제 9장.통계적 가설검정

참고서: 통계학이론(최종덕 외 2인 공저, MJ 미디어), 통계조사분석(원태연, 정성원 공저, 한나래)
교과서: SPSS for windows 14.0, 우수명 저

9.1 가설검정

개요: 가설검정이란 어떤 모수의 값 또는 확률분포에 대하여 가설을 세우고 이 가설이 맞다고 주장해도 이상이 없는지를 표본 데이터의 통계적 확률에 의해 결정하는 것을 말한다.
[**예 1: 가설**] 모 제약회사에서 한 연구원이 기존약 보다 더 좋은 신약을 개발하였다고 주장한다. 경영자의 입장에서 연구원의 주장은 가설에 불과하며, 경영자는 이 연구원의 말만 믿고 공장라인을 신설할 수 없다. 왜냐하면 실패의 경우 큰 손실이 발생하기 때문에. 따라서 새로운 약이 기존약과 비교하여 효능이 좋은지를 판단하는 사전 검정이 필요하며 이 가설(기존약 보다 더 좋은 신약)의 진위를 검정하는 것이 가설검정이다.

9.1.1가설설정과 검정

가설(Hypothesis)의 설정: 가설은 검정하고자 하는 모집단의 모수 θ (조사하고자 하는 자료의 평균, 분산, 표준편차, 상관계수)에 대하여 항상 다음의 둘로설정한다.

(1)**귀무가설**[영(0)가설:null hypothesis] H_o: 두 모수(예: 두 평균)에 대한 값이 같다고 놓을때, 기각(reject) 또는 채택(accept)하려고 세운 검정의 대상이 되는 가설이며 H_0로 나타낸다.

H_0 [귀무(영)가설]: $\theta_1 = \theta_2$

귀무(영)가설은 수식 표현대로 “두 모수는 같다”와 같이 설정하는 것이다.

(2) **대립가설**[연구가설:alternative hypothesis] H_1: 귀무(영)가설이 채택되지 않을 때, 즉 두 모수에 대한 값이 다를 때 가설이다.여기에는 다음과 같이구분하는 두 가지 검정방법이 존재한다.

(i) 양측검정 H_1: $\theta_1 \neq \theta_2$ (두 모수는 같지 않다.)

H_0는 $\mu_2 = \mu_1 = 3000$ 과 같이 특정 값이고, H_1은 $\mu_2 \neq \mu_1$ 처럼 값이 다를 때이다.

(ii) 단측검정 H_1: $\theta_1 > \theta_2$ 또는 $\theta_1 < \theta_2$ (두 모수중 하나는 다른 것 보다 크다 또는 작다.)

귀무(영)가설하에서 단측(한쪽)검정인 좌측검정은 H_1이 $\mu_1 < \mu_2$, 우측검정은 H_1이 $\mu_1 > \mu_2$일 때이다.

[양측검정 예] 서울 강남지역과 강북지역 고등학생들의 학력고사 성적이 같은가?
<u>가설설정</u>: 강남과 강북의 고등학생 성적을 비교하기 위하여 두 지역에서 각각 100명씩을 무작위로 선별하고 동일한 시험을 실시한 후 평균을 비교한다. 통계적 수리로 취급하는 방법은

μ_1: 강남지역의 평균성적

μ_2: 강북지역의 평균성적

이때 표본관찰에 의해 검정하고자 하는 가설 H_0와 H_1은 각각

귀무(영)가설 H_0: $\mu_2 = \mu_1$(강 남북 고등학생의 평균이 같다)

대립(연구)가설 H_1: $\mu_2 \neq \mu_1$(강 남북 고등학생의 평균이 같지 않다).

[단측검정 예1]1995년 회사 신제품의 월 평균판매량이 $\mu_1 = 3000$개 정도였다. 1996년 이 제품의 월 평균판매량 μ_2가 증가하였다고 할 수 있는가?

<u>가설설정</u>: 이것을 검정하려면 1996년도 월 평균판매량 μ_2는 $\mu_2 > \mu_1 = 3000$이면 된다. 이 μ_2를 구하려면 표본점포(예를 들면 100개의 점포)에서 신제품을 무작위로 뽑아 월 평균판매량의 평균을 구하여 비교하면 될 것이다. 통계적 수리로 취급하는 방법은

1995년도 월 평균판매량: $\mu_1 = 3000$

1996년도 월 평균판매량: μ_2

이때 표본관찰에 의해 검정하고자 하는 가설 H_0와 H_1은 각각 다음과 같이 놓는다.

귀무(영)가설 $H_0: \mu_2 \leq \mu_1 = 3000$(1996년 월 평균판매량이 3000개이하이다).

대립(연구)가설 H_1: $\mu_2 > \mu_1$(1996년 월 판매량이 1995년도 월 판매량보다 많다).

[단측검정 예2] 어떤 한 회사에서 새 방법으로 제작된 자동차 타이어의 평균수명이 재래식으로 제작된 타이어보다 더 길다고 할 수 있나.

<u>가설설정</u>: 재래식 제조 타이어 n_1개와 새로운 방법으로 제조된 타이어 n_2개를 무작위로 표본추출하고 동일 차종에 대해 같은 방법으로 수명을 조사한다. 수리적 표현은

μ_1: 재래방식 제조 타이어의 평균수명

μ_2: 새로운 방법 제조 타이어의 평균수명

이때 표본관찰에 의해 검정하고자 하는 가설 H_0와 H_1은 각각

귀무(영)가설 $H_0: \mu_1 \geq \mu_2$(새로운 제조방법은 평균 수명이 같거나 짧다).

대립(연구)가설 H_1: $\mu_1 < \mu_2$(새 방법이 재래 방법으로 만든 타이어의 수명보다 길다).

가설검정: 표본관찰이나 실험을 통하여 두 가설 중 하나를 선택하는 과정이다. H_0와 H_1 중 하나를 선택하는 것으로 만일 H_0를 채택(accept)하면 H_1은 기각(reject)되고, 이와 달리 H_1을 채택하면 H_0가 자동으로 기각된다. 따라서 가설검정이란 귀무가설(영가설)을 채택하느냐 또는 기각하느냐 하는 것을 의미한다. 통계학에서 귀무가설이 기각된다고 하여도 그것은 이 가설이 반드시 옳지 않다고 단정하는 것은 아니며, 단지 표본의 측정결과가 귀무가설을 채택할 충분한 근거가 없다는 이유, 즉 어디까지나 확률에 의한 해석일 뿐이다.

9.1.2 검정통계량

가설검정은 위와 같이 모수에 대한 가설 H_0와 H_1을 설정한 후에 표본관찰로부터 필요한 통계

량을 구하여 검정하며, 이러한 통계량을 검정통계량[(test statistics: $T(x)$]이라 한다. 검정통계량의 분포는 항상 가설에서 주어지는 모수의 분포를 따르고, 귀무(영)가설이 옳다는 전제하에 검정통계량을 구한 후, 이 값이 나타날 확률(유의확률)의 크기와 기준이되는 유의수준 α 를 비교하여 귀무(영)가설의 채택여부가 결정된다.

위의[단측검정 예1]에서 임의로 추출된 100 개점포의 월 판매량이 $x_1, x_2 \cdots, x_{100}$, 그리고 이들의 월 평균판매량을 $\bar{x}$ 라고 할 때 표본평균과 분산은 각각 다음과 같다.

표본평균: $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$, ($n = 100$) (9.1)

표본분산: $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$ (9.2)

여기서 가설 H_0 ($\mu_2 = \mu_1$)와 H_1 ($\mu_2 \neq \mu_1$)에 대한 검정통계량은 표본평균 $\bar{x}$ 이다.모집단의 분포가 정규분포, 즉 $N(\mu, \sigma^2)$ 이라 하면 검정통계량 $\bar{x}$ 의 분포와 이것의 표준화는 다음과 같이 표현된다.

$\bar{x}$ 분포: $\bar{x} \sim N(\mu, \sigma^2 / n)$ (9.3)

표준화: $\frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$ (9.4)

귀무(영)가설 H_o 의 채택여부는 표준 정규분포에서 확률에 의해 결정한다. 그 예로 검정통계량의 평균과 분산이 각각 $\bar{x} = 3100$, $s^2 = 500$ 으로 계산되었다면 모분산 σ^2 은 알지 못하므로 표본분산 s^2 으로 대치한다. 이것으로 계산한 검정통계량의 표준화 값은 다음과 같이 t -분포로나타나며 이것을 **$T-$검정**이라 한다.

$T = \frac{\bar{x} - \mu}{s / \sqrt{n}} \sim t_{n-1}$, ($n = 100$) (9.5)

자유도(degree of freedom) ϕ : 자유도는 평균이나 상관계수를 검증하는 $t-$분포, 분산검증의 χ^2 -분포, 표본분산의 비를 검증하는 F -분포 등에서 사용하는 값으로 자유도에 따라 이들 분포는 모양이 달라진다. 위의 예에서점포수 $n = 100$ 의 경우에 $\phi = n - 1 = 100 - 1 = 99$ 를 $t-$분포의 자유도(degree of freedom)라 한다.이때 t -분포는 정규분포와 약간 다르다. 따라서 자유도에 따른 이들의 확률 값은 정규분포처럼 수표로 정리되어 있다.일반적으로 $t-$분포는 표본수가 30 이하 일 때 정규분포와 차이가 있고, 30 보다 커지면 거의 정규분포와 비슷하다. 자유도 99 의 $t-$분포는 정규분포의 수표에서 확률을 계산하여도 차이가 거의 나지 않는다.

수식 (9.5)로 [단측검정 예1]의 검정통계량을 계산하면 다음과 같다.

$$T = \frac{\bar{x} - \mu}{s / \sqrt{n}} = \frac{3100 - 3000}{\sqrt{500 / 100}} = 44.72$$

$t-$분포표의 자유도 $\phi = 99$ 에서 $T = 44.72$ 의 확률을 찾아보면 이 값이 나타날 확률은 거의 0 이다. 이 계산의 경우 표본수는 $n = 100$ 으로 크기 때문에 정규분포에서 $z = 44.72$ 로 계산해도 된다.

그리고 이 값을 정규분포에서 찾아보면 그 확률 값도 거의 0 이다. 따라서 귀무(영)가설 H_0 ($\mu_2 = \mu_1 = 3000$, 즉 1996년도 월 평균판매량이 3000개)는 기각되기 때문에 자동으로 H_1(1996년 월 평균판매량이 증가)이 채택된다. 이때 통계학은 귀무(영)가설을 기각하게 된 이유에 대해 **유의수준과 유의확률**이라는 말로 판단기준이 되는 확률을 표시한다.

9.1.3 대립가설과 기각역

유의수준 α : 귀무가설(영가설) H_o 가 옳은 데도 불구하고 옳지 않다고 판정하여 기각함으로써 생기는 오류를 제 1종 오류라 하고 판단기준이 되는 확률을 유의수준(significant level)이라 하며 α 로 표시한다. 유의수준 α 는 귀무가설을 기각했을 때 올바른 결정을 내렸을 확률이 최소한 $1-\alpha$ 가 된다는 뜻으로 앞에서 공부한 신뢰수준이다. 가설검정은 항상 귀무(영)가설이 옳다는 전제하에서 검정통계량의 분포를 구하고 실제 표본관측으로부터 구한 검정통계량의 값이 나타날 가능성에 의하여 채택여부를 결정한다.

귀무가설이 거짓임에도 불구하고 참이라고 판정하여 채택함으로써 생기는 오류를 제 2종 오류라하며 이 오류를 범할 확률을 β 로 표시한다. $(1-\beta)$를 검정력함수(power function)라 하고 귀무가설 H_o 가 성립하지 않을 경우에 그것을 정확하게 검출하는 확률이다.유의수준을 낮게 잡으면 제 1종오류가 작아져서 귀무(영)가설이 잘못될 가능성은 낮아지지만 동시에 제 2종 오류를 범할 위험이 증가한다. 따라서 유의수준 α 의 값은 제 1종과 제 2종을 동시에 고려한 수가 사용되어야 한다. 통계프로그램(또는 통계학)의 가설검정은 항상 귀무(영)가설이 옳다는 전제하에 표본으로부터 검정통계량을 구하고 이 값이 나타날 확률(유의확률)에 의해 채택여부를 결정한다.

귀무(영)가설이 채택되는 판단기준은 유의수준 α 로 나타내며 $\alpha = 0.01$, $\alpha = 0.05$, $\alpha = 0.1$ 등으로 표시한다. 한 예로 유의수준 $\alpha = 0.05$ 란 귀무(영)가설을 채택하는 기준값이다. 유의확률(검정통계량의 확률)이 이 값보다 크면 귀무(영)가설이 채택되고, 유의확률이 이보다 작으면 귀무가설은 기각되며 반대로 대립(연구)가설이 채택된다. 예를 들면검정통계량이 나타날 확률(통계프로그램에서 유의확률) p 가 α 보다 클 경우, 즉 $p \geq \alpha$ 일 때는 귀무(영)가설이채택되고 작은 경우는 기각된다. 여기에서 가능성이 '크다' 또는 '작다'의 기준은 유의수준 α 이다. 언급한 바와 같이 α 는 신뢰수준과 $(1-\alpha)$의 관계에 있다.통계학에서 유의수준은 보통 0.05를 기준으로 하며 유의수준 $\alpha = 0.05$의 뜻은 귀무가설을 기각했을 때 올바른 의사결정을 내렸을 가능성이 최소한 95% 이상이라는 것을 의미한다.

귀무가설의 채택:귀무가설이 옳은데도 불구하고 옳지 않다고 판단하여 생기는 오류를 제 1종 오류라 하였다. 이 판단기준이 되는 확률이 유의수준 또는 위험률 α 이다. 유의수준 $\alpha = 0.05$ 라면 신뢰수준은 95% 이며 $\alpha = 0.01$ 이면 신뢰수준은 99% 이다. 이것은 귀무가설이 채택되거나 기각되었을 때 그 결정이 신뢰수준만큼 옳다는 것을 의미한다. 예를들면**유의수준 $\boldsymbol{\alpha = 0.05}$ 일 때 통계프로그램을 돌려 얻은 검정통계량의 유의확률이 $\boldsymbol{p = 0.18}$ 이라면 이 확률에 해당하는 z 값(또는 $\boldsymbol{t}$**

값)이 속할 지역의 신뢰확률(기각역을 제외한 지역의 확률)은 **95%**로 믿을 수 있다는뜻이다. 통계프로그램에서 신뢰수준을 보면 유의수준을 자동으로 알 수 있다. 유의수준 α는 신뢰수준과 $1-\alpha$의 관계가 있기 때문에 유의수준은 조사자가 신뢰수준을 입력하여 결정한다.

기각역(critical region): 유의수준 α 이하인 지역으로 귀무(영)가설을 기각하는 확률지역이다. 언급한 바와 같이 유의수준 α에 의해 기각역의 크기를 알 수 있고 기각역의 위치는 대립(연구)가설 H_1의 형태에 따라 양측(양쪽)검정과 단측(한쪽)검정(우 또는 좌측검정)으로 분류된다.

표본추출 n이 큰 경우 t-분포는 다음과 같이 대략 정규분포를 따른다.

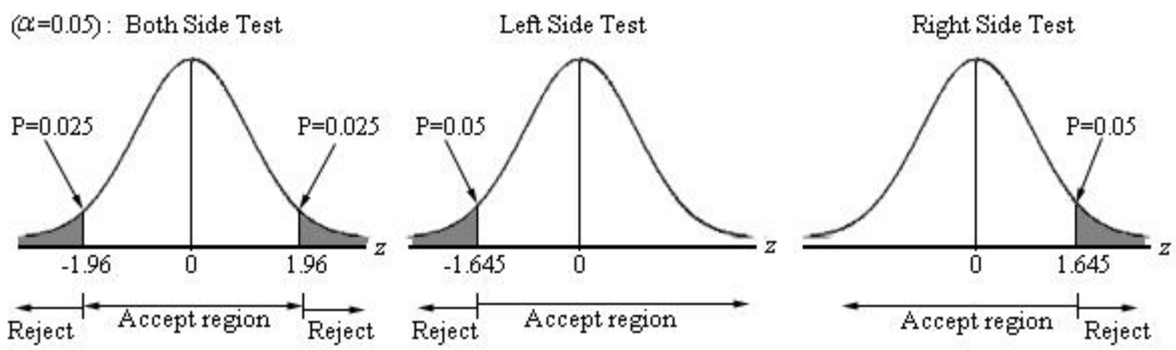
$$t(x)=\frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}}\sim N(0,1) \tag{9.6}$$

유의수준 $\alpha=0.05$일 때 양측(양쪽)또는단측(한쪽)검정에 대한 기각역과 채택역을 구하려면 우선 유의수준$\alpha=0.05$로 계산한 확률의 표준화 z에 대한 값을 구하여야 한다.

양측(양쪽)검정: $P(z_{\alpha/2}\geq 1.96)=P(z_{\alpha/2}\leq -1.96)=0.025$ (9.7)

단측(한쪽)검정: $P(z_{\alpha}\geq 1.645)=P(z_{\alpha}\leq -1.645)=0.05$ (9.8)

유의수준 $\alpha=0.05$일 때 (9.7)의 확률은 양측(양쪽)검정에, (9.8)은 단측(한쪽)검정에 적용하는 값이다. 이들에 대한 기각역과 채택역을 정규분포 곡선에 나타내면 다음 그림과 같다.



가설검정의 요약

1. 검정하고자 하는 목적에 따라서 귀무가설(영가설)과 대립가설(연구가설)을 설정한다.

   귀무(영)가설 H_0: 두 모수는 같다. (예) $\mu_1=\mu_2$

   대립(연구)가설 H_1: 두 모수는 같지 않다. (예) $\mu_1\neq\mu_2$

   대립가설은 두 가지를 설정할 수 있다.

   양측(양쪽)검정: $\mu_1\neq\mu_2$

   단측(한쪽)검정: $\mu_1>\mu_2$ 또는 $\mu_1<\mu_2$

2. 검정방법을 결정하고 실행(검정통계량 계산)한다.

   통계학 프로그램은 귀무(영)가설 만을 검정한다.

3. 유의수준을 결정한다.

통계학 프로그램은 귀무(영)가설의 유의수준을 보통 $\alpha = 0.05$로 설정한다.

유의수준 $\alpha = 0.05$란 신뢰수준이 95%란 의미이며 이것은 귀무가설 H_o가 기각(reject)또는 채택(accept)되었을 때, 그 결정이 95% 믿을 수 있다는 뜻이다.

4. 귀무(영)가설이 옳다는 전제하에 검정통계량으로 계산한 유의확률을 확인한다.
5. 유의확률이 작으면(일반적으로 0.05 이하) 기각역에 속하므로 귀무(영)가설 H_0를 기각(H_1이 자동으로 채택 됨)하고, 그렇지 않으면 H_0를 채택(H_1이 자동으로 폐기 됨)한다.

9.2 모평균에 대한 가설검정: 단일표본 T검정

모집단에 대한 평균을 검정하려면 이 모집단에서 추출한 표본으로부터 계산한 모평균 μ의 가장 좋은 점추정량인 표본평균 $\bar{x}$를 이용하여 가설검정을 할 수 있다.

9.2.1 모분산 σ^2을 아는 경우

<통계적 가설검정의 절차>

(1) 귀무가설(영가설) H_o: $\mu = \mu_o$

(2) 대립가설(연구가설) H_1: $\mu \neq \mu_o$ 또는 $\mu > \mu_o$, $\mu < \mu_o$

(3) 검정통계량 계산: $Z = \dfrac{\bar{x} - \mu_o}{\sigma / \sqrt{n}}$

(4) 유의수준 α 결정

(5) 기각역

양쪽검정: $|Z| \geq z_{\alpha/2}$

한쪽검정: $Z \geq z_\alpha$ 또는 $Z \leq -z_\alpha$

(6) 검정통계량의 값이 기각역에 포함되면 귀무가설(영가설) H_o를 기각하고 아니면 채택한다.

가설에 따른 기각역

귀무가설	대립가설	유의수준 α인 기각역
H_o: $\mu = \mu_o$	H_1: $\mu \neq \mu_o$	$\lvert Z \rvert \geq z_{\alpha/2}$
H_o: $\mu \leq \mu_o$	H_1: $\mu > \mu_o$	$Z \geq z_\alpha$
H_o: $\mu \geq \mu_o$,	H_1: $\mu < \mu_o$	$Z \leq -z_\alpha$

[보기 9_1]어느 영업부서에서 판매원에 대한 재교육을 실시한 후,임의로 9일을 선택하여 판매고에 대한 조사를 한 결과 다음과 같았다. 평균 판매고가 $\mu_o = 1000$을 초과하면 재교육이 효과가 있는 것으로 간주할 때, 재교육은 효과가 있었는지 유의수준 $\alpha = 0.01$에서 검정하라.단 판매고는 $\sigma = 100$인 정규분포를 따른다.

판매고 (단위: 1000원): 1280 1250 990 1100 880 1300 1100 950 1050

※ z −분포:http://www.statdistributions.com/normal/

$z_{\alpha}=z_{0.01}$의 한쪽 값.

(a) [p-value] box에 0.01 입력

(b) [mean] box에 0 입력

(c) [std dev:] box에 1 입력

(d) [right tail] 선택

[z-value] box에서 2.327을 얻을 것이다.

(풀이) (1) 판매고 평균: $\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\frac{1}{9}(1280+1250+\cdots+1050)=\frac{1}{9}(9900)=1100$

(2) 귀무가설(영가설) H_o: $\mu=1000$, 대립가설(연구가설) H_1: $\mu>1000$

(3) 표본크기: $n=9$, 유의수준: $\alpha=0.01$

(4) 검정통계량: $Z=\frac{\bar{x}-\mu_o}{\sigma/\sqrt{n}}=\frac{1100-1000}{100/\sqrt{9}}=3$

(5) 기각역 $z_{\alpha}=z_{1-\alpha}$보다 큰 지역: $z_{0.01}=z_{0.99}=2.327$보다 큰 값은 기각역에 있다.

(6) 검정결과: 검정통계량 $Z=3$은 기각역이 시작되는 $z_{0.01}=2.327$보다 크므로 귀무(영)가설 H_o는 기각되고 대립(연구)가설 H_1이 채택된다. 즉 재교육 후 판매량은 증가하였다. 따라서 재교육은 효과가 있다고 결론 내릴 수 있다.

9.2.2 모분산 σ^2을 모르는 경우

1) 대표본($n>30$)일 때

<통계적 가설검정의 절차>

절차는 위의 경우와 동일하고 모분산 σ^2 대신 표본분산 s^2을 사용한다.

검정통계량: $Z=\frac{\bar{x}-\mu_o}{s/\sqrt{n}}$

2) 소표본($n\le 30$)일 때

이 경우의 검정통계량은 자유도 $\phi=n-1$을 가진 t−분포 검정을 하여야 한다.

검정통계량: $T=\frac{\bar{x}-\mu_o}{s/\sqrt{n}}$

[보기 9_2] 지난 일년동안 사망자 중에서 임의로 100명을 추출하여 평균수명을 조사한 결과 평균수명이 71.8세이고 표준편차는 8.9세였다. 이 자료에 의하면 평균수명이 70세 이상이라고 할 수 있는지 유의수준 $\alpha=0.05$에서 검정하라.

※ z −분포:http://www.statdistributions.com/normal/

$z_\alpha = z_{0.05}$ 의 한쪽 값.

(a) [p-value] box에 0.05 입력

(b) [mean] box에 0 입력

(c) [std dev:] box에 1 입력

(d) [right tail] 선택

[z-value] box에서 1.645를 얻을 것이다.

(풀이) 귀무(영)가설 H_o: $\mu = 70$

대립(연구)가설 H_1: $\mu > 70$

기각역: $z_{\alpha=0.05} = z_{0.950} = 1.645$

μ 의 범위: $\bar{x} - z_{0.05}(\frac{s}{\sqrt{n}}) \le \mu \le \bar{x} + z_{0.05}(\frac{s}{\sqrt{n}})$

$$71.8 - (1.645)(\frac{8.9}{\sqrt{100}}) \le \mu \le 71.8 + (1.645)(\frac{8.9}{\sqrt{100}})$$

$\therefore\ 70.336 \le \mu \le 73.264$

자료의 평균수명: $\bar{x} = 71.8$

자료의 표준편차: $s = 8.9$

검정통계량: $Z = \dfrac{\bar{x} - \mu_o}{s/\sqrt{n}} = \dfrac{71.8 - 70}{8.9/\sqrt{100}} = 20.2247$

검정결과: $Z > z_{0.05}$ 이다. 따라서 검정통계량 Z 는 기각역에 있기 때문에 H_o 는 기각되고, H_1 이 채택된다. 즉 평균수명은 70 세 이상이라고 95% 신뢰수준에서 말할 수 있다.

SPSS단일표본 검정

[보기 9_3] 어느 식용류 회사에서 평균용량을 $200\,\mathrm{ml}$ 로 하고 싶다. 평균용량을 조사하기 위하여 임의로 20 개를 추출해 조사한 결과가 다음과 같다. 이 회사에서 생산되는 식용류의 평균용량이 $200\,\mathrm{ml}$ 라고 할수 있는지 유의수준 $5\%(\alpha = 0.05)$ 에서 검정하라. (단위: ml)

[용량]	199.9	201.0	200.2	200.2	200.4	200.1	200.2	200.0	199.9	200.0
	200.0	200.8	199.9	200.1	200.5	199.9	200.4	200.5	199.8	200.2

(풀이)통계학과 통계프로그램(SPSS)에서 얻을 수 있는 모든 것을 계산해 보도록 하자.

(1) 검정에 필요한 가설

귀무(영)가설 H_o: $\mu = 200$ (표본의 평균용량은 $200\,\mathrm{ml}$ 이다.)

대립(연구)가설 H_1: $\mu \ne 200\,\mathrm{ml}$

이 경우 검정은 양쪽 검정이다.

(2) 다음의 표에 의해 필요한 계산을 한다.

[표 9-1] 표본의 용량 및 계산(용량의 단위: ml)

id	용량(x)	$x-\bar{x}$	$(x-\bar{x})^2$	id	용량(x)	$x-\bar{x}$	$(x-\bar{x})^2$
1	199.9	-0.3	0.09	11	200.0	-0.2	0.04
2	201.0	0.8	0.64	12	200.8	0.6	0.36
3	200.2	0	0	13	199.9	-0.3	0.09
4	200.2	0	0	14	200.1	-0.1	0.01
5	200.4	0.2	0.04	15	200.5	0.3	0.09
6	200.1	-0.1	0.01	16	199.9	-0.3	0.09
7	200.2	0	0	17	200.4	0.2	0.04
8	200.0	-0.2	0.04	18	200.5	0.3	0.09
9	199.9	-0.3	0.09	19	199.8	-0.4	0.16
10	200.0	-0.2	0.04	20	200.2	0	0
				합계	4004.00	0	1.92

평균(Mean): $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{20} x_i = \frac{1}{20}(4004.0) = 200.2$

분산(Variance): $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{19}(1.92) = 0.010105$

표준편차(Standard Deviation): $s = \sqrt{0.010105} = 0.3179$

평균의 표준오차(Standard Error of mean): $D(\bar{x}) = \frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{0.3179}{\sqrt{20}} = 0.0711$

자유도(Degree of Freedom): $\phi = n - 1 = 19$

유의수준(Significant Level): $\alpha = 0.05$

양측검정 기각역의 t 값: $t(\phi, \frac{\alpha}{2}) = t(19, 0.025) = 2.093$

검정통계량(Test Ststic): $T = \frac{\bar{x} - \mu}{s/\sqrt{n}} = \frac{200.2 - 200}{0.0711} = 2.814$

***T* 검정 값에 의한 결론**: 검정통계량 $T = 2.814$은 기각역 $t(19, 0.025) = 2.093$보다 크다. 즉 $T > t(19, 0.025)$

따라서 T는 기각역에 있으므로 귀무가설 H_o($\mu = 200$ ml)은 기각되고 $H_1(\mu \neq 200\,\text{ml})$이 채택된다. 즉 평균용량은 95% 신뢰수준으로 200 ml가 아니다.

※ t-분포:http://www.statdistributions.com/t/

(1) $t(\phi, \frac{\alpha}{2}) = t(19, 0.025)$의 t 임계값 구하기.

(a) [p-value] box에 0.05 입력.

(b) [d.f.]box에 19 입력. d.f.: degree of freedom.

(c) [two tails]를 선택.

[t-value] box에서 2.093을 얻을 것이다.

(2) **검정 값** $T = 2.814$ 의 확률(유의확률)구하기

(a) [t-value] box에 2.814 입력.

(b) [d.f.]box에 19 입력.

(c) [two tails]를 선택.

[p-value] box에 0.011이 나온 것을 확인할 수 있다. 이것이 유의확률이다.

유의 확률에 의한 가설검정

유의확률 0.011은 유의수준 $\alpha = 0.05$ 보다 작기 때문에 H_o 가 기각되고 H_1 이 채택된다. 즉 평균용량은 200 ml 가 아니다.

모수 μ **의 범위**: $\bar{x} - t(\phi, \frac{\alpha}{2})(\frac{s}{\sqrt{n}}) \le \mu \le \bar{x} + t(\phi, \frac{\alpha}{2})(\frac{s}{\sqrt{n}})$

$$200.2 - (2.093)(0.0711) \le \mu \le 200.2 - (2.093)(0.0711)$$

$$\therefore 200.051 \le \mu \le 200.349$$

SPSS 통계처리[9_3_용량.sav]

분석>평균비교>일표본T검정

보조창이 뜨면 변수 [용량]을**검정변수**로 이동.**검정값**에 200 을 쳐 넣고,**옵션**을 눌러 신뢰구간을 95%로 한다. **계속>확인**

T-검정 결과

일표본통계량

	N	평균	표준편차	평균의표준오차
용량	20	200.200	.3179	.0711

일표본검정

	검정값 = 200					
					차이의 95% 신뢰구간	
	T	자유도	유의확률 (양쪽)	평균차	하한	상한
용량	2.814	19	.011	.2000	.051	.349

※ **모수** μ **의 범위**: 차이의 95% 신뢰구간 하한과 상한을 검정기준값 200 에 합하면 된다.

$\therefore 200.051 \le \mu \le 200.349$

※ SPSS에서 얻은 모든 값들은 위의 이론으로부터 계산된 값들과 완전히 일치함을 확인할 수 있다.

9.3 단일표본 모분산에 대한 가설검정

모집단의 평균과 분산이 각각 μ, σ^2인 정규모집단 $N(\mu,\sigma^2)$에서 μ, σ^2가 미지인 경우 모분산 σ^2에 대한 가설검정은 점추정량인 s^2을 이용하여 검정한다.

<통계적 가설검정의 절차>

(1) 귀무가설(영가설) H_o: $\sigma^2 = \sigma_o^2$

(2) 대립가설(연구가설) H_1: $\sigma^2 \neq \sigma_o^2$(양쪽검정), 또는 $\sigma^2 > \sigma_o^2$(우측검정), $\sigma^2 < \sigma_o^2$(좌측검정)

(3) 자유도: $\phi = n-1$

(4) 검정통계량: $\chi^2 = \dfrac{\phi s^2}{\sigma_o^2} = \dfrac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{\sigma_o^2}$

(5) 표본크기 n과 유의수준 α 결정

(6) 기각역: $\chi^2 \ge \chi^2(\phi, \frac{\alpha}{2})$ 또는 $\chi^2 \le \chi^2(\phi, 1-\frac{\alpha}{2})$

$\chi^2 \ge \chi^2(\phi, \alpha)$ 또는 $\chi^2 \le \chi^2(\phi, 1-\alpha)$

(7) 통계적 결정: 검정통계량이 기각역에 포함되면 귀무가설(영가설)을 기각한다.

가설에 따른 기각역

귀무가설	대립가설	유의수준 α인 기각역
H_o: $\sigma = \sigma_o$	H_1: $\sigma \neq \sigma_o$	$\chi^2 \ge \chi^2(\phi, \frac{\alpha}{2})$ 또는 $\chi^2 \le \chi^2(\phi, 1-\frac{\alpha}{2})$
H_o: $\sigma \le \sigma_o$	H_1: $\sigma > \sigma_o$	$\chi^2 \ge \chi^2(\phi, \alpha)$
H_o: $\sigma \ge \sigma_o$,	H_1: $\sigma < \sigma_o$	$\chi^2 \ge \chi^2(\phi, 1-\alpha)$

[보기 9_4] 어느 전구회사의 생산 전구제품의 수명은 분산이 120시간인 정규분포를 따른다. 새로운 공정설계에 의하여 일부를 변경하고 이 공정에서 생산된 제품 30개를 추출하여 분산을 조사하니 105시간이었다. 공정을 변경하므로 제품수명의 변동이 적어지는지 유의수준 $\alpha = 0.05$수준에서 검정하라.

(풀이) (1) 귀무(영)가설 H_o: $\sigma^2 = 120$, 대립(연구)가설 H_1: $\sigma^2 < 120$

(2) 자유도: $\phi = n-1 = 30-1 = 29$

(3) 검정통계량: $\chi^2 = \dfrac{\phi s^2}{\sigma^2} = \dfrac{(29)(105)}{120} = 23.375$

(4) 기각역: $\chi^2 \le \chi^2(\phi, 1-\alpha) = \chi^2(29, 0.95) = 17.71$

(5) 검정결과: $\chi^2 = 25.375 > \chi^2(29, 0.95) = 17.71$이므로 H_o를 기각할 수 없고 채택된다. 즉 새로운 공정을 변경하더라도 제품수명의 변동은 적어지지 않는다.

※ χ^2-**분포: http://www.statdistributions.com/chisquare/**

$\chi^2(\phi, 1-\alpha) = \chi^2(29, 0.95)$의 값.

(a) [p-value] box에 0.95

(b) [d.f.] box에 29 입력

(c) right tail 선택

[χ^2 value] box에서 $\chi^2_{0.95} = 17.71$을 얻을 것이다.

(컴퓨터가 이것을 계산하는 데 심한 load가 걸림)

9.4두 모분산의 비에 대한 가설검정: F-분포 검정

모평균과 모분산을 모르는 경우 두 정규모집단에서 각각 표본크기가 n_1, n_2이며, 표본분산이 s_1^2, s_2^2이라고 하면 두 모분산의 비 σ_1^2/σ_2^2에 대한 가설검정의 방법은 다음과 같다.

<통계적 가설검정의 절차>

(1) 귀무(영)가설 H_o: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$

(2) 대립가설 H_1: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ or $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$ or $\sigma_1^2 < \sigma_2^2$

(3) 검정통계량: $F = \dfrac{s_1^2}{s_2^2}$

(4) 표본크기 n_1, n_2와 유의수준 α를 결정.

(5) 자유도 $\phi_1 = n - 1$, $\phi_2 = n_2 - 1$인 F 검정통계량에 대한 기각역

가설에 따른 기각역

귀무가설	대립가설	유의수준 α의 기각역
H_o: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$,	H_1: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$	$F \geq F(\phi_1, \phi_2; \frac{\alpha}{2})$ or $F \leq F(\phi_1, \phi_2; 1 - \frac{\alpha}{2})$
H_o: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$	H_1: $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$	$F \geq F(\phi_1, \phi_2; \alpha)$
H_o: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$	H_1: $\sigma_1^2 < \sigma_2^2$	$F \leq F(\phi_1, \phi_2; \alpha)$

[보기 9_5] 어떤 음료회사에서 최근 1ℓ 병의 내용물이 외관상 두 공장에서 변동이 있다고 판단되어 각 공장에서 임의로 20 병씩 추출하여 측정한 결과 제 1 공장의 평균과 분산은 각각 $\bar{x}_1 = 1013.5$, $s_1^2 = 39.0$, 제 2 공장의 평균과 분산은 $\bar{x}_2 = 1009.7$, $s_2^2 = 26.12$ 였다. 내용물의 변동에 차이가 있다고 말할 수 있는지, 유의수준 $\alpha = 0.05$에서 검정하라.

(풀이) (1) H_o: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$　　　H_1: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

(2) 검정통계량: $F = \dfrac{s_1^2}{s_2^2} = \dfrac{39.0}{26.12} = 1.4931$

(3) $n_1 = 20$, $n_2 = 20$, 유의수준 $\alpha = 0.05$

(4) 자유도 $\phi_1 = n - 1 = 20 - 1 = 19$, $\phi_2 = n_2 - 1 = 20 - 1 = 19$

(5) $F(19,19;0.025) = 2.527$

(6) 기각역: $F \geq F(19,19;0.025)$

$F = 1.4931 < F(19,19;0.025) = 2.527$ 이므로 H_o, 즉 등분산이 채택된다. 두 공장의 내용물에 변동에 대한 차이는 없다.

※ F −분포:**http://www.statdistributions.com/f/**

$F(\phi_1, \phi_2; \frac{\alpha}{2}) = F(19,19;0.025)$ 의 F 임계값 구하기.

(a) [p-value] box에 0.025 입력.

(b)[numerator d.f.]box에 19 입력. d.f.: degree of freedom.

(c) [denominator d.f.]box에 19 입력.

(c)[right tail]을 선택.

[F-value] box에서 2.527 을 얻을 것이다.

9.5 Levene's Test: 분산의 동질성(Equality of variances) 검정

통계학에서 두 개 이상의 모수(평균, 표준편차, 상관계수 등등) 비교는 데이터들이 등분산이라는 가정하에 이루어진다. 이때 등분산이라는 가설과 이것을 검정하는 검정통계량은 다음과 같다.

귀무(영)가설 H_0: $\sigma_1 = \sigma_2 = \cdots = \sigma_k$ (k 개의 집단에 대한 분산이 동일하다).

대립(연구)가설 H_1: $\sigma_i \neq \sigma_r$ (k 개중 하나라도 다른 분산이 존재한다).

Levene의 등분산 검정통계량 F_L: $F_L = \dfrac{(N-k)\sum_{i=1}^{k} n_i(\bar{z}_i - \bar{z})^2}{(k-1)\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(z_{ij} - \bar{z}_i)^2}$

k: 시료group의 수(수준 수)

n_i: i 번째 group에 속한 표본의 수

N: 총 표본 수($N = \sum_{i=1}^{k} n_i$: k 에 속한 표본 수들이 모두 n 으로 같다면 $N = kn$).

z_{ij}: i 번째 group에 속한 j 번째 표본 z_{ij} 는 원본의 분포 y_{ij} 로부터 다음의 방법에 의해 만들어지는 표본임을 명심하라.

$$z_{ij} = \begin{cases} |y_{ij} - \bar{y}_i|, & \bar{y}_i : i \text{ 번째 group(수준)의 평균(mean)} \\ |y_{ij} - y_i|, & y_i : i \text{ 번째 group(수준)의 중앙값(median)} \end{cases}$$

한 자료에서 중앙 값을 뺀 절대치의 두 번째 계산법은 Brown-Forsythe test에 사용된다.

$\bar{z} = \dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i} z_{ij}$: 모든 y_{ij} 의 평균.

$\bar{z}_i = \dfrac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i} z_{ij}$: group$i$에 대한 z_{ij} 의 평균.

통계량 F_L 의 검정은 $F(k-1,\ N-k;\ \alpha)$ 로 결정한다. 여기서 $F_L \geq F(k-1, N-k; \alpha)$ 이면 H_0 즉 등분산이 기각된다.

9.6두 모평균 차에 대한 가설검정: 독립표본 T검정

독립표본 t**-검정**: 한 변수 내에서 독립인 두 집단의 평균비교.

9.6.1 표본의 크기가 작은 경우

1) 모 분산 σ_1^2, σ_2^2을 알고 있는 경우

<통계적 가설검정의 절차>

(1) 귀무가설 H_o: $\mu_1 - \mu_2 = \delta_o$

(2) 대립가설 H_1: $\mu_1 - \mu_2 > \delta_o \text{ or } \mu_1 - \mu_2 < \delta_o \text{ or } \mu_1 - \mu_2 \neq \delta_o$

(3) 검정 통계량: $Z = \dfrac{(\bar{x} - \bar{y}) - \delta_o}{\sqrt{(\sigma_1^2 / n_1) + (\sigma_2^2 / n_2)}}$

(4) 유의수준 α를 결정

(5) 기각역: $|Z| \geq z_{\alpha/2} \text{ or } Z \geq z_\alpha \text{ or } Z \leq -z_\alpha$

(6) 검정 결과: 검정통계량이 기각역에 포함되면 귀무가설 H_o를 기각하고 아니면 채택.

가설에 따른 기각역

귀무가설	대립가설	유의수준 α인 기각역
H_o: $\mu_1 - \mu_2 = \delta_o$	H_1: $\mu_1 - \mu_2 \neq \delta_o$	$\lvert Z \rvert \geq z_{\alpha/2}$
H_o: $\mu_1 - \mu_2 \leq \delta_o$	H_1: $\mu_1 - \mu_2 > \delta_o$	$Z \geq z_\alpha$
H_o: $\mu_1 - \mu_2 \geq \delta_o$	H_1: $\mu_1 - \mu_2 < \delta_o$	$Z \leq -z_\alpha$

[보기9_6] 표준편차가 $\sigma_1 = 4.8$, $\sigma_2 = 3.1$인 두 개의 정규모집단에서 각각 임의로 표본크기 $n_1 = 16$, $n_2 = 25$를 추출하여 표본평균을 구하니 각각 $\bar{x}_1 = 78$, $\bar{x}_2 = 70$이었다. 두 모평균이 같은지 유의수준 $\alpha = 0.05$에서 검정하라.

(풀이) 귀무가설 H_o의 증명: $\mu_1 - \mu_2 = \delta_o = 0$

유의수준이 $\alpha = 0.05$이므로 기각역은 $|Z| \geq z_{\alpha/2} = 1.96$까지가 신뢰수준 95%이다.

검정통계량: $Z = \dfrac{(\bar{x} - \bar{y}) - \delta_o}{\sqrt{(\sigma_1^2 / n_1) + (\sigma_2^2 / n_2)}} = \dfrac{(78 - 70) - 0}{\sqrt{(4.8^2 / 16) + (3.1^2 / 25)}} = 5.9229$

$Z \geq z_{\alpha/2} = 1.96$이므로 H_o가 기각된다. 즉 두 모집단의 모평균은 같지 않다.

2) 두 모분산 σ_1^2, σ_2^2을 모르는 경우

두 모집단은 정규분포를 따르고 또한 동일한 모분산 σ^2을 갖는다고 가정하고 두 모평균의 차 $\mu_1 - \mu_2$에 대한 가설검정을 한다.

<통계적 가설검정의 절차>

(1) 귀무(영)가설 H_o: $\mu_1 - \mu_2 = \delta_o$

(2) 대립(연구)가설 H_1: $\mu_1-\mu_2 \neq \delta_o$(양측검정), $\mu_1-\mu_2 < \delta_o$(좌측검정), $\mu_1-\mu_2 > \delta_o$(우측검정)

(3) 표본의 크기 n_1, n_2와 유의수준 α를 결정

(4) 자유도: $\phi = n_1+n_2-2$, $\phi_1 = n_1-1$, $\phi_2 = n_2-1$

(5) 두 자료에 의한 표준편차 s_p: $s_p = \sqrt{\dfrac{\phi_1 s_1^2+\phi_2 s_2^2}{\phi}}$

(6) 검정통계량: $T = \dfrac{(\bar{x}-\bar{y})-\delta_o}{s_p\sqrt{(1/n_1)+(1/n_2)}}$

(7) 기각역: $|T| \geq t(\phi, \dfrac{\alpha}{2})$ or $T \geq t(\phi,\alpha)$ or $T \leq -t(\phi,\alpha)$

(8) 검정결과: 검정통계량이 기각역에 포함되면 귀무(영)가설 H_o를 기각하고 아니면 채택한다.

가설에 따른 기각역

귀무가설	대립가설	유의수준 α인 기각역
H_o: $\mu_1-\mu_2 = \delta_o$	H_1: $\mu_1-\mu_2 \neq \delta_o$	$\lvert T\rvert \geq t(\phi, \dfrac{\alpha}{2})$
H_o: $\mu_1-\mu_2 \leq \delta_o$	H_1: $\mu_1-\mu_2 > \delta_o$	$T \geq t(\phi,\alpha)$
H_o: $\mu_1-\mu_2 \geq \delta_o$	H_1: $\mu_1-\mu_2 < \delta_o$	$T \leq -t(\phi,\alpha)$

[보기9_7] 독립인 두 정규모집단에서 추출한 자료는 다음과 같다.

$n_1 = 11$, $\bar{x}_1 = 75$, $s_1 = 6.1$

$n_2 = 14$, $\bar{x}_2 = 60$, $s_2 = 5.3$

모분산이 동일하다는 가정하에 두 모평균이 같은지 유의수준 $\alpha = 0.05$에서 검정하라.

(풀이) 귀무가설의 증명

(1) 귀무(영)가설 H_o: $\mu_1-\mu_2 = \delta_o = 0$

(2) 대립(연구)가설 H_1: $\mu_1-\mu_2 \neq \delta_o$(양쪽검정)

(3) $n_1 = 11$, $n_2 = 14$, $\alpha = 0.05$

(4) 자유도: $\phi = n_1+n_2-2 = 11+14-2 = 23$, $\phi_1 = n_1-1 = 11-1 = 10$, $\phi_2 = n_2-1 = 14-1 = 13$

(5) 표준편차 s_p: $s_p = \sqrt{\dfrac{\phi_1 s_1^2+\phi_2 s_2^2}{\phi}} = \sqrt{\dfrac{(10)(6.1)^2+(13)(5.3)^2}{23}} = 5.6617$

(6) 검정통계량 T: $T = \dfrac{(\bar{x}-\bar{y})-\delta_o}{s_p\sqrt{(1/n_1)+(1/n_2)}} = \dfrac{(75-60)-0}{(5.6617)\sqrt{(1/11)+(1/14)}} = 6.574$

(7) $\alpha = 0.05$일 때 양쪽검정의 t값: $t(\phi, \dfrac{\alpha}{2}) = t(23, 0.025) = 2.069$

(8) 검정결과: $T = 6.574 > t(23, 0.025) = 2.069$이므로 검정통계량 T가 기각역에 포함된다. 따라서 귀무(영)가설 H_o는 기각되고 대립(연구)가설 H_1이 채택된다. 즉 95%신뢰수준에서 두 평균은

같지 않다.즉 $\bar{x}_1 = 75$와 $\bar{x}_2 = 60$의 평균 차이는 확률적으로 의미가 있다는 것이다.

※ t-분포:http://www.statdistributions.com/t/

(1) $t(\phi, \frac{\alpha}{2}) = t(23, 0.025)$의 t 임계값 구하기.

(a) [p-value] box에 0.05 입력.

(b) [d.f.]box에 23 입력. d.f.: degree of freedom.

(c) [two tails]를 선택.

[t-value] box에서 2.069를 얻을 것이다.

SPSS독립표본 T검정 1

[보기9_8]전국 점포망을 가진 한 제과회사가 두 색상의 쿠키제품에 대한 판매량을 평가하고자 한다.쿠키의 월간매출이 유사한 20개 점포를 선정하고, 이들 점포를 무작위로 10개 점포씩 두 개의 집단으로 나눈 다음, 한 집단에는 적색포장, 다른 집단에는 청색포장만을 진열하였다. 2주 동안에 점포별 판매량을 조사한 결과는 다음 표와 같다.색상에 따른 판매량이 차이가 있는지 유의수준 $\alpha = 0.05$에서 검정하라.

[표 9-3] 점포별 쿠키 판매량

적색포장(a)		청색포장(b)	
1	70	11	60
2	68	12	65
3	82	13	55
4	78	14	58
5	72	15	67
6	68	16	59
7	67	17	61
8	68	18	68
9	88	19	77
10	60	20	66

(풀이)우선 통계량을 직접 계산하고 SPSS로 처리한 값과 비교하자. SPSS 통계분석을 이해하려면 이러한 이론계산의 방법을 익히는 것이필요하다.

이론에의한통계량계산: SPSS 통계처리에 이용되는 값들을 계산하기 위하여 표를 작성한다. 통계량에서 적색은a,청색은b로 나타내도록 하자. 그리고 다른 통계량들은 a(적색포장)와b(청색포장)에 대해서 각각 아래첨자 1과 2를 사용하도록 한다. 예를 들면 평균과 분산은 청색포장에 대해서 μ_1, s_1그리고 적색포장에 대해서 μ_2, s_2로 각각 표기하자.

[표 9-4] 쿠키 판매량 통계계산용 표 (여기서 아래첨자 l은 $l=1,2,\cdots,10$)

적색포장(a)					청색포장(b)				
id	a_l	$a_l-\bar{a}$	$\lvert a_l-\bar{a}\rvert$	$(a_l-\bar{a})^2$	id	b_l	$b_l-\bar{b}$	$\lvert b_l-\bar{b}\rvert$	$(b-\bar{b})^2$
1	70	−2.1	2.1	4.41	11	60	−3.6	3.6	12.96
2	68	−4.1	4.1	16.81	12	65	1.4	1.4	1.96
3	82	9.9	9.9	98.01	13	55	−8.6	8.6	73.96
4	78	5.9	5.9	34.81	14	58	−5.6	5.6	31.36
5	72	−0.1	0.1	0.01	15	67	3.4	3.4	11.56
6	68	−4.1	4.1	16.81	16	59	−4.6	4.6	21.16
7	67	−5.1	5.1	26.01	17	61	−2.6	2.6	6.76
8	68	−4.1	4.1	16.81	18	68	4.4	4.4	19.36
9	88	15.9	15.9	252.81	19	77	13.4	13.4	179.56
10	60	−12.1	12.1	146.41	20	66	2.4	2.4	5.76
합계	721	0	63.4	612.90	합계	636	0	50.0	364.40
평균	$\bar{a}=72.1$					$\bar{b}=63.6$			

1. 집단통계량

(1) 평균(Mean) 계산식

적색(a): $\bar{a}=\frac{1}{n_1}\sum_{l=1}^{10}a_l=\frac{1}{10}(721)=72.10$

청색(b): $\bar{b}=\frac{1}{n_2}\sum_{l=1}^{10}b_l=\frac{1}{10}(636)=63.60$

(2) 평균차: $\bar{d}=\bar{a}-\bar{b}=72.10-63.60=8.50$

(3) 수준별(적색과 청색) 자유도(Degree of Freedom)

총자유도: $\phi=n_1+n_2-2=10+10-2=18$

적색(a): $\phi_1=n_1-1=10-1=9$

청색(b): $\phi_2=n_2-1=10-1=9$

(4) 분산(Variation)

적색(a): $s_1^2=\frac{1}{\phi_1}\sum_{l=1}^{10}(a_l-\bar{a})^2=\frac{1}{9}(612.90)=68.10$

청색(b): $s_2^2=\frac{1}{\phi_2}\sum_{l=1}^{10}(b_l-\bar{b})^2=\frac{1}{9}(364.40)=40.489$

(5) 표준편차(Standard Deviation)

적색(a): $s_1=\sqrt{68.10}=8.252$

청색(b): $s_2 = \sqrt{40.489} = 6.363$

(6) 평균의 표준오차(Standard Error of Mean)

적색(a): $D_1 = \dfrac{s_1}{\sqrt{n_1}} = \dfrac{8.252}{\sqrt{10}} = 2.610$

청색(b): $D_2 = \dfrac{s_2}{\sqrt{n_2}} \dfrac{6.363}{\sqrt{10}} = 2.012$

(7) 평균편차(Mean Deviation)

적색(a): $MD_1 = \dfrac{1}{n_1}\sum_{l=1}^{10} | a_l - \bar{a} | = \dfrac{1}{10}(63.4) = 6.34$

청색(b): $MD_2 = \dfrac{1}{n_2}\sum_{l=1}^{10} | b_l - \bar{b} | = \dfrac{1}{10}(50.0) = 5.00$

2Levene's Test(등분산)에 대한 검정

통계학에서 group 수(수준 수)가두 개 이상인 모수(평균, 표준편차, 상관계수 등등)의 비교는 group간의 데이터들이 등분산이라는 가정하에 이루어진다. 이때 등분산의 검정은Levene의 등분산 검정통계량을 사용한다. 여기서는 적색과 청색 두 group이므로 가설을 다음과 같이 놓고 둘이 등분산인지를 sample을 통해 점검한다.

귀무(영)가설 H_0: $\sigma_1 = \sigma_2$(적색과 청색인 2개의 집단에 대한 분산이 등분산이다).

대립(연구)가설 H_1: $\sigma_1 \neq \sigma_2$(적과 청색의 분산이 다르다).

Levene의 등분산 검정 통계량 F_L: $F_L = \dfrac{(N-k)\sum_{i=1}^{k} n_i(\bar{z}_i - \bar{z})^2}{(k-1)\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(z_{ij} - \bar{z}_i)^2}$

각 인자는 다음을 나타낸다.

k: 시료group(수준)의 수, 여기서 k는청색과 적색으로 $k = 2$개.

n_i: i번째 group(수준)에 속한 표본의 수, 여기서 청색은$n_1 = 10$, 적색은 $n_2 = 10$으로 같다.

N: 총 표본 수($N = \sum_{i=1}^{k} n_i$: 여기서 $N = 20$)

z_{ij}: i번째group에 속한 j번째 표본. z_{ij}는 원본의 표본 y_{ij}로부터 다음의 방법에 의해 만들어지는 표본임을 명심하라. 여기서 $i = 1, 2$ (1은 적색, 2는 청색) $j = 1, 2, \cdots, 20$.

$z_{ij} = | y_{ij} - \bar{y}_i |$

$\bar{y}_i$: 원본 데이터의 i 번째 group의 평균.

※[표 9-3]의 쿠기판매량 데이터의 경우 y_{ij}와 $\bar{y}_i$는 각각 다음에 해당한다.

$y_{1j} = a_j$, $y_{2j} = b_j$ 그리고 $\bar{y}_1 = \bar{a}$, $\bar{y}_2 = \bar{b}$

$\bar{z} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i} z_{ij}$: 모든 z_{ij} 에 대한 평균(N 은 적색 10개, 청색 10개로 $N = 20$ 이다).

$\bar{z}_i = \frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i} z_{ij}$: Group$i$에속한 z_{ij} 에 대한 평균.

[표 9-5] 원본 y_{ij} 데이터로부터 만든 $z_{ij} = | y_{ij} - \bar{y}_i |$ 의 표.

id	$z_{1j} = \|a_j - \bar{a}\|$	$(z_{1j} - \bar{z}_1)^2$	id	$z_{2j} = \|b_j - \bar{b}\|$	$(z_{2j} - \bar{z}_2)^2$	합(z_{ij})	평균
1	2.1	17.9776	11	3.6	1.96		
2	4.1	5.0176	12	1.4	12.96		
3	9.9	12.6736	13	8.6	12.96		
4	5.9	0.1936	14	5.6	0.36		
5	0.1	38.9376	15	3.4	2.56		
6	4.1	5.0176	16	4.6	0.16		
7	5.1	1.5376	17	2.6	5.76		
8	4.1	5.0176	18	4.4	0.36		
9	15.9	91.3936	19	13.4	70.56		
10	12.1	33.1776	20	2.4	6.76		
합계	63.4	210.944	합계	50.0	114.4	325.344	
평균	$\bar{z}_1 = 6.34$			$\bar{z}_2 = 5.0$			$\bar{z} = 5.67$

등분산 검정통계량 F_L 의 검정은 $F(k-1,\ N-k;\ \alpha)$ 로 결정한다.

여기서 $F_L \geq F(1,18,0.05)$ 이면 H_0, 즉 등분산이 기각된다.

$$F_L = \frac{(N-k)\sum_{i=1}^{k} n_i(\bar{z}_i - \bar{z})^2}{(k-1)\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(z_{ij} - \bar{z}_i)^2}$$

대입할 계산 값들

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(z_{ij} - \bar{z}_i)^2 = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{20}(z_{ij} - \bar{z}_i)^2 = 325.344$$

$$\sum_{i=1}^{k} n_i(\bar{z}_i - \bar{z})^2 = 10(6.34 - 5.67)^2 + 10(5.0 - 5.67)^2 = 8.978$$

$$F_L = \frac{(N-k)\sum_{i=1}^{k} n_i(\bar{z}_i - \bar{z})^2}{(k-1)\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(z_{ij} - \bar{z}_i)^2} = \frac{(20-2)(8.978)}{(2-1)(325.344)} = 0.4967$$

$F(1,18,005) = 4.41$

※ F −분포:**http://www.statdistributions.com/f/**

$F(\phi_1, \phi_2; \alpha) = F(1,18;\ 0.05)$ 의 값과 F_L 의 확률(유의확률).

(1) $F(\phi_1, \phi_2; \alpha) = F(1,18;\ 0.05)$ 의 값

(a) [p-value] box에 0.05 입력.

(b)[numerator d.f.]box에 1 입력.

(c) [denominator d.f.]box에 18 입력.

(d)[right tail]을 선택.

[F-value] box에서 4.41을 얻을 것이다.

(2) $F_L = 0.497$ 의 확률(유의확률). 계산

(a) [F-value] box에 0.497 입력.

(b)[numerator d.f.]box에 1 입력.

(c) [denominator d.f.]box에 18 입력.

(d)[right tail]을 선택.

[p-value] box에서 0.494 를 얻을 것이다.

Levene's Test(등분산) 검정결과: $F_L = 0.497 < F(1,18;\ 0.05) = 4.41$ 이므로 적색과 청색은 등분산이다. 또한 유의확률 $P(F_L = 0.497) = 0.494$ 는 유의수준 $\alpha = 0.05$ 보다 크기 때문에 귀무(영)가설 H_o(적색과 청색인 2개의 집단에 대한 분산이 등분산)가 채택된다. 등분산이 채택되면 평균을 비교할 수 있다.

3. 평균의 T검정에 필요한 계산과 절차

(1) 귀무(영)가설 H_o: $\mu_1 - \mu_2 = \delta_o = 0$

(2) 대립(연구)가설 H_1: $\mu_1 - \mu_2 \neq \delta_o$ (양쪽검정)

(3) $n_1 = 10$, $n_2 = 10$, $\alpha = 0.05$

(4) 차이의 표준편차 s_p: $s_p = \sqrt{\dfrac{\phi_1 s_1^2 + \phi_2 s_2^2}{\phi}} = \sqrt{\dfrac{(9)(68.1) + (9)(40.49)}{18}} = 7.3685$

(5) 검정통계량 T: $T = \dfrac{(\bar{x} - \bar{y}) - \delta_o}{s_p \sqrt{(1/n_1) + (1/n_2)}} = \dfrac{(72.10 - 63.60) - 0}{(7.3685)\sqrt{(1/10) + (1/10)}} = 2.5794$

(6) $\alpha = 0.05$ 일 때 양쪽검정의 t 값: $t(\phi, \dfrac{\alpha}{2}) = t(18, 0.025) = 2.1009$

※ t −분포:**http://www.statdistributions.com/t/**

(1) $t(\phi, \dfrac{\alpha}{2}) = t(18, 0.025)$ 값 구하기.

(a) [p-value] box에 0.05 입력.

(b) [d.f.]box에 18 입력.

(c) [two tails]를 선택.

[t-value] box에서 2.101을 얻을 것이다.

(2) 검정통계량 $T = 2.5794$의 확률(유의확률) 계산

(a) [t-value] box에 2.5794 입력.

(b) [d.f.]box에 18 입력.

(c) [two tails]를 선택.

[p-value] box에서 0.019를 얻을 것이다.

I. 검정통계량에 의한 검정결과: $T = 2.5794 > t(18, 0.025) = 2.1009$ 이므로 검정통계량 T가 기각역에 포함된다. 따라서 귀무(영)가설 H_o는 기각되고 대립(연구)가설 H_1이 채택된다. 즉 95% 신뢰수준에서 두 평균은 같지 않다.

II. 유의확률에 의한 검정결과:유의확률(양쪽) 0.019는 유의수준 $\alpha = 0.05$보다 작으므로 귀무(영)가설 H_o가 기각되고 대립(연구)가설 H_1이 채택된다. 따라서 판매는 색상에 따라 차이가 있다. 다른말로 하면 신뢰수준 95%로 평균차 $\bar{a} - \bar{b} = 8.50$은 유의미하다.

4. 신뢰구간

평균차($\mu_1 - \mu_2 = \delta$)가 가질 수 있는 값의 범위

$$-t(\phi, \frac{\alpha}{2}) \le T = \frac{(\bar{x} - \bar{y}) - \delta}{s_p \sqrt{(1/n_1) + (1/n_2)}} \le t(\phi, \frac{\alpha}{2})$$

분모 수식을 다음과 같이 놓자: $\frac{1}{\sqrt{n}} \equiv \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} = \sqrt{\frac{1}{10} + \frac{1}{10}} = \sqrt{0.2} = 0.4472$

차이의 표준오차(Standard Error): $D = \frac{s_p}{\sqrt{n}} = (7.3685)(0.4472) = 3.2953$

$\bar{d} = \bar{x} - \bar{y}$라 하고 위의 구간식을 다시 쓰면

$$-t(\phi, \frac{\alpha}{2}) \le \frac{\bar{d} - \delta}{s_p / \sqrt{n}} \le t(\phi, \frac{\alpha}{2}) \quad \rightarrow \quad \bar{d} - t(\phi, \frac{\alpha}{2})(\frac{s_p}{\sqrt{n}}) \le \delta \le \bar{d} + t(\phi, \frac{\alpha}{2})(\frac{s_p}{\sqrt{n}})$$

$$\bar{d} - t(18, 0.025)(\frac{s_p}{\sqrt{n}}) \le \delta \le \bar{d} + t(18, 0.025)(\frac{s_p}{\sqrt{n}})$$

다음 값을 대입: $\bar{d} = \bar{x} - \bar{y} = 8.50$, $\phi = 18$, $\alpha = 0.05$, $t(\phi, \frac{\alpha}{2}) = t(18, 0.025) = 2.1009$

$\delta = \mu_1 - \mu_2$의 범위: $(8.50) - (2.1009)(3.2953) \le \delta \le (8.50) + (2.1009)(3.2953)$

$\therefore\ 1.5769 \le \mu_1 - \mu_2 \le 15.4231$

SPSS 통계처리[9_8_쿠키색상.sav]

(1) **분석>평균비교>독립표본 T검정(T)…**

독립표본 검정 보조창이 뜨면 변수 [판매량]을 **검정변수**로, 변수 [포장색상]을 **집단변수**로 이동

(2)**집단정의** 단추를 클릭

집단정의 보조창이 뜨면 **지정값 사용**을 선택하고 집단1과 집단 2의 란에 각각

집단 1: 1,　　집단 2: 2

를 쳐 넣고 **계속**

(3) **옵션**을 눌러 **신뢰구간**에 95%를(유의수준 $\alpha = 0.05$에 해당)입력한 후**계속>확인**

T-검정 결과

집단통계량

	포장색상	N	평균	표준편차	평균의 표준오차
판매량	적색	10	72.10	8.252	2.610
	청색	10	63.60	6.363	2.012

독립표본 검정

		Levene의 등분산 검정		평균의 동일성에 대한 t-검정						
		F	유의확률	t	자유도	유의확률(양쪽)	평균차	차이의 표준오차	차이의 95% 신뢰구간 하한	차이의 95% 신뢰구간 상한
판매량	등분산이 가정됨	.497	.490	2.579	18	.019	8.500	3.295	1.577	15.42
	등분산이 가정되지 않음			2.579	16.907	.020	8.500	3.295	1.545	15.46

분석: 20개 점포의 2주간 판매의 경우 적색평균이 72.10,청색평균이 63.60이다. 따라서 적색평균이 청색평균 보다8.5개 많다. 한편표준편차를 보면 적색의 변동폭이 청색보다 더 크다.

이 통계는 회사기준에서 자사 제품에 대한 평가를 얻기 위한 것이므로 확장하여 자사 제품에 대한 고객의 평가(모수 평균에 대한 평가)로 생각된다. 이것은 단지 표본추출에 따른 결과이기 때문에 색상 별로 차이가 얼만큼 커야 모집단의 경우 색상에 따른 판매차이가 있다고 결론을 내릴 수 있는지는 독립표본의 내용을 분석해야만 알 수 있다.

(1) 통계의 신뢰구간은 95%이므로 따라서 유의수준은 $\alpha = 0.05$이다.

(2) 이 검정은 우선 두 집단의 모분산이 같은지 다른지를 검증하는 Levene의 등분산 검정을 하였고 유의확률은 0.490이므로 0.05보다는 크기 때문에 귀무(영)가설이 채택되어 두 모집단은 등분산이다.이 근거에 의해 “등분산이 가정됨” 행에 해당하는 값이 채택되어 분석된다.

(3) 평균의 동일성에 의한 t-검정에서 $t = 2.579$

(4) t-검정에서 자유도 구하는 공식: $n_1 + n_2 - 2$

[적색점포 수(10)-1]+[청색점포 수(10)-1]=18

(5) 유의확률(양쪽)= 0.019 : 이 확률은 유의수준 0.05 보다 작으므로 두 색상의 판매평균이 같다는 귀무(영)가설이 거부되고 평균이 다르다는 대립(연구)가설이 채택된다. 즉 적색평균이 청색평균보다 8.5 개 많다는 것은 의미가 있으며 고객은 적색을 더 좋아한다고 결론을 내릴 수 있다.
다른 말로 하면 가설검정 H_1 을 택하는 신뢰수준이 95%이다.
(6) 차이의 95% 신뢰구간($\alpha = 0.05$): 확률 $P = 0.025$ (양쪽검정에 대한좌, 우의 각각의 확률)에 해당하는 t 의 하한 값(좌측 값)은 1.577 이고, 상한 값(우측 값)은 15.455 이다. 8.5 개는 이들 사이에 있는 값이다.
※ 통계분석에 나타난 값들은 앞에서 이론으로 계산한 값들과 같음을 확인할 수 있다.

9.6.2 표본의 크기가 큰 경우

두 표본 n_1, n_2 의 크기가 크고 두 모분산 σ_1^2, σ_2^2 을 모르는 경우, s_1^2, s_2^2 으로 대신하여 두 모평균의 차 $\mu_1 - \mu_2 = \delta_o$ 의 검정방법은 두 모분산을 알고 있는 경우와 동등하다.

검정통계량: $Z = \dfrac{(\bar{x} - \bar{y}) - \delta_o}{\sqrt{(s_1^2)/n_1 + (s_2^2)/n_2}}$

가설에 따른 기각역

귀무가설	대립가설	유의수준 α 인 기각역
H_o: $\mu_1 - \mu_2 = \delta_o$	H_1: $\mu_1 - \mu_2 \neq \delta_o$	$\lvert Z \rvert \geq z_{\alpha/2}$
H_o: $\mu_1 - \mu_2 \leq \delta_o$	H_1: $\mu_1 - \mu_2 > \delta_o$	$Z \geq z_\alpha$
H_o: $\mu_1 - \mu_2 \geq \delta_o$	H_1: $\mu_1 - \mu_2 < \delta_o$	$Z \leq -z_\alpha$

SPSS독립표본T검정 2[교과서 예제 1(p310)]
SPSS 통계처리[지역조사.sav]

1. 집단정의의 지정값에 의한 분석

교과서 p423에 있는 지역조사 설문지로 응답한 내용을 통계처리한다.독립변수 성별 내의 두 집단인 남녀의 연령 평균비교로,성별에 따라 연령의 평균차이가 있는지를 독립표본 T -검정을 통해 조사한다. 이 설문지에 케이스는 600 개가 넘고 남녀 수는 30 명보다 훨씬 많기때문에 표본의 크기가 큰 경우의 검정통계량이 사용된다. 즉

$$Z = \frac{(\bar{x} - \bar{y}) - \delta_o}{\sqrt{(s_1^2)/n_1 + (s_2^2)/n_2}}$$

(1) [지역조사.sav]를 open.
(2)**분석>평균비교>독립표본 T검정(T)…**
독립표본 T검정 보조창이 뜨면 변수 [연령]을 **검정변수** 란으로 이동.

변수 [성별]을 **집단변수** 란으로 이동

(3) **집단정의(D)** 단추를 클릭

집단정의 보조창이 뜨면 지정값 사용을 선택 한 후 일력 부분에 다음을 쳐 넣음.

집단 1: 1

집단 2: 2

계속. 옵션을 눌러 **신뢰구간**에 95%를 입력

※ 여기서 1은 남자,2는 여자로 지정되어 있음을 **[지역조사.sav]**의 변수보기 창에서 변수 [성별]의 **값**에 있는[···]을눌러 확인 할 수 있다.

(4) **계속>확인**

T-검정 결과

집단통계량

	성	N	평균	표준편차	평균의표준오차
연령	남자	183	43.28	14.192	1.049
	여자	423	38.47	11.390	.554

독립표본 검정

		Levene의 등분산 검정		평균의 동일성에 대한 t-검정						
									차이의 95% 신뢰구간	
		F	유의확률	t	자유도	유의확률(양쪽)	평균차	차이의 표준오차	하한	상한
연령	등분산이 가정됨	25.0	.000	4.427	604	.000	4.818	1.088	2.681	6.956
	등분산이 가정되지 않음			4.062	287.9	.000	4.818	1.186	2.483	7.153

분석: 남자의나이평균은 43.28, 여자는 38.47로 평균차가 4.82이다. 또한 표준편차를 보면 남자의 변동폭이 여자보다 더 크다.

(1) 차이의 신뢰구간은 95%이므로 따라서 유의수준은 $\alpha = 0.05$이다.

(2) 이 검정은 우선 두 집단의 모분산에 대한Levene의 등분산 검정을 하였다. 여기서 유의확률은 0.000 이므로 0.05 보다 작기 때문에 귀무(영)가설이 기각되어 두 모집단은 등분산으로 같다고 할 수 없다. 이 근거에 의해 "등분산이 가정되지 않음"에 해당하는 행이 분석된다.

(3) 평균의 동일성에 의한 t-검정에서 검정통계량 $T = 4.062$

(4) t-검정에서 자유도 구하는 공식: 287.9

(5) 유의확률(양쪽)은 0.000 : 이 확률은 유의수준 0.05 보다 작으므로 설문에 응한 남녀의 평균연령은 같다는 귀무(영)가설이 기각되고 다르다고 결론을 내린다.

(6) 신뢰수준 95%($\alpha = 0.05$)에 해당하는 $\mu_1 - \mu_2 = \delta$의 신뢰구간의 계산

$$-z_{\alpha/2} \le Z = \frac{(\bar{x}-\bar{y})-\delta}{\sqrt{(s_1^2)/n_1+(s_2^2)/n_2}} \le z_{\alpha/2}$$

$$(\bar{x}-\bar{y})-(z_{\alpha/2})\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}} \le \delta \le (\bar{x}-\bar{y})+(z_{\alpha/2})\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}}$$

여기에 다음 값들을 대입한다.

$$\bar{x}-\bar{y} = 43.28-38.47 = 4.81$$

$$z_{\alpha/2} = z_{0.025} = z_{0.975} = 1.960$$

$$\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}} = \sqrt{\frac{(14.192)^2}{183}+\frac{(11.390)^2}{423}} = 1.1863$$

범위: $4.82-(1.96)(1.1863) \le \delta \le 4.82+(1.96)(1.1863)$

$$2.483 \le \delta \le 7.153$$

$$2.483 \le \mu_1-\mu_2 \le 7.153$$

2. 집단정의의 분리점에 의한분석

집단정의 창에서 **지정값 사용** 대신 **분리점**을 선택하면 집단 값은 필요가 없고 분리하는 점의 값만 입력하면 된다. 예를 들면 고졸(변수 값 3)이하와 이상을 기준으로 t-검정을 한다면 기본 값 3을 입력하면 된다. 여기서는 [성별]을 **검정변수**로 하고 **집단변수**를 [종교]로 하여 검정을 하도록 하자. 종교의 설문은 다음과 같이 이루어져 있다.

(1) 천주교 (2)기독교 (3) 불교 (4) 없음 (5) 기타

불리점을 3으로 하여 분석하자. 즉 천주교, 기독교, 불교를 믿는 집단과 종교가 없거나 기타인 집단으로 분리하여 보는 분석이다.

(1) [지역조사.**sav**]를 open.

(2)**분석>평균비교>독립표본 T검정(T)…**

독립표본 T검정 보조창이 뜨면 변수 [성별]을 **검정변수**로 이동.

변수 [종교]를**집단변수**로 이동

(3) **집단정의(D)** 단추를 클릭

집단정의 보조창이 뜨면 분리점(C)를선택 한 후 **분리점** 입력부분에 3을 쳐 넣음.

분리점: 3

계속. 옵션을 눌러 **신뢰구간**에 95%를 입력

(4) **계속>확인**

T-검정 결과

집단통계량

종교		N	평균	표준편차	평균의표준오차
성	>= 3	319	1.67	.472	.026
	< 3	284	1.73	.447	.027

독립표본 검정

		Levene의 등분산 검정		평균의 동일성에 대한 t-검정						
									차이의 95% 신뢰구간	
		F	유의확률	t	자유도	유의확률 (양쪽)	평균차	차이의 표준오차	하한	상한
성	등분산이 가정됨	9.529	.002	-1.535	601	.125	-.058	.038	-.131	.016
	등분산이 가정되지 않음			-1.540	598.640	.124	-.058	.037	-.131	.016

집단정의 분리점 통계량 분석

남자의나이평균은 43.28, 여자는 38.47로 평균 차가 4.818이다. 또한 표준편차를 보면 남자의 변동폭이 여자보다 더 크다.

(1) 통계의 신뢰구간은 95%이므로 따라서 유의수준은 $\alpha = 0.05$이다.

(2) 이 검정은 우선 두 집단의 모분산이 같은지 다른지를 검증하는 F-검정(등분산 검정)을 하였다. 유의확률은 0.002이므로0.05보다 작기 때문에 귀무(영)가설이 기각되어 두 모집단은 등분산으로 같다고 할 수 없다. 이 근거에 의해 <u>"등분산이 가정되지 않음"</u>에 해당하는 행이 분석된다.

(3) 평균의 동일성에 의한 t-검정에서 $t = 4.062$

(4) t-검정에서 자유도 구하는 공식: 287.92

9.7대응표본 모평균차의 가설검정: 대응표본 T검정

대응표본: 각 조가 동질적인 두 개의 쌍으로 이루어진 일대일로 대응하는 표본.

9.7.1 표본의 크기가 작은 경우

n이 작은 경우에 두 모평균의 차 $\mu_1 - \mu_2 = \delta_o$에 대한 가설검정 방법은 다음과 같이 한다.

<통계적 가설검정의 절차>

(1) 귀무(영)가설 H_o: $\delta_o = 0$

(2) 대립(연구)가설 H_1: $\delta_o > 0 \text{ or } \delta_o < 0 \text{ or } \delta_o \neq 0$

(3) 검정 통계량: $T = \dfrac{\bar{d} - \delta_o}{s_d / \sqrt{n}}$

(4) 표본크기 n과 유의수준 α를 결정

(5) 자유도 ϕ: $\phi = n - 1$

(5) 기각역: $|T| \geq t(\phi, \frac{\alpha}{2})$ or $T \geq t(\phi,\alpha)$ or $T \leq -t(\phi,\alpha)$

(6) 통계적 의사결정: 검정통계량이 기각역에 포함되면 귀무가설 H_o 를 기각하고 아니면 채택.

가설에 따른 기각역

귀무가설	대립가설	유의수준 α 인 기각역
H_o: $\delta_o = 0$	H_1: $\delta_o \neq 0$	$\|T\| \geq t(\phi, \frac{\alpha}{2})$
H_o: $\delta_o \leq 0$	H_1: $\delta_o > 0$	$T \geq t(\phi,\alpha)$
H_o: $\delta_o \geq 0$	H_1: $\delta_o < 0$	$T \leq -t(\phi,\alpha)$

[보기 9_9] 어느 기업에서 판매원에 대한 직업교육을 실시한 후에 능률향상 효과에 대해 조사하였다. 임의로 판매원 10명을 추출하여 조사한 결과가 다음과 같다. 직업교육을 실시하기전과 후의 판매능력차 $\mu_1 - \mu_2$ 에 대한 95% 신뢰구간을 구하여라. 즉 판매능력에 차이가 있는지 유의수준 $\alpha = 0.05$에서 검정하라. 단, 판매능력 차의 분포는 정규분포를 따른다고 가정한다.

[표 9-7] 직업교육 전과 후의 판매량

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
실시 전	23	45	35	28	27	29	25	30	41	33
실시 후	27	43	31	42	34	38	30	37	36	44

(풀이) 실시전을 x, 실시후를 y 라 하고 다음의 표를 만들어 계산하자.

[표 9-8] 차에 대한 계산표

	x	y	$x = x - y$	$(d - \overline{d})^2$
1	23	27	−4	0.36
2	45	43	2	43.56
3	35	31	4	73.96
4	28	42	−14	88.36
5	27	34	−7	5.76
6	29	38	−9	19.36
7	25	30	−5	0.16
8	30	37	−7	5.76
9	41	36	5	92.16
10	33	44	−11	40.96
합계	316	362	−46	370.4

차 평균: $\bar{d} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{10} d_i = \frac{1}{10}(-46) = -4.6$

차에 대한 분산: $s_d^2 = \frac{1}{\phi}\sum_{i=1}^{n}(d-\bar{d})^2 = \frac{1}{9}(370.4) = 41.1556$

검정통계량: $T = \frac{\bar{d}-\delta_o}{s_d/\sqrt{n}} = \frac{-4.6-0}{\sqrt{41.1556/10}} = -2.2675$

표본은 크기가 $n=10$, 그리고 $\alpha=0.05$ 이므로 t 는 $t(9,0.025)$

여기서 9 는 자유도로 $\phi = n-1 = (10-1) = 9$ 이고 양쪽 검정이므로 α 의 반인 0.025 이다. 따라서 이에 해당하는 t 의 값은 t 분포 표에 의해 $t(9,0.025) = 2.263$

이것은 $\alpha = 0.05$ 즉 신뢰수준이 95%가 되려면 검정통계량 T 의 값이 이보다 작아야 한다.

※ t –분포:http://www.statdistributions.com/t/

(1) $t(\phi, \frac{\alpha}{2}) = t(9,0.025)$ 값 구하기.

(a) [p-value] box에 0.05 입력.

(b) [d.f.]box에 9 입력.

(c) [two tails]를 선택.

[t-value] box에서 2.263을 얻을 것이다.

(2) 검정통계량 $|T| = |-2.2675|$의 확률(유의확률) 계산

(a) [t-value] box에 2.2675 입력.

(b) [d.f.]box에 9 입력.

(c) [two tails]를 선택.

[p-value] box에서 0.005를 얻을 것이다.

검정결과:$|T| = 2.2675 > t(9,0.025) = 2.263$ 로 기각역에 포함되었다(T 와 t 가 거의 같음). 따라서 귀무가설 H_o 가 기각된다. 즉 직업교육 실시전과 실시후의 판매능력은 신뢰수준 95% 에서 차이가 있다고 주장할 수 있다. 유의확률로 비교하면 $p(F = 2.2675) = 0.05$ 는 유의수준 $\alpha = 0.05$ 와 거의 같기 때문에 귀무가설을 기각할 수도 있고 채택할 수도 있다.

SPSS 통계처리문제

[보기 9_10]한 회사에서 매년 사원들을 대상으로 실시되는 정규 컴퓨터 교육이 업무에 효율성을 증진시키는 효과가 있는지를 판단하고자 한다. 16 명의 사원을 임의로 추출하여 정규컴퓨터 교육을 실시한 후 개개의 사원에 대해서 교육 전과 후의 업무효율성을 측정하였더니 아래 표와 같은 결과를 얻었다.여기서id는 일련번호, 교육전과 후의 업무효율성을 각각 x 와 y 로 지칭하자.교육후 업무의 효율이 교육전보다 증진되었는지 유의수준 $\alpha = 0.05$ 에서 검증하라.

[표 9-9] 교육 전과 후의 업무효율성

id	교육전 업무효율성(x)	교육후 업무 효율성(y)
1	75	80
2	83	90
3	96	92
4	77	75
5	81	86
6	90	90
7	82	81
8	67	70
9	94	89
10	85	88
11	78	82
12	82	79
13	96	91
14	80	90
15	87	78
16	81	89

(풀이)<통계량 계산>

우선 통계량을 직접 계산하고 SPSS로 처리한 값과 비교하자. SPSS 통계분석을 잘 해석하려면 독립표본에서 본 t-검정의 예와 마찬가지로 이론적 배경을 이해하는 것이중요하다.
평균을 각각 $\bar{x}$ 와 $\bar{y}$, 대응표본 차를 $x-y=d$, 차 d 의 평균을 $\bar{d}$ 라고 하자.우선 아래 표를 완성하기 위하여 교육전과 교육후의 평균 $\bar{x}$, $\bar{y}$ 와 대응표본의 평균 $\bar{d}$ 를먼저 구한다.

1. 대응표본 통계량

(1) 교육전과교육후의 평균 및 대응표본 평균

교육전 평균: $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{16} x_i = \frac{1334}{16} = 83.38$

교육후 평균: $\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{16} y_i = \frac{1350}{16} = 84.38$

대응표본 평균: $\bar{d} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{16}(x_i - y_i) = \frac{-16}{16} = -1.000$

(2)사례 수(빈도 수: frequency n): $n = 16$

[표 9-10] 대응표본 통계량을 구하는 표. 여기서 $d = x - y$. $\overline{d}$ 는 대응표본 평균

id	x	y	d	$d-\overline{d}$	$(d-\overline{d})^2$	$x-\overline{x}$	$(x-\overline{x})^2$	$y-\overline{y}$	$(y-\overline{y})^2$	$x*y$
1	75	80	−5	−4	16	−8.38	70.22	−4.38	19.18	6000
2	83	90	−7	−6	36	−0.38	0.14	5.62	31.58	7470
3	96	92	4	5	25	12.62	159.26	7.62	58.06	8832
4	77	75	2	3	9	−6.38	40.70	−9.38	87.98	5775
5	81	86	−5	−4	16	−2.38	5.66	1.62	2.62	6966
6	90	90	0	1	1	6.62	43.82	5.62	31.58	8100
7	82	81	1	2	4	−1.38	1.90	−3.38	11.42	6642
8	67	70	−3	−2	4	−16.38	268.30	−14.38	206.78	4690
9	94	89	5	6	36	10.62	112.78	4.62	21.34	8366
10	85	88	−3	−2	4	1.62	2.62	3.62	13.10	7480
11	78	82	−4	−3	9	−5.38	28.94	−2.38	5.66	6396
12	82	79	3	4	16	−1.38	1.90	−5.38	28.94	6478
13	96	91	5	6	36	12.62	159.26	6.62	43.82	8736
14	80	90	−10	−9	81	−3.38	11.42	5.62	31.58	7200
15	87	78	9	10	100	3.62	13.10	−6.38	40.70	6786
16	81	89	−8	−7	49	−2.38	5.66	4.62	21.34	7209
계	1334	1350	−16	0	442	0	925.68	0	655.68	113126

(3)표준편차(Standard Deviation)

교육전의 표준편차: $s_x = [\frac{1}{\phi}\sum_{i=1}^{16}(x_i - \overline{x})^2]^{1/2} = (\frac{925.68}{15})^{1/2} = 7.856$

교육후의 표준편차: $s_y = [\frac{1}{\phi}\sum_{i=1}^{16}(y_i - \overline{y})^2]^{1/2} = (\frac{655.68}{15})^{1/2} = 6.612$

차의 표준편차: $s_d = [\frac{1}{\phi}\sum_{i=1}^{16}(d_i - \overline{d})^2]^{1/2} = (\frac{442}{15})^{1/2} = 5.428$

(4) 평균의 표준오차(Standard Error): $D = \frac{s}{\sqrt{n}}$

교육전의 평균 표준오차: $D_x = \frac{7.856}{\sqrt{16}} = 1.964$

교육후의 평균 표준오차: $D_y = \frac{6.6115}{\sqrt{16}} = 1.653$

2. 검정에 필요한 계산과 절차

(1) 귀무가설 H_o: $\mu_x - \mu_y = \delta_o = 0$

두 모분산에서 대응되는 표본의 평균 차는귀무가설의 경우 $\delta_o = 0$ 이다.

이 귀무가설을 채택하려면 다음의 T 검정이 필요하다.

(2) 유의수준: $\alpha = 0.05$

(3) 자유도 $\phi = 16 - 1 = 15$,

(4) 차의 평균오차: $\frac{s_d}{\sqrt{n}} = \frac{5.428}{4} = 1.357$

(5) $\alpha/2$ 인 곳에서의 t 값(양쪽 검정)

$$t(\phi, \frac{\alpha}{2}) = t(15,\ 0.025) = 2.132$$

(6) 검정통계량: $T = \frac{\bar{d} - \delta_o}{s_d/\sqrt{n}} = \frac{-1.00 - 0}{5.428/\sqrt{16}} = -0.7369$

※ t –분포:**http://www.statdistributions.com/t/**

(1) $t(\phi, \frac{\alpha}{2}) = t(9, 0.025)$ 값 구하기.

(a) [p-value] box에 0.05 입력.

(b) [d.f.]box에 15 입력.

(c) [two tails]를 선택.

[t-value] box에서 2.132 을 얻을 것이다.

(2) 검정통계량 $|T| = |-0.7369|$ 의 확률(유의확률) 계산

(a) [t-value] box에 0.737 입력.

(b) [d.f.]box에 15 입력.

(c) [two tails]를 선택.

[p-value] box에서 0.472 를 얻을 것이다.

검정결과: 검정통계량 $|T| = 0.7369 < t(15, 0.025) = 2.132$ 이므로 귀무가설이 채택된다.

즉 두 표본의 대응평균차는 $\mu_x - \mu_y = \delta_o = 0$ 로 교육전과 교육후의 업무효율성에는 차이가 없다고 주장할 수 있다. 유의확률로 비교하면 $p(F = -0.7369) = 0.472$ 는 유의수준 $\alpha = 0.05$ 보다 크기 때문에 귀무가설을 채택할 수 있다.

3평균차의 범위

차의 범위: $-t(\phi, \frac{\alpha}{2}) \le T = \frac{\bar{d} - \delta}{s_d/\sqrt{n}} \le -t(\phi, \frac{\alpha}{2}) = \frac{-1.00 - 0}{5.428/\sqrt{16}} = -0.7369$

$$\bar{d} - t(\phi, \frac{\alpha}{2})\frac{s_d}{\sqrt{n}} \le \delta \le \bar{d} + t(\phi, \frac{\alpha}{2})\frac{s_d}{\sqrt{n}}$$

$$(-1.00) - (2.1314)(1.357) \le \delta \le (-1.00) + (2.1314)(1.357)$$

$\therefore -3.8923 \le \delta = \mu_1 - \mu_2 \le 1.8923$

4.상관계수

(1) 공분산: $Cov(x, y) = s_{xy} = E(xy) - E(x)E(y)$

$$Cov(x,y)=\frac{1}{16}(113126)-(83.38)(84.38)=33.94$$

(2) **상관계수**: $Corr(x,y)=\rho(x,y)=\frac{s_{xy}}{s_x s_y}=\frac{33.94}{(7.856)(6.612)}=0.6534$

※ 여기서 계산된 상관계수는 비모수상관중에서 Spearman의 ρ 이다.

SPSS 통계처리[9_10_업무효율.sav]

(1) **분석>평균비교>대응표본 T검정(P)…**

대응표본 T검정 보조창이 뜨면

변수 [교육전]과 [교육후]를 **대응변수**란으로 이동: 대응변수란에 "교육전-교육후"로 나타남.

(2) **옵션**을 눌러 **신뢰구간**에 95%를 입력한 후, **계속>확인**

※ 신뢰구간은 보통 95%로 지정: 신뢰구간 95%는 유의수준 0.05에 해당.

T-검정 결과

대응표본 통계량

		평균	N	표준편차	평균의 표준오차
대응 1	교육전 업무효율유성	83.38	16	7.856	1.964
	교육후 업무효율유성	84.38	16	6.612	1.653

대응표본 상관계수

		N	상관계수	유의확률
대응 1	교육전 업무효율유성 & 교육후 업무효율유성	16	.731	.001

대응표본 검정

		대응차					t	자유도	유의확률 (양쪽)
					차이의 95% 신뢰구간				
		평균	표준편차	평균의 표준오차	하한	상한			
대응 1	교육전 업무효율유성 - 교육후 업무효율유성	-1.000	5.428	1.357	-3.893	1.893	-.737	15	.473

검정결과: 유의확률 0.473은 유의수준 $\alpha=0.05$보다 크기 때문에 귀무가설이 채택된다. 나타난 모든 값은 위에서 이론으로 계산한 값과 동일함을 확인할 수 있다.

※ 상관계수는 다음장에서 언급되므로 여기서 해석은 생략한다.

9.7.2 표본의 크기가 큰 경우

각조가 동질적인 두 개의 쌍으로 이루어진 대응표본의 n이 큰 경우 두 모평균의 차

$\mu_1 - \mu_2 = \delta_o$에 대한 가설 검정의 검정통계량은 다음과 같다.

검정통계량: $Z = \dfrac{\bar{d} - \delta_o}{s_d / \sqrt{n}}$

귀무가설	대립가설	유의수준 α의 기각역
H_o: $\mu_1 = \mu_2$,	H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$	$\lvert Z \rvert \geq z_{\alpha/2}$
H_o: $\mu_1 \leq \mu_2$,	H_1: $\mu_1 > \mu_2$	$Z \geq z_\alpha$
H_o: $\mu_1 \geq \mu_2$,	H_1: $\mu_1 < \mu_2$	$Z \leq -z_\alpha$

SPSS대응표본 T검정 2[교과서 예제2(p314)]

SPSS 통계처리[집단연습.sav]

집단연습 통계자료는 변수 [집단유형]에 **실험집단 [1]**과 **통제집단 [2]**가 있다. [집단유형] 중 **실험집단**을 대상으로 자아존중감과 자기통제성을 향상시키는 프로그램을 수행하고 교육받기전 사전자존감(preself)과 자기자신에 대한 사전통제성(precon), 교육후 사후자존사감(postself)과 사후통제성(postcon)에 대해 대응비교를 해보자.

(1) [집단연습.sav]를 open.

(2) 우선 변수 [집단유형]에서 실험집단만 분석하려하므로 통제집단은 제외시켜야 한다. **집단연습.sav**의 **변수보기**에서 [집단유형]의 값[…]을 눌러보면 1="실험집단", 2="통제집단"으로 정의되어 있음을 알 수 있다. 여기 통계분석에서 다음과 같은 방법으로 통제집단을 제외시키자.

데이타>케이스 선택

케이스 선택보조창이 뜨면 조건을 만족하는 케이스 선택

조건을 누르고 변수 [집단유형]을 우측창으로 이동 후 다음의 조건식을 쳐 넣음.

집단유형=1 **계속>확인**

이것을 하고 나면 데이터보기에 filter_$ 변수가 생기면서 2로 정의된 통제집단이 사선으로 쳐져있음을 알 수 있다. 이 사선을 없애고 전 자료를 모두 쓰려면 filter_$ 변수를 제거시키면 된다.

(3)**분석>평균비교>대응표본 T검정(P)…**

대응표본 T검정 보조창이 뜨면

사전자존감[preself]과 사후자존감[postself]을 동시에 선택하여대응변수로 이동.

사전내적통제성[precon]과 사후내적통제성[postcon]을 동시에 선택하여 대응변수로 이동

이동 결과는 대응변수 창에 다음과 같이 나타난다.

preself--postself
precon--postcon

(4) 옵션을 눌러 시뢰구간에 95%를 입력 후 계속 및 확인

T-검정 결과

대응표본통계량

		평균	N	표준편차	평균의표준오차
대응 1	사전자존감	2.8533	15	.61163	.15792
	사후자존감	3.2267	15	.59698	.15414
대응 2	사전내적통제성	10.7333	15	1.83095	.47275
	사후내적통제성	11.9333	15	1.62422	.41937

대응표본상관계수

		N	상관계수	유의확률
대응 1	사전자존감& 사후자존감	15	.659	.008
대응 2	사전내적통제성&사후내적통제성	15	.138	.625

대응표본 검정

		대응차					t	자유도	유의확률 (양쪽)
		평균	표준편차	평균의 표준오차	차이의 95% 신뢰구간 하한	차이의 95% 신뢰구간 상한			
대응 1	전-후자존감	-.37333	.49924	.12890	-.64980	-.09686	-2.896	14	.012
대응 2	전-후내적통제성	-1.200	2.274	.587	-2.459	.059	-2.044	14	.060

분석:유의확률(양쪽)에서 대응 1의 전-후자존감은 확률이 0.012로0.05보다 작기 때문에 영가설이 기각된다. 즉 사전자존감과 사후자존감의 평균은 같지 않다.
한편 대응 2의 전—후내적통재성은 확률이 0.060으로귀무(영)가설이 채택된다. 즉 전내적통재성과 후내적통재성은 평균이 같아 변화가 없다고 결론을 내린다.

연습문제

1. 다음 자료는 어느 가정에서 한 달 동안 쓰는 도시가스 소비량(단위 m^3)이다. 도시 전체에 한 달 동안 쓰는 도시가스의 평균은 $4.9m^3$라고 한다. 유의수준 $\alpha = 0.05$에서 검정하라.

[사용량] 2.9 4.35.4 3.4 5.5 3.4 5.3 4.7 5.1 4.6
4.4 9.6 6.3 3.6 5.2 5.3 4.6 4.2 5.6 4.5

2. 어느 농장에서 젖소로부터 얻은 우유의 양은 평균이 12.9라고 한다. 어떤 사료를 먹인 후부터 우유의 양이 증가하는 것 같아 이를 알아보기 위해 젖소 10마리를 조사하였더니 다음과 같았다.

13.7 15.8 5.3 10.0 11.1 14.2 13.8 13.2 12.7 15.9

가설검정 H_o: $\sigma^2 = 0.8$, H_1: $\sigma^2 \neq 0.8$

$\alpha = 0.10$ 에서 검정하라.

3. 서울에서 무산간을 기존의 고속버스로 주행할 경우 평균 7 시간이 소요되는 것으로 알려져 있다. 어떤 회사에서 새로운 고속버스를 개발하였는 데 평균 소요시간을 7 시간보다 단축할 수

잇다고 한다. 이를 실험해 보기위해 36 대의 버스를 임의로 추출하여 실험해 본 결과 평균 소요시간이 6.5 시간이었다. 모표준편차는 1.2 시간일 때 유의수준 $\alpha = 0.05$ 에서 검정하라.

4.새로운 식이요법을 개발하였다고 한다. 의사의 말로는 새로운 식이요법을 따르면 체중이 감소한다고 주장한다. 그래거 사실인지를 조사하기 위하여 다음과 같이 식이요법을 한 5 명의 체중을 kg 단위로 재었다. 모집단이 정규분포라면 유의수준 $\alpha = 0.05$ 에서 검정하라.

	1	2	3	4	5
식이요법 전	87.5	84	70	65	75
식이요법 후	85	84.5	66.5	66	71.5

5. 선반으로 평균구경이 5.01cm 의 축을 가공하고 있다. 종래의 변동은 $\sigma = 0.5\text{cm}$ 이다. 선반의 정밀도를 점검하기 위해 다음과 같이 임의로 15 개를 발취하였다. 평균구경이 달라졌다고 말할 수 있는지 $\alpha = 0.01$ 에서 검정하라.

[구경] 5.040 5.095 5.126 5.105 5.166 5.098 5.064 5.074
4.988 5.096 5.083 5.110 5.043 5.113 5.049

6.어떤 화학약품에 제조회사가 다른 두 종류의 원료를 사용하여 생산하고 있다. 각 원료에서 그 주성분 A 의 함량은 상표 1과 상표 2에서 각각 다음과 같다. 단 함량은 정규분포를 따르고 모분산이 같다고 한다. 상표 1과 2의 주성분 A 의 평균함량을 각각 μ_1, μ_2 라고 할 때 다음 물은에 답하라. 여기서 원료함량의 단위는 %이다.

상표 1	80.4	78.2	80.1	77.1	79.6	80.4	81.6	79.9	84.4	80.9	83.1
상표 2	80.0	81.2	79.5	78.0	76.1	77.0	80.1	79.9	78.8	80.8	

(1) μ_1 과 μ_2 가 차이가 없는가를 유의수준 0.05 에서 검정하라.
(2) 모분산이 같다고 가정하였다. 실제로 상표 1과 2에 포함되어 있는 주성분 A 의 함량의 분산 σ_1^2 과 σ_2^2 간에는 차이가 없는가를 유의수준 0.05 에서 검정하라.
(3) $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ 이라고 가정하고 H_o: $\mu_1 - \mu_2 = 0$, H_1: $\mu_1 - \mu_2 > 0$ 을 유의수준 10% 로 가설검정.
(4) 두 모평균의 차 $\mu_1 - \mu_2 = \delta$ 이 유의수준 0.05 에서 가질 수 있는 범위를 구하여라.

7. 제품에 철 함량을 조사하기 위하여 X-선과 화학분석으로 5 개의 표본을 추출하여 조사한 결과는 다음과 같다. 모집단이 정규분포라면 유의수준 $\alpha = 0.05$ 에서 검정하라.

	1	2	3	4	5
X-선	2.0	2.0	2.3	2.1	2.4
화학	2.2	1.9	2.5	2.3	2.4