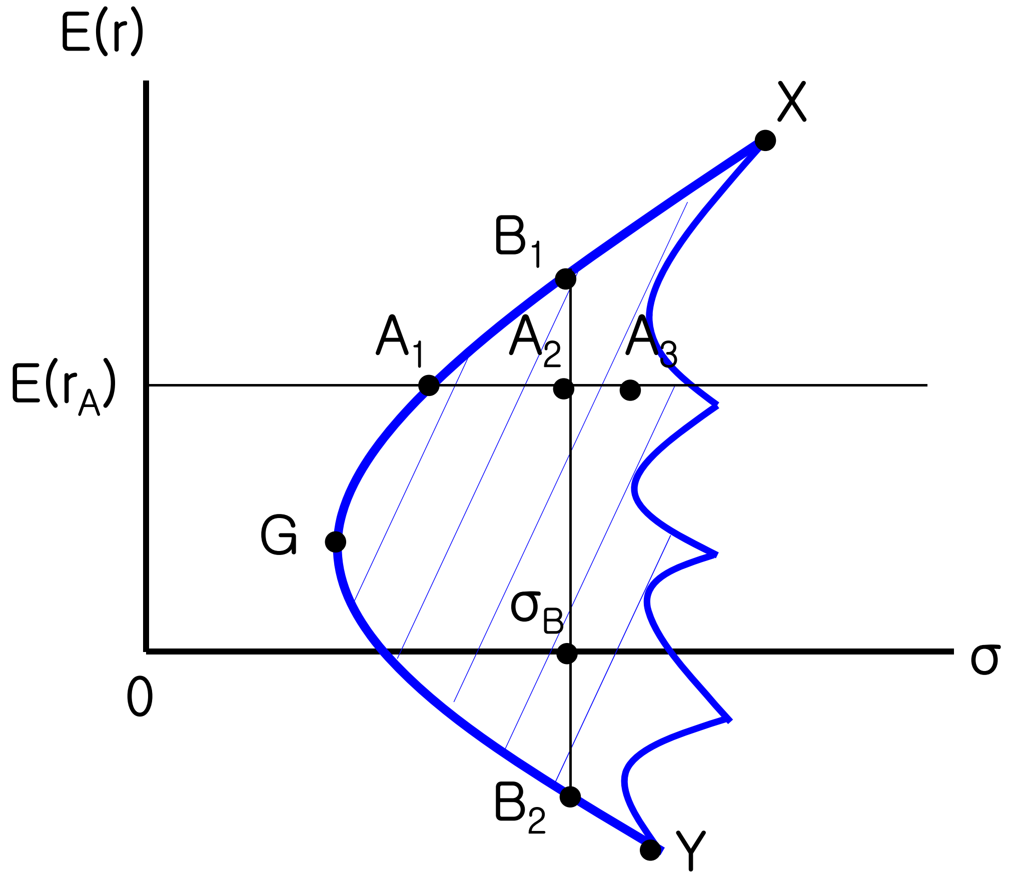


제 1 절 평균-분산 포트폴리오이론

Ⅳ. 포트폴리오 기대수익률과 위험의 측정

4. 최적 포트폴리오의 선택

[그림 5-7] 투자기회집합과 효율적 투자선

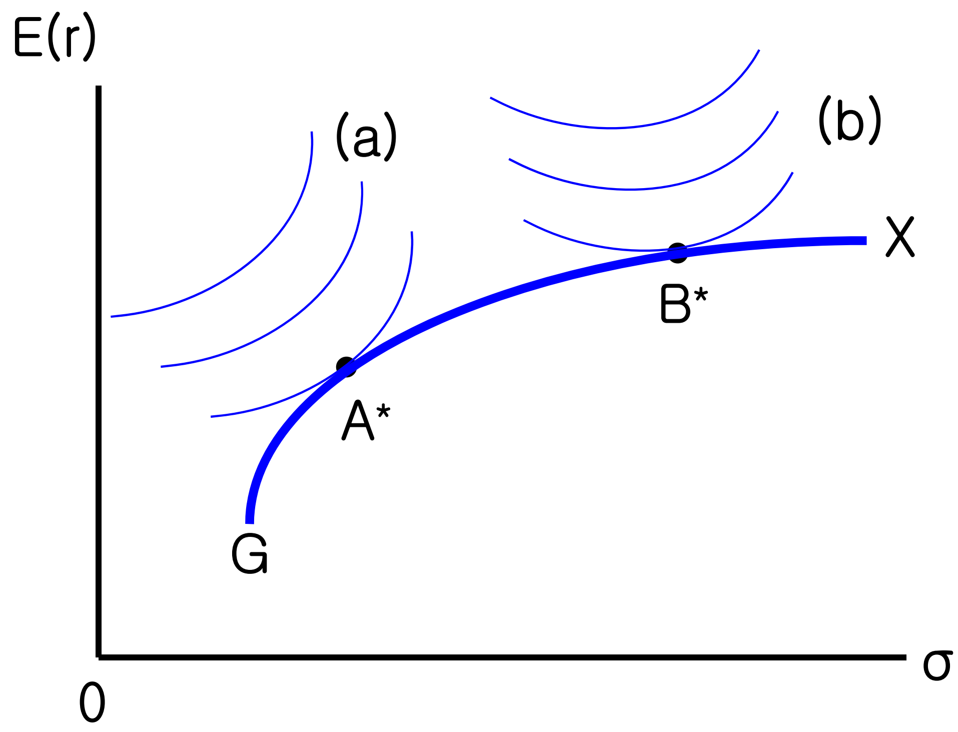


제 1 절 평균-분산 포트폴리오이론

IV. 포트폴리오 기대수익률과 위험의 측정

4. 최적 포트폴리오의 선택 : 분리정리

[그림 5-8] 무위험자산이 없는 경우 기대효용 극대화를 위한 포트폴리오 선택



제 1 절 평균-분산 포트폴리오이론

Ⅳ. 포트폴리오 기대수익률과 위험의 측정

4. 최적 포트폴리오의 선택 : 분리정리

- 최적포트폴리오(optimal portfolio) 선택과정
- [그림 5-8]에서 (a)는 위험회피성향이 비교적 강한 투자자의 무차별곡선이고, (b)는 위험회피성향이 비교적 약한 투자자의 무차별곡선이다.
- 투자자 (a)는 포트폴리오 A*를 투자자 b는 포트폴리오 B*를 선택함으로써 기대효용을 극대화시킬 수 있다.
- 위험회피성향이 강한 투자자는 기대수익률이 낮더라도 상대적으로 위험이 작은 포트폴리오 A*를 선택하고, 위험회피성향이 약한 투자자는 어느 정도의 위험은 감수하면서 기대수익률이 높은 포트폴리오 B*를 선택한다.

제 1 절 평균-분산 포트폴리오이론

IV. 포트폴리오 기대수익률과 위험의 측정

4. 최적 포트폴리오의 선택 : 분리정리

- 최적포트폴리오(optimal portfolio) 선택과정

1. 투자기회집합에서 지배원리를 적용하여 효율적 투자선을 찾아낸다.
2. 투자자의 기대효용을 극대화하도록 무차별곡선과 효율적 투자선이 접하는 최적포트폴리오를 찾아낸다.

- 포트폴리오 분리정리 (portfolio separation theorem)

- 평균-분산 모형에 의한 효율적 투자선의 구성단계와 투자자의 기대효용을 극대화시키는 최적포트폴리오의 선택단계가 분리되어 이루어지는 포트폴리오 선택원리.

제 2 절 자본자산가격결정모형

CAPM이란 무엇인가?

- 자본자산가격결정모형(capital asset pricing model : CAPM)은 자산의 위험에 따라 기대수익률이 어떻게 결정되는지를 보여주는 균형이론이다.

- CAPM은 여러 가격결정모형 중 가장 널리 알려진 모형으로 증권의 가치평가, 자본예산, 투자성과평가 등 재무관리 분야 전반에 걸쳐 광범위하게 사용된다.

제 2 절 자본자산가격결정모형

CAPM의 가정

평균-분산 포트폴리오이론

가정

1. 투자자들은 기대효용을 극대화하고자 하는 위험회피형 투자자
2. 평균-분산 모형에 따라 포트폴리오 선택
3. 세금과 거래비용 등의 시장마찰요인이 없는 상황
4. 모든 투자자들은 무위험이자율로 제한 없이 차입/대출 가능
5. 모든 투자자들의 투자기간은 1년

추가가정

6. 증권시장은 완전경쟁시장이고 증권의 공급은 고정
7. 모든 투자자들은 자산의 수익률 분포에 대해 동질적 기대

CAPM

제 2 절 자본자산가격결정모형

I. 자본시장선

1. 시장포트폴리오

- 시장포트폴리오란 증권시장에서 거래되는 모든 위험자산을 그 시장가치비율에 따라 구성한 포트폴리오를 말하고 m으로 나타내며 시장포트폴리오에서 개별자산이 차지하는 구성비율은 다음과 같다.

$$w_i^m = \frac{V_i}{V_m}$$

w_i^m : 시장포트폴리오에서 자산 i의 구성비율

V_i : 자산 i의 시가총액

V_m : 시장에서 거래되는 자산 전체 시가총액

- 동질적 기대 하에서 모든 투자자의 접점포트폴리오(T)는 시장포트폴리오(m)와 같은 구성비율을 갖는다.

제 2 절 자본자산가격결정모형

I. 자본시장선

1. 시장포트폴리오

- 시장포트폴리오는 시장에서 거래되는 모든 위험자산이 수요와 공급이 일치하고 균형 시장가격의 비율대로 구성되는 위험자산 포트폴리오
- 위험 포트폴리오 중 가장 효율적 포트폴리오
- 시장포트폴리오는 모든 위험자산을 포함한 완전 분산된 포트폴리오로 개인의 위험선호도와 관계없이 항상 일정 → 토빈의 분리정리
- 현실적인 시장포트폴리오의 대용치는 종합주가지수를 이용

제 2 절 자본자산가격결정모형

I. 자본시장선

- 동질적 기대하에서는 각 투자자의 접점포트폴리오가 시장포트폴리오와 일치하므로 투자자는 시장포트폴리오와 무위험자산에 대한 자산배분을 통해 자본배분선을 만든다.
- 시장포트폴리오와 무위험자산에 대한 자산배분을 통해 구성된 자본배분선을 자본시장선(capital market line : CML)이라 한다.
- 다음의 (식 7.2)의 자본시장선은 시장포트폴리오와 무위험자산에 대한 자산배분을 통해 구성 가능한 투자기회들의 기대수익률과 위험간의 관계를 나타내 준다.

제 2 절 자본자산가격결정모형

I. 자본시장선

$$E(r_P) = r_f + \frac{[E(r_m) - r_f]}{\sigma_m} \cdot \sigma_P \qquad \text{(식 7.2)}$$

$E(r_m)$: 시장포트폴리오의 기대수익률

σ_m : 시장포트폴리오의 표준편차

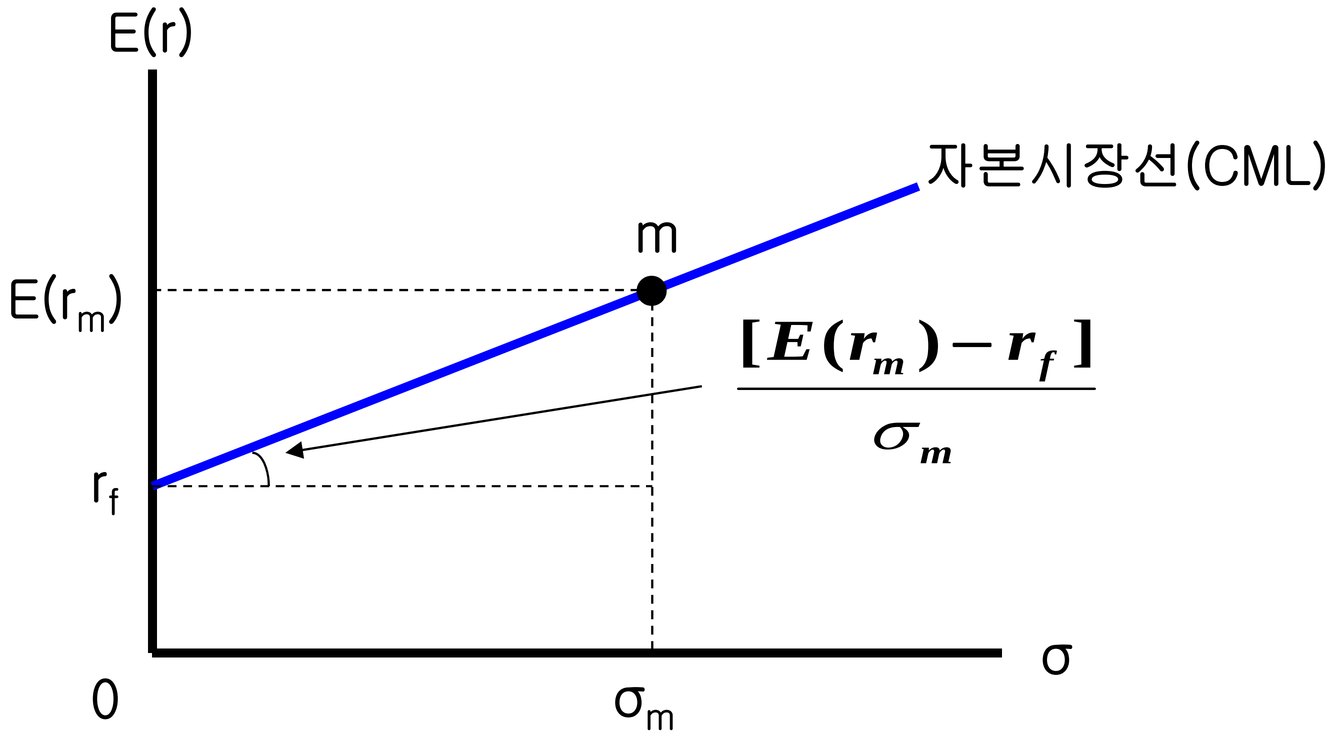
$\frac{[E(r_m) - r_f]}{\sigma_m}$: 위험의 시장가격 (시장포트폴리오의 위험보상비율)

$\frac{[E(r_m) - r_f]}{\sigma_m} \cdot \sigma_P$: 포트폴리오 P의 위험프리미엄

제 2 절 자본자산가격결정모형

I. 자본시장선

[그림 9-2] 자본시장선과 위험의 시장가격



제 2 절 자본자산가격결정모형

I. 자본시장선

- [그림 9-2]의 자본시장선이 효율적 투자선이 된다면 투자자들의 최적포트폴리오 선택은 두 단계로 나누어진다.
- 첫 단계는 최적위험자산 포트폴리오를 구성하는 단계로 이는 투자자의 위험회피정도와 관계없이 이루어지며 모든 투자자는 시장포트폴리오를 최적위험자산으로 가진다.
- 둘째 단계는 무위험자산과 시장포트폴리오에 대한 자산배분을 통해 최적포트폴리오를 구성하는 단계로 투자자들의 위험회피정도에 따라 결정된다.

제 2 절 자본자산가격결정모형

I. 자본시장선

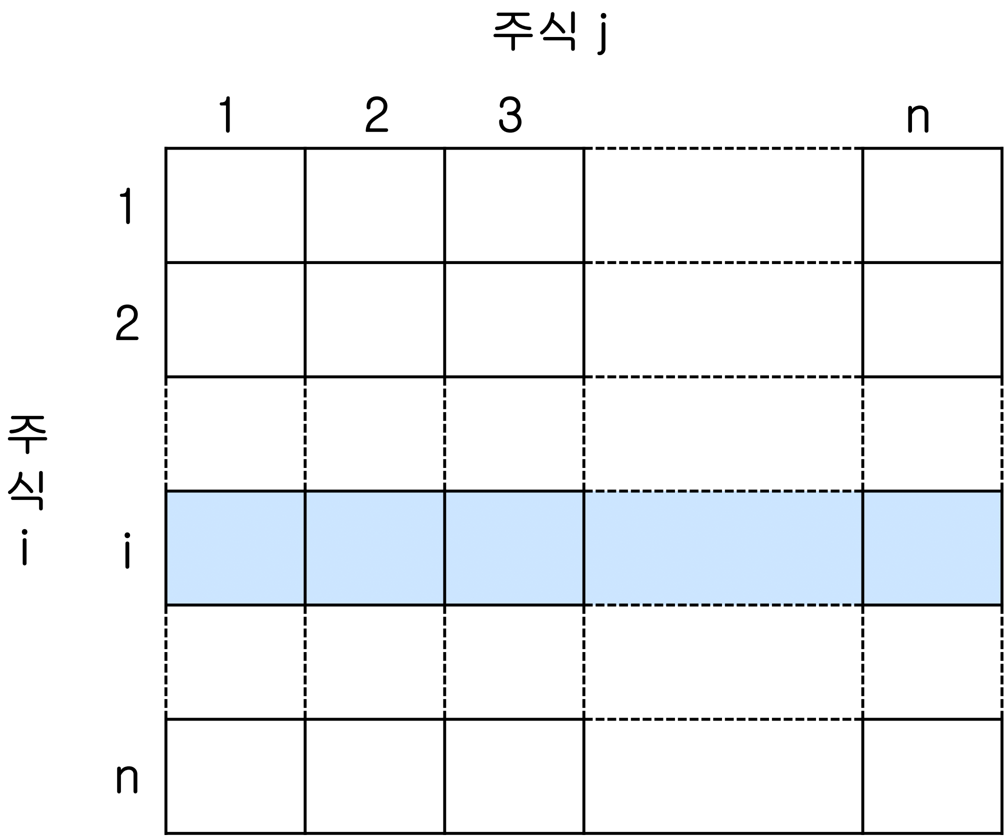
- [그림 9-2]에서 보듯 투자자들은 개별적인 무차별곡선이 어떻든 무위험자산과 시장포트폴리오 m만을 투자대상으로 선택하므로 이 시장포트폴리오와 무위험자산으로 구성된 어떤 투자자의 최적포트폴리오도 시장포트폴리오와 양(+)의 완전상관관계를 가진다. ($\rho=1$)
- 자본시장선은 위험단위당 균형가격을 제시하지만 이는 무위험자산과 시장포트폴리오의 선형결합으로 구성되는 효율적인 포트폴리오들에 대한 균형가격일 뿐 비효율적인 포트폴리오나 개별위험자산 등의 균형가격에 대해서는 아무런 설명도 하지 못한다.

제 2 절 자본자산가격결정모형

I. 자본시장선

2. 체계적 위험 베타의 의미

[그림 9-3] 포트폴리오의 위험과 개별주식의 기여도



$$\text{주식 1의 기여도} = w_1 \sum_{j=1}^{n} w_j \sigma_{1j} = w_1 \sigma_{1m}$$

$$\text{주식 2의 기여도} = w_2 \sum_{j=1}^{n} w_j \sigma_{2j} = w_2 \sigma_{2m}$$

$$\text{주식 i의 기여도} = w_i \sum_{j=1}^{n} w_j \sigma_{ij} = w_i \sigma_{im}$$

$$\text{주식 n의 기여도} = w_n \sum_{j=1}^{n} w_j \sigma_{nj} = w_n \sigma_{nm}$$

$$\text{총위험} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij} = \sigma_m^2$$

제 2 절 자본자산가격결정모형

I. 자본시장선

2. 체계적 위험 베타의 의미

- 체계적 위험의 의미
  - 개별주식의 위험 중 시장포트폴리오를 구성하여도 제거되지 않는 위험으로 시장위험(market risk)라고도 한다.

개별주식 i의 체계적 위험 $(\beta_i) = \dfrac{\sigma_{im}}{\sigma_m^2} = \dfrac{\rho_{im} \cdot \sigma_i}{\sigma_m}$ (식 7.2)

  - 베타는 결국 시장전체의 위험을 1로 보았을 때 개별주식 i가 갖는 위험의 크기를 나타낸다.
  - 베타는 시장포트폴리오의 수익률 r_m의 변화에 대한 개별수익률 r_i가 얼마나 민감하게 변하는가를 나타내기도 한다.

제 2 절 자본자산가격결정모형

I. 자본시장선

2. 체계적 위험 베타의 의미

- 포트폴리오베타의 정의 (β_P)

$$\beta_P = \frac{\sigma_{Pm}}{\sigma_m^2} = \frac{\rho_{Pm} \cdot \sigma_P}{\sigma_m} = \frac{Cov(r_P, r_m)}{Var(r_m)} \quad \text{(식 7.3)}$$

$$r_P = w_1 r_1 + w_1 r_1 + \cdots + w_n r_n \quad \text{(식 7.4)}$$

$$\beta_P = w_1 \beta_1 + w_1 \beta_1 + \cdots + w_n \beta_n = \sum_{i=1}^{n} w_i \beta_i \quad \text{(식 7.5)}$$

- 포트폴리오의 체계적 위험 β_P는 포트폴리오를 구성하고 있는 개별 주식의 체계적 위험을 각각의 구성비율로 가중평균 한 것이다.

제 2 절 자본자산가격결정모형

I. 자본시장선

2. 체계적 위험 베타의 의미

예 1

- 주식 A와 주식 B는 수익률의 표준편차가 각각 15%와 30%이며, 시장포트폴리오와의 상관계수는 각각 0.6과 0.8, 시장포트폴리오 수익률의 표준편차는 20%일 때 주식 A에 40%, 주식 B에 60%를 투자하여 구성한 포트폴리오의 베타를 계산하라.

(풀이)

$$\beta_A = \frac{(0.6)(15)}{(20)} = 0.45 \qquad \beta_B = \frac{(0.8)(30)}{(20)} = 1.2$$

$$\beta_P = (0.4)(0.45) + (0.6)(1.2) = 0.9$$

제 2 절 자본자산가격결정모형

I. 자본시장선

2. 체계적 위험 베타의 의미

예 2

- 어느 투자자가 베타가 1.2인 삼성전자 주식과 위험이 0인 정기예금에 투자하여 베타가 0.9인 포트폴리오를 가지고 싶어한다면 포트폴리오를 어떻게 구성하겠는가?

(풀이) 삼성전자 주식에 대한 투자비율을 w, 정기예금에 대한 투자비율을 1-w라 하면 베타가 0.9인 포트폴리오는 다음과 같이 구성할 수 있다.

$$\mathbf{0.9 = w \times 1.2 + (1 - w) \times 0}$$

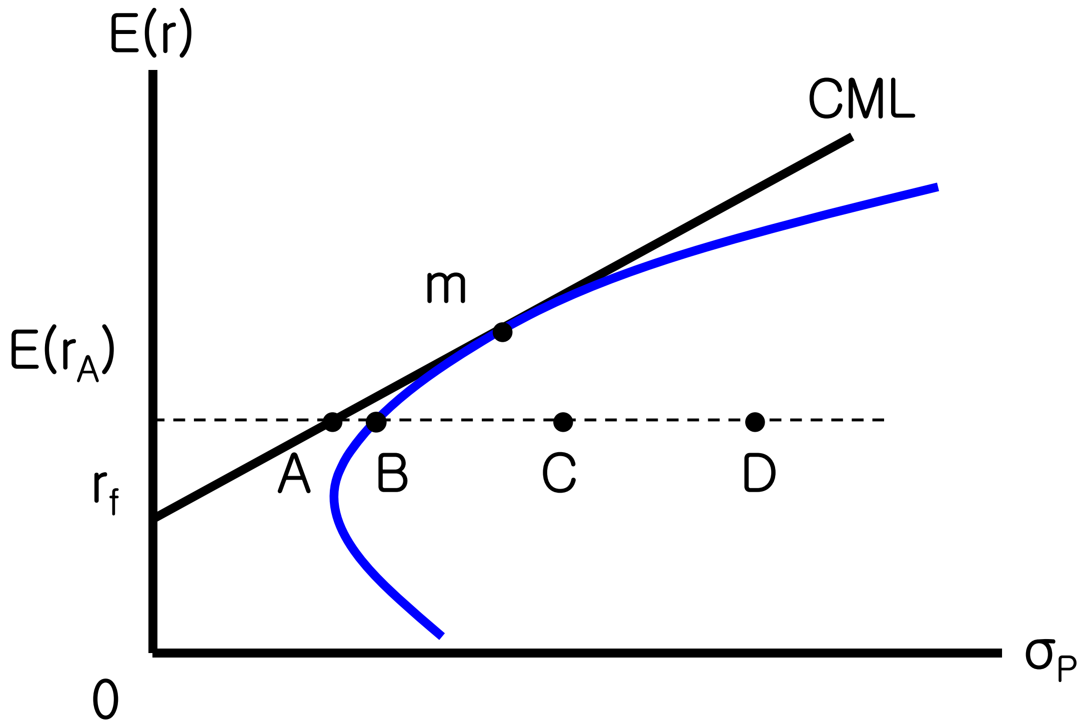
$$\therefore \mathbf{w = 0.75}$$

제 2 절 자본자산가격결정모형

I. 자본시장선

3. 증권시장선

[그림 7-3] 효율적 포트폴리오와 자본시장선



제 2 절 자본자산가격결정모형

I. 자본시장선

3. 증권시장선

- [그림 7-3]에서 A나 m같은 효율적 포트폴리오의 기대수익률은 그 표준편차가 주어질 경우 다음과 같은 자본시장선으로부터 계산할 수 있지만 B, C, D와 같은 비효율적인 포트폴리오 혹은 개별주식의 위험과 수익률의 관계에 대한 해답은 될 수 없다. 이에 대한 해답을 제시하고자 하는 것이 CAPM이다.

$$E(r_P) = r_f + \frac{[E(r_m) - r_f]}{\sigma_m} \cdot \sigma_P$$

제 2 절 자본자산가격결정모형

I. 자본시장선

3. 증권시장선

- CAPM의 도출 과정

자산 i의 시장포트폴리오 위험에의 기여도 : $w_i \sigma_{im}$ (식 7.10)

시장포트폴리오의 위험프리미엄 :

$$E(r_m) - r_f = \sum_{i=1}^{n} w_i [E(r_i) - r_f] \quad \text{(식 7.11)}$$

자산 i의 시장포트폴리오의 위험프리미엄에 대한 기여도 :

$$w_i [E(r_i) - r_f] \quad \text{(식 7.12)}$$

제 2 절 자본자산가격결정모형

I. 자본시장선

3. 증권시장선

- CAPM의 도출 과정

자산 i의 위험보상비율 : $$\frac{[E(r_i)-r_f]}{\sigma_{im}}$$ (식 7.13)

위험의 시장가격 : $$\frac{[E(r_m)-r_f]}{\sigma_m^2}$$ (식 7.14)

- 균형상태에 도달하기 위해서는 (식 7.13)과 (식7.14)의 값이 같아야 한다.

$$\frac{[E(r_i)-r_f]}{\sigma_{im}}=\frac{[E(r_m)-r_f]}{\sigma_m^2}$$ (식 7.15)

제 2 절 자본자산가격결정모형

I. 자본시장선

3. 증권시장선

- CAPM의 도출 과정
  - (식 7.15)를 $E(r_i)$에 대해 정리하면 다음과 같다.

$$E(r_i) = r_f + [E(r_m) - r_f] \cdot \frac{\sigma_{im}}{\sigma_m^2} \qquad \text{(식 7.16)}$$

  - $\frac{\sigma_{im}}{\sigma_m^2}$은 자산 i의 베타이므로 (식 7.16)은 다음과 같다.

$$E(r_i) = r_f + [E(r_m) - r_f] \cdot \beta_i \qquad \text{(식 7.17)}$$

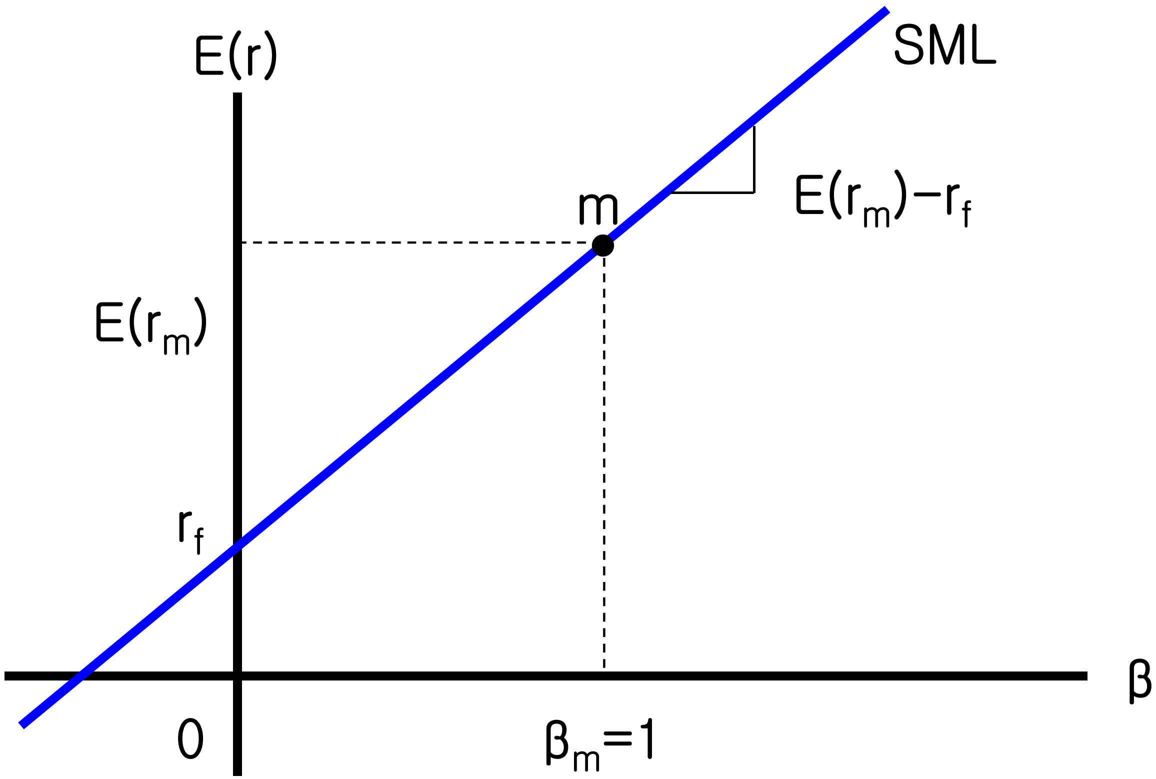
  - (식 7.17)은 균형상태에서 자산 i의 체계적 위험인 베타와 기대수익률 사이의 관계를 나타내는 것으로 자본자산가격결정모형(capital asset pricing model : CAPM)이라 하며, 이 관계를 그림(그림 7-4)으로 나타낸 것을 증권시장선(security market line : SML)이라 한다.

제 2 절 자본자산가격결정모형

I. 자본시장선

3. 증권시장선

[그림 7-4] 증권시장선 (SML)



제 2 절 자본자산가격결정모형

I. 자본시장선

3. 증권시장선

- 증권시장선의 특성
  - 증권의 기대수익률을 결정함에 있어 오직 베타만이 중요한 역할을 한다.
  - 증권의 기대수익률은 베타와 선형관계이다.
  - SML의 기울기인 시장위험프리미엄은 양(+)의 값이다.
  - SML의 절편은 명목무위험이자율을 나타내며 이의 크기는 실질무위험이자율과 예상인플레이션율에 의해 결정된다.

제 2 절 자본자산가격결정모형

I. 자본시장선

3. 증권시장선

- 증권시장선의 변형

$$E(r_i) = r_f + [E(r_m) - r_f] \cdot \beta_i \qquad \text{(식 7.17)}$$

$$E(r_i) - r_f = [E(r_m) - r_f] \cdot \beta_i \qquad \text{(식 7.18)}$$

$$\frac{E(r_i) - r_f}{\beta_i} = E(r_m) - r_f \qquad \text{(식 7.19)}$$

- (식 7.19)의 우변은 개별주식 i에 관계없이 결정되므로, 이 식은 베타 한 단위에 대한 위험보상이 모든 위험자산에 대해 일정하며 시장포트폴리오의 위험프리미엄과 같게 됨을 의미한다.

제 2 절 자본자산가격결정모형

I. 자본시장선

3. 증권시장선

예 3

- CAPM이 성립하는 증권시장에서 주식 A와 B의 베타는 각각 1.4와 0.8이고 기대수익률은 각각 12%와 9%일 때 무위험이자율과 시장포트폴리오에 대한 기대수익률은 얼마인가?

(풀이) (식 7.19)에 의해 다음 관계가 성립

$$\frac{12-r_f}{1.4}=\frac{9-r_f}{0.8}=E(r_m)-r_f$$

$\therefore r_f=5\%,\quad E(r_m)=10\%$

제 2 절 자본자산가격결정모형

I. 자본시장선

3. 증권시장선과 자본시장선의 관계

- (식 7.13)의 증권시장선에 효율적 포트폴리오 P의 체계적 위험 $\beta_P = \sigma_{Pm}/\sigma_{m2}$을 대입하면

$$E(r_P) = r_f + [E(r_m) - r_f] \cdot \frac{\sigma_{Pm}}{\sigma_m} \qquad \text{(식 7.20)}$$

- 또한 $\sigma_{Pm} = \rho_{Pm}\sigma_P\sigma_m$을 대입하면 다음과 같은 SML을 얻는다.

$$E(r_P) = r_f + [E(r_m) - r_f] \cdot \rho_{Pm}\sigma_P \qquad \text{(식 7.21)}$$

제 2 절 자본자산가격결정모형

I. 자본시장선

3. 증권시장선과 자본시장선의 관계

- (식 7.21)에서 SML상의 효율적포트폴리오는 무위험자산과 시장포트폴리오가 결합된 것으로 ρ_{Pm}는 1이 된다.

- 결국 SML상에 있는 효율적 포트폴리오들의 경우 다음의 식과 같이 되며 이는 (식 7.2)의 CML과 동일, 즉 SML은 균형상태에서 CML을 포괄하는 식이 된다.

$$E(r_P) = r_f + \frac{[E(r_m) - r_f]}{\sigma_m} \cdot \sigma_P$$

제 2 절 자본자산가격결정모형

I. 자본시장선

3. CAPM의 이용

- 증권가치평가에 있어서 적정할인율의 결정
  - 미래 현금흐름을 할인하는 데 이용되는 적절한 할인율은 해당 증권의 위험을 고려한 기대수익률이며, 이는 증권시장선을 이용하여 계산 가능하고 이를 이용하여 증권의 가치를 구할 수 있다.

제 2 절 자본자산가격결정모형

I. 자본시장선

3. CAPM의 이용

예 3

- 시장의 무위험이자율이 10%이고 시장포트폴리오의 기대수익률이 20%, 베타가 2인 주식의 기대수익률과 가치는 증권시장선을 이용하여 계산해보자. 1년간 보유했을 때의 배당을 1,300원 기말의 주식가격이 26,000으로 예상된다면 이 주식의 이론가격은 얼마인가?

(풀이)

$$E(r_i) = 10 + (20 - 10) \times 2 = 30(\%)$$

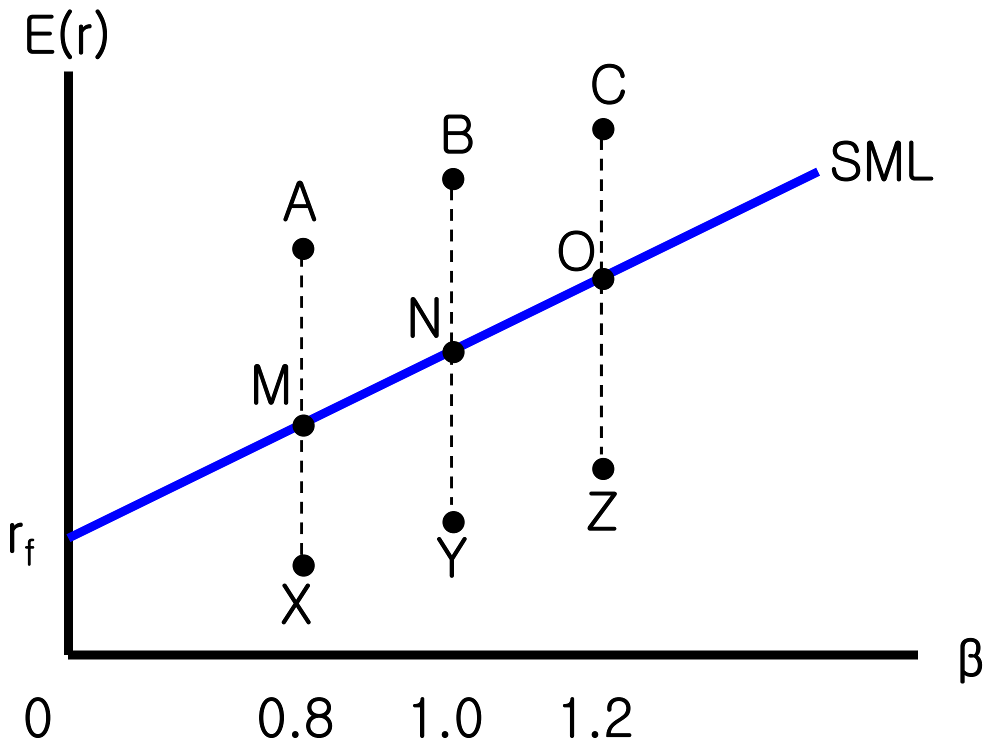
$$P_0 = \frac{1{,}300}{1 + 0.3} + \frac{26{,}000}{1 + 0.3} = 21{,}000(\text{원})$$

제 2 절 자본자산가격결정모형

I. 자본시장선

3. CAPM의 이용

[그림 7-5] 증권시장선과 주식의 평가



제 2 절 자본자산가격결정모형

I. 자본시장선

3. CAPM의 이용

- 과대평가주식과 과소평가주식의 식별
  - 증권시장선을 이용하여 주식의 가치평가를 할 수 있으며, 과소 또는 과대 평가 여부를 알 수 있다.
  - 투자자는 과소/과대평가된 주식들의 매매거래를 통해 이익을 얻을 수 있다.
  - [그림 7-5]에서 주식 A, B, C는 과소평가된 상태이고 X, Y, Z는 과대평가된 상태이다.
- 투자성과 분석
  - 사후적인 자료를 이용하여 추정된 사후적 증권시장선을 통해 투자성과를 분석하면 투자성과에 대응하는 위험부담을 알 수 있다.

제 2 절 자본자산가격결정모형

I. 자본시장선

3. CAPM의 한계

- CAPM은 증권의 기대수익률 등의 예측자료에 기초한 사전적 모형 (ex-ante model)인데, 실제 검증에 이용되는 자료는 과거자료라는 한계가 있음.
- 과거의 추세가 장래에도 그대로 적용될 수 있다는 전제가 필요한데 베타가 불안정하다면 베타 값을 적절히 수정할 필요가 있음.
- 시장포트폴리오의 구성은 현실적으로 불가능하고 그 수익률도 산출이 불가능하고 그 대용치로 종합주가지수를 사용하나 근원적으로는 부적절할 수 있음.