Chapter 5 열전도의 수치해법

본 자료의 모든 그림, 표, 예제 등은 다음의 문헌을 참고하였습니다.

참고문헌 : Yunus A. Cengel and Afshin J. Ghajar, *"Heat and mass transfer (Fundamentals and applications)"*, 4th ed., McGraw-Hill Korea, 2011

<학습목표>

1. 열전도 문제에 대한 해석해의 한계 및 컴퓨터를 이용한 수치해법의 필요성에 대해 이해한다.
2. 미분식을 차분식으로 바꾸어 표현하고 유한차분식을 구한다.
3. 유한차분법을 이용하여 정상 1차원, 2차원 열전도 문제를 수치적으로 해결한다.
4. 유한차분법을 이용하여 비정상 1차원, 2차원 열전도 문제를 해결한다.

5.1 미분방정식의 유한차분식화

미분방정식의 수치해법으로 푸는 바탕은 미분방정식을 대수방정식으로 바꾸는 것이다. 잘 알려진 방법은 유한차분법으로 도함수를 차분형으로 대치하는 방법이다. 1계와 2계 도함수로 나눌 수 있는데 우선 1계 도함수부터 알아보면 다음과 같다.

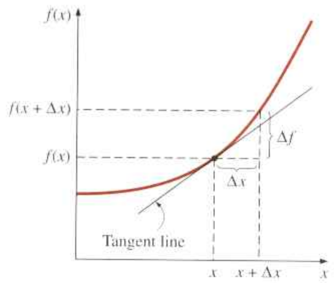


그림 5-6
어떤 함수의 한 점에서의 도함수는 함수에 대한 그 점에서의 기울기를 나타낸다.

도함수는 미분방정시의 기본 요소이므로 우리는 먼저 도함수에 대하여 잠깐 되짚어 볼 수 있다. <그림5-6>에서 보는 바와 같이 x에 대한 함수 f를 생각해 보자. 함수 $f(x)$의 어떤 점에서의 1계 도함수는 곡선에 대한 그 점에서의 접선의 기울기와 같고 다음과 같이 정의된다.

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \qquad (1)$$

이것은 도립 변수의 증분 Δx가 $\Delta x \to 0$이 될 때 함수의 증분 Δf의 비이다. 만약 극한을 고려하지 않으면 도함수는 다음과 같이 근사화 할 수 있다.

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \qquad (2)$$

이와 같이 도함수를 차분형으로 근사화하여 표시하는 것이 1계 도함수에 대한 유한차분형이다.

다음으로 열발생을 포함하는 두께 L의 평면벽에서의 1차원 정상 열전달을 알아보도록 한다. 그림과 같이 평면 벽을 x방향에 대하여 $\Delta x = L/M$의 간격을 갖는 M개의 영역으로 나누고, 0,1,2, ...,m-1. m+1, ..., M의 M+1개의 절 또는 절점이라 부르는 점으로 나눈다. 임의의 점 m의 x축 값은 단순히 $x_m = m\Delta x$이고, 그 점에서의 온도는 간단히 $T(x_m) = T_m$이 된다.

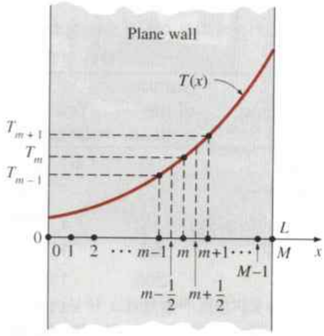


그림 5-7

평판의 열전달에서 유한차분식을 유도하기 위한 절점과 절점에서의 온도

열전도 방정식은 d^2T/dx^2과 같은 공간 변수에 대한 온도의 2계 도함수를 포함하나 과정을 1계 도함수부터 시작해 볼 필요가 있다. 식(2)를 사용하면 절점 m을 둘러싸고 있는 영역의 중점 m-½과 m+½에서의 온도에 대한 1계 도함수 dt/dx는 다음과 같이 표현된다.

$$\left.\frac{dT}{dx}\right|_{m-\frac{1}{2}} \cong \frac{T_m - T_{m-1}}{\Delta x} \quad , \quad \left.\frac{dT}{dx}\right|_{m+\frac{1}{2}} \cong \frac{T_{m+1} - T_m}{\Delta x} \qquad (3)$$

이때 2계 도함수는 단순히 1계 도함수의 미분으로 절점m에 대한 온도에 대한 2계 도함수는 다음과 같다.

$$\left.\frac{d^2T}{dx^2}\right|_m \cong \frac{\left.\frac{dT}{dx}\right|_{m+\frac{1}{2}} - \left.\frac{dT}{dx}\right|_{m-\frac{1}{2}}}{\Delta x} = \frac{\frac{T_{m+1}-T_m}{\Delta x} - \frac{T_m - T_{m-1}}{\Delta x}}{\Delta x}$$

$$= \frac{T_{m+1} - 2T_m + T_{m-1}}{\Delta x^2} \qquad (4)$$

위의 식이 임의의 내부 절점 m에 대한 2계 도함수를 유한차분식으로 표현한 것이다. 절점 m에서 온도에 대한 2계 도함수는 절점 m과 그것에 인접한 두 절점에서 온도에 대한 항으로 표현이 된다. 미분방정식은

$$\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{\dot{g}}{k} = 0 \qquad (5)$$

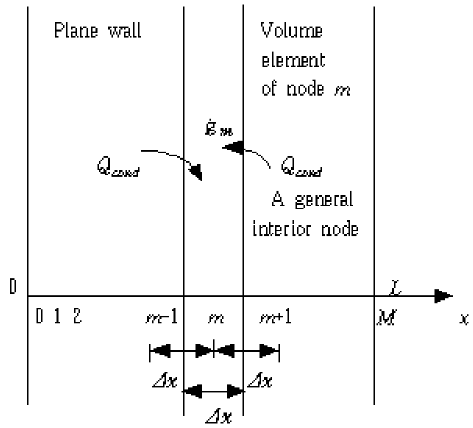
로 나타낼 수 있는데 이것은 열발생이 있고 열전도도가 일정한 평면벽에 대한 정상1차원 열전달의 지배 방정식이 되고 이를 유한차분식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\frac{T_{m+1} - 2T_m + T_{m-1}}{\Delta x^2} + \frac{\dot{g}_m}{k} = 0 \quad : \ \dot{g}_m\text{는 절점 내의 열발생율} \qquad (6)$$

◈ 2차원 정상 열전도에 대한 것(내부 절점($m.n$)에서..)

$$\frac{T_{m+1,n}-2T_{m,n}+T_{m-1,n}}{\Delta x^2}+\frac{T_{m,n+1}-2T_{m,n}+T_{m,n-1}}{\Delta y^2}+\frac{\dot{g}_{m,n}}{k}=0 \qquad (7)$$

5.2 1차원 정상 열전도



<그림 3>
평면벽에서 1차원 열전도 유한 차분식에 대한 절점과 체적요소

〔왼쪽 면으로부터의 열전도율〕+〔오른쪽 면으로부터의 〕
+〔요소 내부로부터의 열발생율〕 =〔요소의 에너지 용량의 변화율〕

즉

$$Q_{cond,\text{left}} + Q_{cond,\text{right}} + \dot{G}_{element} = \frac{\Delta E_{element}}{\Delta t} \qquad (8)$$

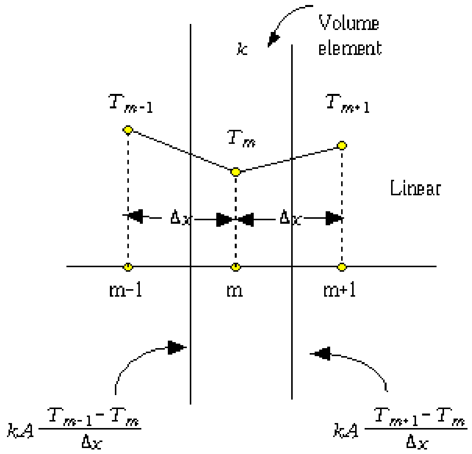
여기서 매질의 에너지 용량은 정상상태에서 변하지 않으므로 $\Delta E_{element}=0$이며, 요소 내부에서 열발생률은 다음과 같다.

$$\dot{G}_{element}=\dot{g}_m V_{element}=\dot{g}_m A\Delta x \qquad (9)$$

온도가 선형적으로 변화한다고 생각하면, 두께 L인 평면벽을 통과하는 정상 열전도율은 다음과 같다.

$$Q_{cond}=kA\frac{\Delta T}{L} \qquad (10)$$

여기서 ΔT는 평면벽을 통과하면서 생기는 온도차이고, 열전달은 고온에서 저온의 방향으로 일어난다. 열발생이 있는 평면벽의 경우엔 온도의 변화가 선형적이지 않기 때문에 위와 같은 관계를 적용할 수 없다. 하지만 두께 Δx인 얇은 층을 통과하는 열전도를 구함에 있어서 절점들 간의 온도 변화는 선형적이라고 근사화 할 수 있다.(그림 4)



<그림 4>

요소의 양쪽 면으로부터 절점 m을 향하는 방향으로 열전달이 일어나므로, 왼쪽과 오른쪽 면에서의 열 전도율은

$$Q_{cond,\,\mathrm{left}} = kA\frac{\Delta T_{m-1} - T_m}{\Delta x} \quad , \quad Q_{cond,\,\mathrm{right}} = kA\frac{\Delta T_{m+1} - T_m}{\Delta x} \tag{11}$$

식(9)와 식(11)을 식(8)에 대입하면

$$kA\frac{\Delta T_{m-1} - T_m}{\Delta x} + kA\frac{\Delta T_{m+1} - T_m}{\Delta x} + \dot{g}_m A\Delta x = 0 \tag{12}$$

이것을 간단히 하면,

$$\frac{T_{m-1} - 2T_m + T_{m+1}}{\Delta x} + \frac{\dot{g}_m}{k} = 0 \qquad m = 1, 2, 3, \ldots, M-1 \tag{13}$$

열전달이 모든 면에서 요소의 안쪽방향으로 일어난다고 가정하는 것이 편리하고 전도에 대한 항의 부호를 걱정할 필요도 없다. 그렇게 하면 전도에 관계된 항에서의 모든 온도차는 인접한 절점의 온도에서 고려하고 있는 절점의 온도를 뺀 값으로 표현되고, 전도에 간한 항들은 모두 더해지게 된다.

◈ 경계 조건

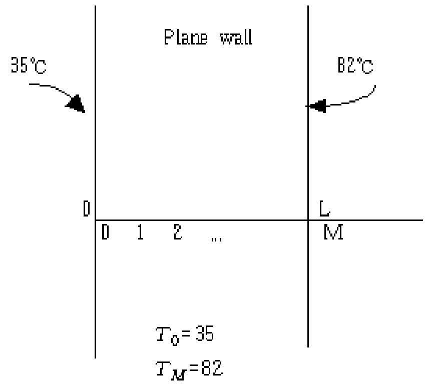
평면벽의 각 내부 절점에 대한 유한차분식을 이끌어내는 일반적인 관계식에서는 고려하고 있는 절점의 양쪽모두에 인접한 절점이 있어야 하므로 인접한 절점이 한쪽밖에 없는 경계상에 있는 절점에 적용할 수 없다. 그러므로 경계상의 절점들에 대한 유한차분식을 별도로 구해야 할 필요가 있다.

실제 문제에서는 가장 흔히 접할 수 있는 경계조건은 온도가 주어지거나 열 유속이 주어진 경우 또는 대류, 복사 경계조건이며, 다음과 같다.

① 왼쪽과 오른쪽 표면의 온도가 주어진 경계조건

$$T(0) = T_0 = \text{주어진 값}$$

$$T(L) = T_M = \text{주어진 값} \tag{14}$$



<그림 5>

② 열유속이 주어진 경계조건

$$q_0 A + \frac{kA\, T_1 - T_0}{\Delta x} + \dot{g}_0 (A \Delta x/2) = 0 \tag{15}$$

※특별한 경우 : 경계가 단열된 경우($q_0 = 0$)

$$kA \frac{T_1 - T_0}{\Delta x} + \dot{g}_0 (A \Delta x/2) = 0 \tag{16}$$

③ 대류 경계조건

$$hA(T_\infty - T_0) + kA \frac{T_1 - T_0}{\Delta x} + \dot{g}_0 (A \Delta x/2) = 0 \tag{17}$$

④ 복사 경계조건

$$\varepsilon \sigma A(T_{surr}^4 - T_0^4) + kA \frac{T_1 - T_0}{\Delta x} + \dot{g}_0 (A \Delta x/2) = 0 \tag{18}$$

⑤ 대류와 복사가 혼합된 경계조건

$$hA(T_\infty - T_0) + \varepsilon\sigma A(T_{surr}^4 - T_0^4) + kA\frac{T_1 - T_0}{\Delta x} + \dot{g}_0(A\Delta x/2) = 0 \qquad (19)$$

또는

$$h_{combined}A(T_\infty - T_0) + kA\frac{T_1 - T_0}{\Delta x} + \dot{g}_0(A\Delta x/2) = 0 \qquad (20)$$

⑥ 대류, 복사 열유속이 혼합된 경계조건

$$q_0 A + hA(T_\infty - T_0) + \varepsilon\sigma A(T_{surr}^4 - T_0^4) + kA\frac{T_1 - T_0}{\Delta x} + \dot{g}_0(A\Delta x/2) = 0 \qquad (21)$$

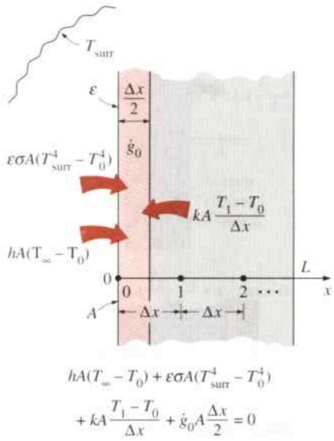
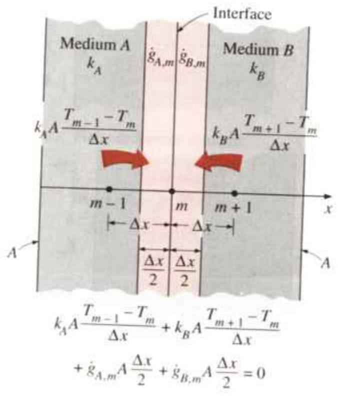


그림 5-15
평판의 왼쪽 경계에 대류와 복사가 혼합된 유한차분식에 대한 그림

그림 5-16
열적으로 완전하게 접촉하고 있는 두 매질 A와 B에 대한 접촉 경계조건의 유한차분식



⑦ 접촉 경계조건

$$k_A A\frac{T_{m-1} - T_m}{\Delta x} + k_B A\frac{T_{m+1} - T_m}{\Delta x} + \dot{g}_{A,m}(A\Delta x/2) + \dot{g}_{B,m}(A\Delta x/2) = 0 \qquad (22)$$

◈ 단열된 경계상의 절점을 내부 절점으로 취급 : 거울 상 개념

단열된 경계상의 절점에 대한 유한차분식을 얻는 방법 중 한가지는 식(16)에서처럼 단열을 열유속 "0"으로 취급하여 에너지 균형을 얻는 것이다. 평면벽의 단열된 경계상의 절점 m=0에 대한 유한차분식을 표현하면 다음과 같다.

$$\frac{T_{m+1} - 2T_m + T_{m-1}}{\Delta x^2} + \frac{\dot{g}_m}{k} = 0 \qquad \rightarrow \qquad \frac{T_1 - 2T_0 + T_1}{\Delta x^2} + \frac{\dot{g}_m}{k} = 0$$

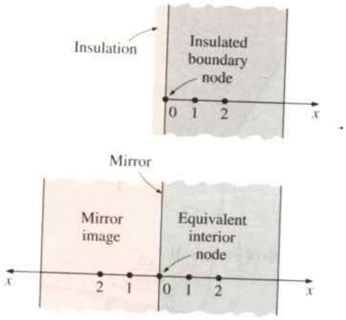
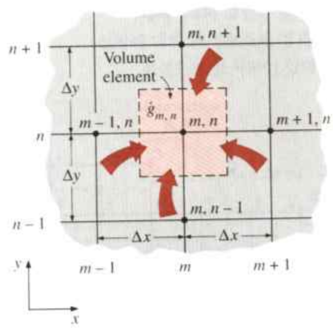


그림 5-17
단열된 경계상의 절점은 단열된 면을 하나의 반사경처럼 생각하여 내부 절점으로 취급할 수 있다.

5.3 2차원 정상 열전도

그림 5-26
직각좌표계에서 2차원 열전도에 대한 임의의 내부 절점 (m, n)의 체적요소



x와 y방향으로의 열전달을 생각하여 2차원 열전도를 생각할 수 있다.

그림에서 보는 바와 같이 영역에서 임의의 내부 절점$(m. n)$을 중심으로 하며 $\dot{g}$의 율로 열이 발생하고 열전도도 k가 일정한 $\Delta x \times \Delta y \times 1$ 크기의 체적요소를 고려한다. 모든 면에서 열전도가 일어난다고 가정하면, 체적요소에 대한 에너지 균형은 정상상태에 대하여 다음과 같이 표현된다.

$$\left(\begin{array}{c}\text{왼쪽, 위쪽, 오른쪽, 아래쪽} \\ \text{면에서의 열전도율}\end{array}\right) + \left(\begin{array}{c}\text{요소내부에서의} \\ \text{열발생률}\end{array}\right) = \left(\begin{array}{c}\text{요소의 에너지용량의} \\ \text{변화율}\end{array}\right)$$

즉,

$$Q_{cond},\text{left} + Q_{cond},\text{top} \quad Q_{cond},\text{right} + \quad Q_{cond},\text{bottom} + \quad \dot{G}_{element} = \frac{\Delta E_{element}}{\Delta t} = 0 \qquad (23)$$

또 인접한 절점들 사이의 온도는 선형적으로 변화한다고 가정하고, x방향의 절전달 면적은 $A_x = \Delta y \times 1 = \Delta y$, y방향의 열전달 면적은 $A_y = \Delta x \times 1 = \Delta x$kr 되므로, 위에서의 에너지 균형식은

다음과 같다.

$$k\Delta y\frac{T_{m-1,n}-T_{m,n}}{\Delta x}+k\Delta x\frac{T_{m,n+1}-T_{m,n}}{\Delta y}+k\Delta y\frac{T_{m+1,n}-T_{m,n}}{\Delta x}$$
$$+k\Delta x\frac{T_{m,n-1}-T_{m,n}}{\Delta y}+\dot{g}_{m,n}\Delta x\Delta y=0 \tag{24}$$

각 항을 $\Delta x \times \Delta y$로 나누고 간단히 하면 m=1, 2, 3, … ,M-1 과 n=1, 2, 3, … ,N-1에 대하여

$$\frac{T_{m-1,n}-2T_{m,n}+T_{m+1,n}}{\Delta x^2}+\frac{T_{m,n+1}-2T_{m,n}+T_{m,n-1}}{\Delta y^2}+\frac{\dot{g}_{m,n}}{k}=0 \tag{25}$$

유한차분 해석에서 종종 정사각형 망을 사용하여 Δx, Δy가 같은 값을 갖도록 하기도 한다. 그러면 $\Delta x=\Delta y=1$이고, 위의 식을 간단히 나타낼 수 있다.

$$T_{m-1,n}+T_{m+1,n}+T_{m,n+1}T_{m,n-1}+\frac{\dot{g}_{m,n}l^2}{k}=0 \tag{26}$$

즉 내부 절점에 대한 유한차분식은 4개의 인접한 절점의 온도를 더하고, 고려하는 접점 온도에 4배를 하여 뺀 후, 열발생 항을 더하면 구할 수 있다.

◈ 경계상의 절점

2차원이나 3차원 문제에서 경계상의 절점에 대한 유한 차분식을 구하는 방법은 1차원의 경우와 유사하다. 2차원의 경우에는 x방향과 y방향의 열전달을 포한한다는 사실을 제외하면 앞의 평면벽의 경우와 같이 취급할 수 있다.

몇 차원의 문제이든지 정상상태의 열전달에 대해서 체적요소에 에너지 균형을 적용할 때 기억해야할 기본 관계식은 다음과 같다.

$$\sum_{all sides} Q+\dot{g}\,V_{element}=0 \tag{27}$$

5.4 비정상 열전도

비정상 열전도 문제에 대한 식에는 매질의 에너지 용량의 시간에 따른 변화를 나타내는 추가적인 항이 포함되어 있어 정상 열전도 문제에 대한 식과는 다르다. 이 추가적인 항은 미분방정식에서 시간에 대한 온도의 1계 도함수의 형태로 나타나고 에너지 균형식에서는 시간 Δt 동안의 체적요소에 대한 에너지 균형 식은 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix}\text{시간}\Delta t\text{동안}\\ \text{모든 면으로부터}\\ \text{체적요소내부로}\\ \text{전달되는열}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\text{시간}\Delta t\text{동안}\\ \text{체적요소내에서}\\ \text{발생하는열}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\text{시간}\Delta t\text{동안}\\ \text{체적요소의}\\ \text{에너지 용량의}\\ \text{변화}\end{pmatrix}$$

즉,

$$\Delta t\times \sum_{allsides} Q + \Delta t \times \dot{G}_{element} = \Delta E_{element} \tag{28}$$

여기서 열전달률 Q는 보통 내부 절점에 대해서는 전도항으로 되어 있으나, 경계 절점에 대해서는 대류, 열유속, 복사를 포함할 수 있다.

밀도를 ρ, C를 요소의 비열이라 하면 $\Delta E_{element} = mC\Delta T = \rho V_{element} C \Delta T$이므로 위의 관계식을 Δt로 나누면

$$\sum_{allsides} Q + \dot{G}_{element} = \frac{\Delta E_{element}}{\Delta t} = \rho V_{element} C \frac{\Delta T}{\Delta t} \tag{29}$$

즉 매질의 이므이의 절점 m과 그것의 체적요소에 대하여

$$\sum_{allsides} Q + \dot{G}_{element} = \rho V_{element} C \frac{T_m^{i+1}}{T_m^{i}} \tag{30}$$

여기서 T_m^i과 T_m^{i+1}은 각각 시간 $t_1 = i\Delta t$와 $t_{i+1} = (i+1)\Delta t$에서 절점 m의 온도이고, $T_m^{i+1} - T_m^i$은 시간 단계 i와 $i+1$ 사이 간격 Δt시간 동안의 절점의 온도 변화를 나타낸다.

비정상 문제에서 절점의 온도는 보통 각 시간 단계마다 변화하므로 식(30)의 왼쪽항에 대하여 이전 시간 단계 i에서의 온도를 사용해야 할지 새로운 시간 단계 i+1에서의 온도를 사용해야 할지 궁금할 것이다, 두 방법모두 합당한 것이고 모두 실제로 쓰이고 있다. 유한차분법에서는 첫 번째의 경우 양함수법(explicit method)라 하고 두 번째의 경우를 음함수법(implicit method)이라 하며, 다음과 같은 일반식으로 표현된다.

양함수법 : $$\sum_{allside} Q^i + \dot{G}^i_{element} = \rho V_{element} C \frac{T_m^{i+1} - T_m^i}{\Delta t} \tag{31}$$

음함수법 : $$\sum_{allside} Q^{i+1} + \dot{G}^{i+1}_{element} = \rho V_{element} C \frac{T_m^{i+1} - T_m^i}{\Delta t} \tag{32}$$

평면벽에서의 비정상 열전도

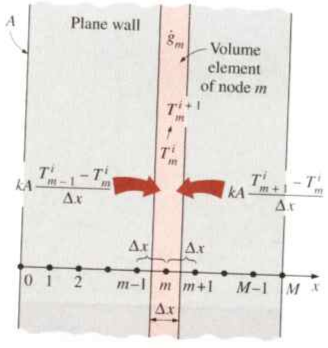


그림 5-43
평관에서 1차원 열전도의 비정상 유한차분식에 대한 절점과 체적 요소

그림에서 보는 바와 같이 평면벽에서 두께가 L이고, 열발생이 $\dot{g}(x,t)$로 시간과 위치에 따라 변화하면, 열전도도가 k로 일정하고, 망의 크기가 $\Delta x = L/M$이고, x방향으로 절점이 0, 1, 2, … , M인 비정상 1차원 열전도를 고려하자.

임의의 내부 절점 m의 체적 요소에 양면으로부터 열이 전도되고 요소의 체적이 $V_{element} = A\Delta x$이므로, 내부 절점에 대한 비정상 유한차분식은 식(22)에 기초하여 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$kA\frac{T_{m-1} - T_m}{\Delta x} + kA\frac{T_{m+1} - T_m}{\Delta x} + \dot{g}_m A\Delta = \rho A\Delta x C\frac{T_m^{i+1} - T_m^{i}}{\Delta t} \qquad (33)$$

표면적 A를 소거하고 $\Delta x/k$를 곱하면 다음과 같이 표현된다.

$$T_{m-1} - 2T_m + T_{m+1} + \frac{\dot{g}_m \Delta x^2}{k} = \frac{\Delta x^2}{\alpha \Delta t}(T_m^{i+1} - T_m^{i}) \qquad (34)$$

여기서 $\alpha = k/\rho C$는 평면벽 재질의 열확산율이다. 이제 무차원 mesh Fourier number를 다음과 같이 정의된다.

$$\tau = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} \qquad (35)$$

그러면 식(34)는

$$T_{m-1} - 2T_m + T_{m+1} + \frac{\dot{g}_m \Delta x^2}{k} = \frac{T_m^{i+1} - T_m^{i}}{\tau} \qquad (36)$$

시간 단계 i에 대해 왼쪽 부분을 표현하여 다음과 같은 양함수형 유한차분식을 얻을 수 있다.

$$T^i_{m-1} - 2T^i_m + T^i_{m+1} + \frac{\dot{g}^i_m \Delta x^2}{k} = \frac{T^{i+1}_m - T^i_m}{\tau} \qquad (37)$$

이 식은 새로운 온도 T^{i+1}_m에 대하여 명쾌하게 풀 수 있다.

$$T^i_m = \tau(T^i_{m-1} + T^i_{m+1}) + (1-2\tau)T^i_m + \tau\frac{\dot{g}^i_m \Delta x^2}{k} \qquad (38)$$

이것은 평판의 모든 내부 절점 m=1, 2, 3, ..., M-1에 대해 성립한다. 식 (36)의 왼쪽 부분을 시간 단계 i대신 i+1에 대해서 표현하면 다음과 같은 음함수형 유한차분식을 얻을 수 있다.

$$T^{i+1}_{m-1} - 2T^{i+1}_m + T^{i+1}_{m+1} + \frac{\dot{g}^{i+1}_m \Delta x^2}{k} = \frac{T^{i+1}_m - T^i_m}{\tau} \qquad (39)$$

이를 다시 정리하면,

$$\tau T^{i+1}_{m-1} - (1+2\tau)T^{i+1}_m + \tau T^{i+1}_{m+1} + \tau\frac{\dot{g}^{i+1}_m \Delta x^2}{k} + T_{m+1} = 0 \qquad (40)$$

위의 양함수형, 음함수형 식을 각각 M-1개의 내부 절점에 적용하면 M-1개의 방정식이 나온다.

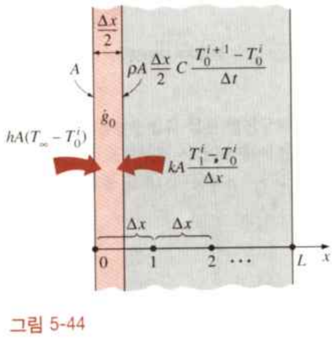


그림 5-44
평판의 왼쪽 경계에 대한 대류 경계조건의 양함수형 유한차분식에 대한 그림

◈ 양함수법에 대한 안정성 기준 : Δt 의 제한

양함수법은 절대적으로 안정하지 못하기 때문에 Δt 의 최대 허용 범위는 안정성의 기준에 의해 제한된다. 모든 절점에 대한 안정성 기준은 $1-2\tau=0$ 또는

$$\tau = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} \le \frac{1}{2} \qquad \left(\begin{array}{c}\text{내부절점, 직각좌표계}\\ \text{에서의 1차원 열전달}\end{array}\right) \qquad (41)$$

음함수법은 무조건적으로 안정하므로, 그 방법에 우리가 원하는 어떤 시간 단계든지 사용할 수 있다.

◈ 2차원 비정상 열전도

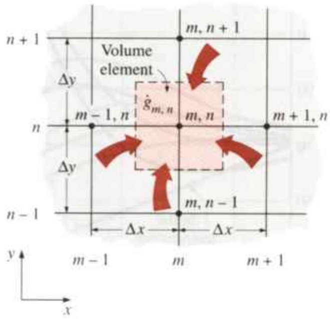


그림 5-53
직각좌표계에서 2차원 비정상 열전도에 대한 임의의 내부 절점(m, n)의 체적요소

x, y방향으로 열전도가 현저한 어떤 직사각형 영역을 생각해 보자. 그리고 z방향으로는 단위 두께 $\Delta z=1$이라고 하자. 매질 내의 열은 $\dot{g}(x, y, t)$의 율로 시간과 위치에 따라 변화면서 발생하고 매질의 열전도도 k는 일정하다고 가정한다. 그림과 같이 이제 그 영역의 x-y평면을 각각 x, y 방향으로 Δx, Δy 의 간격을 가진 절점의 직사각형 망으로 나누고, 좌표가 $x=m\Delta x$, $y=m\Delta y$ 인 임의의 내부 절점 (m,n)을 생각해 보자. 임의의 내부 절점 (m,n)을 중심으로 하는 체적요소 4방향의 열전도를 포함하고 그 요소의 체적은 $V_{element}=\Delta x\times\Delta y\times 1=\Delta x\Delta y$이므로, 어떤 임의의 내부 절점에 대한 비정상 유한차분식은 다음과 같이 나타 낼 수 있다.

$$k\Delta y\frac{T_{m-1,n}-T_{m,n}}{\Delta x}+k\Delta x\frac{T_{m,n+1}-T_{m,n}}{\Delta y}+k\Delta y\frac{T_{m+1,n}-T_{m,n}}{\Delta x}+k\Delta x\frac{T_{m,n-1}-T_{m,n}}{\Delta y}+\dot{g}_{m,n}\Delta x\Delta y$$
$$=\rho\Delta x\Delta yC\frac{T_m^{i+1}-T_m^i}{\Delta t} \qquad (42)$$

정사각형 망 ($\Delta x=\Delta y=l$)을 사용하고 각 항을 k로 나눈 후 간단히 하면,

$$T_{m-1,n}+T_{m+1,n}+T_{m,n+1}+T_{m,n-1}-4T_{m,n}+\frac{\dot{g}_{m,n}l^2}{k}=\frac{T_m^{i+1}-T_m^i}{\tau} \qquad (43)$$

여기서 $\alpha=k/\rho C$ 는 재료의 열확산율이고 $\tau=\alpha\Delta t/l^2$ 은 무차원 mesh Fourier number이다. 이것은 인접한 절점에서의 온도에 대한 항으로 다음과 같이 기억하기 쉽게 나타낼 수 있다.

$$T_{\text{left}}+T_{\text{top}}+T_{\text{right}}+T_{\text{bottom}}-4T_{\text{nod}}+\frac{\dot{g}_{node}l^2}{k}=\frac{T_{node}^{i+1}-T_{node}^i}{\tau} \qquad (44)$$

이때 양함수형 유한차분식을 나타내면 다음과 같다.

$$T^i_{\text{left}}+T^i_{\text{top}}+T^i_{\text{right}}+T^i_{\text{bottom}}-4T^i_{\text{nod}}+\frac{\dot{g}^i_{node}l^2}{k}=\frac{T_{node}^{i+1}-T_{node}^i}{\tau} \qquad (45)$$

위의 방정식은 새로운 온도 T^{i+1}_{node}에 대하여 매질 내의 m=1, 2, 3, ..., M-1 그리고 n=1, 2, 3, ..., N-1인 모든 내부 절점(m, n)에서 다음과 같이 양함수형으로 풀 수 있다.

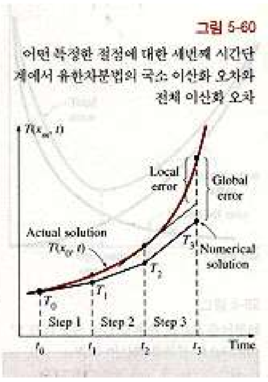
$$T^{i+1}_{node} = \tau(T^{i}_{\text{left}} + T^{i}_{\text{top}} + T^{i}_{\text{right}} + T^{i}_{\text{bottom}}) + (1-4\tau)T^{i}_{node} + \tau\frac{\dot{g}^{i}_{node}l^2}{k} \qquad (46)$$

T^{i+1}_{m}에 대한 식에서 T^{i}_{m}의 계수가 모든 절점에 대하여 0보다 크거나 같아야 한다는 안정성 기준은 2차원에서도 똑같이 적용이 된다. 직각좌표계에서 2차원 열전달의 경우에 T^{i+1}_{m}에 대한 식에서 T^{i}_{m}의 계수는 $1-4\tau$이고, 그러므로 이 경우 모든 내부 절점에 대한 안정성 기준은 $1-4\tau>0$ 또는,

$$\tau = \frac{\alpha\Delta t}{l^2} \le \frac{1}{4} \qquad (47)$$

5.5 수치오차의 제어

수치해와 엄밀해의 차이는 수치해에 포함된 오차를 나타낸다. 수치 오차는 기본적으로 수치해법의 식에서 사용하는 근사화(도함수를 차분형으로 치화하고 두 인접한 절점의 온도 분포가 직선적이라고 가정하는 것 등의)에 기인하는 이산화 오차와, 컴퓨터가 사용하는 제한된 수의 유효자리수와 컴퓨터가 보유할 수 없는 자리수를 반올림(또는 절삭)하는 데서 기인하는 반올림 오차 때문이다. 이산화 오차는 충분히 작은 값의 절점 간격과 시간 단계를 사용하여 최소화할 수 있고 반올림 오차는 더 많은 유효자리수와 숫자를 표현하는 컴퓨터에서 계산을 수행함으로써 최소화 할 수 있다.



예제5.1) 넓은 우라늄 금속판의 정상 열전도

두께 $4cm$이고 열전도도$k=28\,W/m\bullet K$이며 열이$\dot{e}=5\times10\ W/m^3$의 율로 일정하게 발생, 한쪽 면은 얼음물의 의해 0℃로 유지, 다른 면은 열전달계수 $h=45\,W/m^2\bullet k$로 온도$T=30℃$의 외부로 대류, 매질의 경계상에 2개의 절점,중앙에 1개의절점, 총 3개의 같은 간격의 절점을 선정하여 유한차분법을 사용하여 정상상태에서 금속판이 노출된 표면의 온도를 구하라.

***풀이과정**

풀이 우라늄 금속판은 한 쪽은 주어진 온도로 유지되고, 다른 쪽은 대류가 일어나고 있다. 금속판의 미지의 표면온도는 같은 간격의 3개의 절점을 사용하여 수치적으로 구해진다.

가정 1.정상상태 2,1차원 열전달 3.열전도도 일정 4.복사열전달 무시

물성치 열전도도 $k=28\,W/m\bullet K$

해석 절점의 개수는 $M=3$,금속판의 양 표면에 2개, 중앙에 1개의 절점이 선정 그러면 절점의 간격 $\triangle x$는

$$\triangle x=\frac{L}{M-1}=\frac{0.04m}{3-1}=0.02m$$

절점 0의 온도는 $T_0=0℃$ 이 문제에는 두 개의 미지의 온도가 있고 이것을 구하기 위해서 두 개의 방정식이 필요하다. 이 방정식은 절점1,2에 유한차분법을 적용하여 얻을 수 있다.

절점 1은 내부 절점이고, 이 절점에서의 유한차분식은 m=1로 놓으면 직접 구할 수 있다.

$$\frac{T_0-2T_1+T_2}{\triangle x^2}+\frac{\dot{e}_1}{k}=0\rightarrow\frac{0-2T_1+T_2}{\Delta x^2}+\frac{\dot{e}_1}{k}=0\rightarrow 2T_1-T_2=\frac{\dot{e}_1}{k}\triangle x^2 \quad (1)$$

절점2는 대류가 일어나는 경계상의 절점이고, 경계상에 있는 두께$\triangle x/2$의 체적 요소에 모든 면에서 매질로 들어오는 뱡항으로 열전달이 일어난단고 가정하여 에너지 균형을 적용하면 이 절점에서의 유한차분식을 구할 수 있다.

$$hA(T_\infty-T_2)+kA\frac{T_1-T_2}{\Delta x}+\dot{e}(A\triangle x/2)=0$$

각 항에서 열전달 면적 A를 소거하고 정리하면

$$T_1-(1+\frac{h\triangle x}{k})T_2=-\frac{h\triangle x}{k}T_\infty-\frac{\dot{e}_2}{2k}\triangle x^2 \quad (2)$$

식 (1)과 식(2)를 주어진 값을 대입하고 간단히 하면

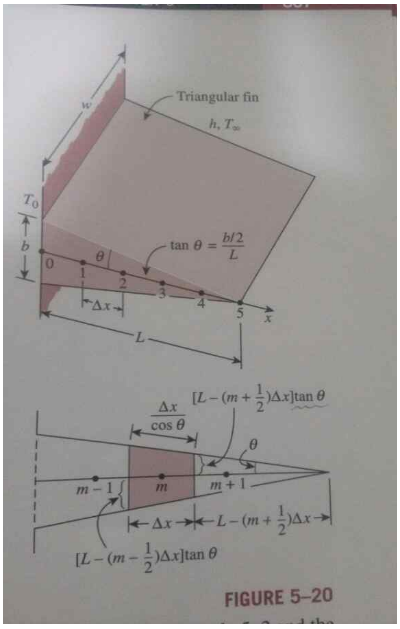
$$2T_1-T_2=71.43(℃)$$

$$T_1-1.032T_2=-36.68(℃)$$

첫번째 방정식을 T_1에 대하여 풀고 그것을 두 번째 방정식ㅇ[대입하면 T_2를 얻을 수 있는데 그값은

$$136.1℃$$

이것을 첫번째 방정식에 대입하면 $T_1 = 103.8℃$이다.



예제 5.2) 삼각휜의 열전달

L=5cm, 뿌리부분 두께 b=1cm, 폭 w는 매우 크다.

알루미늄 합금 휜(k=180W/m·K), 휜의 뿌리는 T_0=200℃로 유지되고

T_∞=25℃인 주위로 열전달계수 h=15W/m^2·K 로 열을 빼앗기고 있다.

휜의 X방향을 따라 6개의 같은 간격의 절점을 선정하고 유한차분식을 사용하여

(a) 각 절점의온도

(b) w=1m 당 휜으로부터의 열전달률

(c)휜 효율을 구하라.

(a)

먼저 절점간의 간격 $\triangle x$의 길이를 구하면

$$\triangle x = \frac{L}{M-1} = \frac{0.05m}{6-1} = 0.01m$$ 이다.

그림에서 보듯이 임의의 점 m으로의 열전달식을 구하면

$$kA\frac{T_{m-1}-T_m}{\triangle x} + kA_R\frac{T_{m+1}-T_m}{\triangle x} + hA_{conv}(T_\infty - T_m) = 0$$

각 절점마다의 열전달 면적을 나타내면

$$A_L = 2w[L-(m-1/2)\triangle x]\tan\theta$$

$$A_R = 2w[L-(m+1/2)\triangle x]\tan\theta$$

$$A_{conv} = 2w(\triangle x/\cos\theta)$$

위 면적식을 열전달식에 대입하면

$$2kw[L-(m-1/2)\triangle x]\tan\theta\frac{T_{m-1}-T_m}{\triangle x} + 2kw[L-(m+1/2)\triangle x]\tan\theta\frac{T_{m+1}-T_m}{\triangle x}$$

$$+h\frac{2w\triangle x}{\cos\theta}(T_\infty - T_m) = 0$$

각 항을 $2kwLtan\theta/\triangle x$로 나눠주면

$$1-(m-\frac{1}{2})\ \frac{\triangle x}{\ }](T_{\ -1}-T_m)+[1-(m+\frac{1}{2})\frac{\triangle x}{L}](T_{m+1}-T_m)$$

$$+\frac{h(\triangle x)^2}{kLsin\theta}(T_\infty - T_m)=0$$

여기서

$$\tan\theta = \frac{b/2}{L} = \frac{0.5cm}{5cm} = 0.1 \ \rightarrow \theta = \tan^{-1}0.1 = 5.71^\circ$$

또한 $\sin 5.71^\circ = 0.0995$ 이다.

위 값들을 대입하면

$$(5.5-m)T_{m-1}-(10.008-2m)T_m+(4.5-m)T_{m+1}=-0.209$$

이제 m에 1,2,3,4를 넣어 각 절점에서의 유한차분식을 구하면

m=1 : $-8.008T_1+3.5T_2=-900.209$

m=2 : $3.5T_1-6.008T_2+2.5T_3=-0.209$

m=3 : $2.5T_1-4.008T_2+1.5T_3=-0.209$

m=4 : $1.5T_1-4.008T_2+0.5T_3=-0.209$

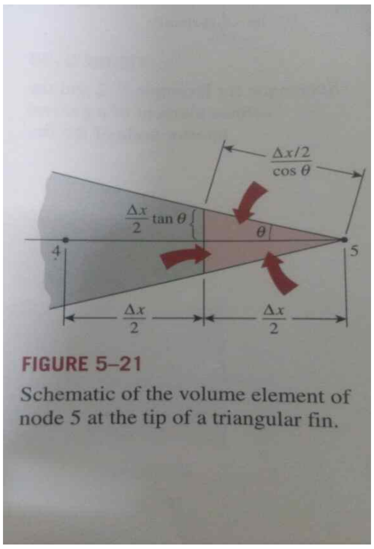


FIGURE 5–21
Schematic of the volume element of node 5 at the tip of a triangular fin.

경계상의 절점 5에 대한 유한차분식은 이 경계상의 길이가 $\triangle x/2$인 체적요소에 대하여 구하면

$$kA\ \frac{T_4-T_5}{\triangle x}+hA_{conv}(T_\infty - T_5)=0$$

여기서

$$A_L=2w\frac{\triangle x}{2}tan\theta,\ A_{conv}=2w\frac{\triangle x/2}{\cos\theta}$$

각 항에서 w를 소거하고 아는 값을 대입하면

$$T_4-1.008T_5=-0.209$$

5개인 선형 연립 대수 방정식들이 구해지는데

이 방정식들을 연립하여 풀면

T_1=198.6℃, T_2=197.1℃, T_3=195.7℃, T_4=194.3℃, T_5=192.9℃

이것이 각 절점에서의 온도가 된다.

(b)휜으로부터의 전체 열전달률은 간단히 각 체적 요소에서 주변으로의 열전달의 합이 되고, w=1m당

$$_{in} \sum_{m=0}^{5} Q_{element,m} = \sum_{m=0}^{5} hA_{conv,m}(T_m - T_\infty)$$ 로부터 구해진다.

경계상의 절점 0과5에 대해서 열전달 표면적은 $w\triangle x/\cos\theta$이고 내부절점 1,2,3,4에 대해서는 이것의 두배가 되므로

$$Q_{fin} = h\frac{w\triangle x}{\cos\theta}[(T_0 - T_{\infty)} + 2(T_1 - T_\infty) + 2(T_2 - T_\infty) + 2(T_3 - T_\infty)$$
$$+ 2(T_4 - T_\infty) + 2(T_5 - T_\infty)]$$
$$= h\frac{w\triangle x}{\cos\theta}[T_0 + 2(T_1 + T_2 + T_3 + T_{4)} + T_5 - 10T_\infty]℃$$
$$= (15\,W/m^2 \cdot K)\frac{(1m)(0.01m)}{\cos 5.71^\circ}[200 + 2 \times 785.7 + 192.9 - 10 \times 25]℃$$
$$= 258.4\,W$$

(c)

휜 전체가 뿌리의 온도 T_0라면, w=1m당 휜으로부터의 전체 열전달률은

$$Q_{\max} = hA_{fin,total}(T_0 - T_\infty) = h(2wL/\cos\theta)(T_0 - T_\infty)$$
$$= (15\,W/m^2 \cdot K)[2(1m)(0.05m)/\cos 5.71^\circ](200 - 25)℃$$
$$= 263.8\,W$$

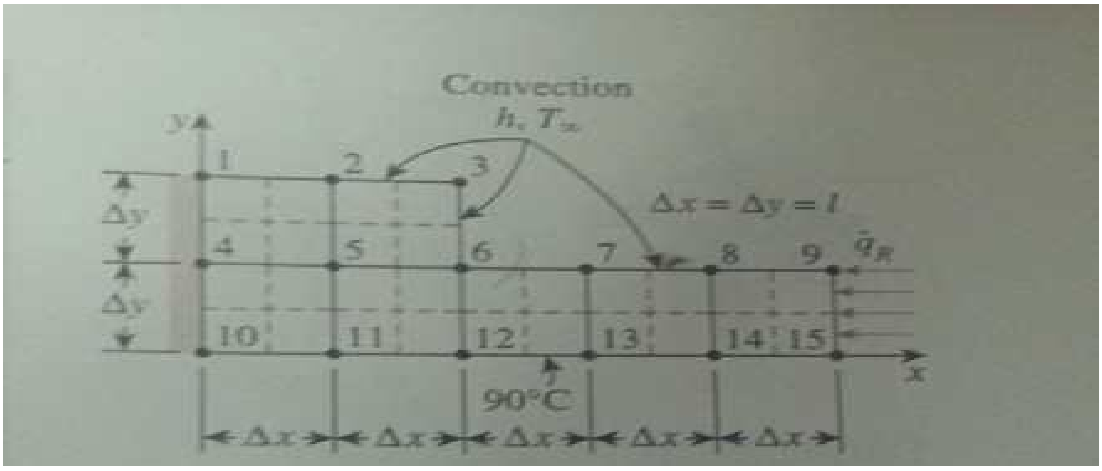
그러므로 휜 효율은 아래와 같이 구해진다.

$$\eta_{fin} = \frac{Q_{fin}}{Q_{\max}} = \frac{258.4\,W}{263.8\,W} = 0.98$$

이것은 우리가 예상하던대로 1보다 작은 값이다.

예제 5.3) L형 봉에서의 정상 2차원 열 전도도

다음 그림과 같은 L형 고체에서의 정상 열전달을 고려한다. 지면과 수직한 방향의 열전달은 무시 할 수 있으므로 2차원의 열전달이 일어난다. 각각의 절점에서의 온도를 구하라.



・문제로부터 주어진 물성치

$= 2 \quad 10 \ W/m^3$

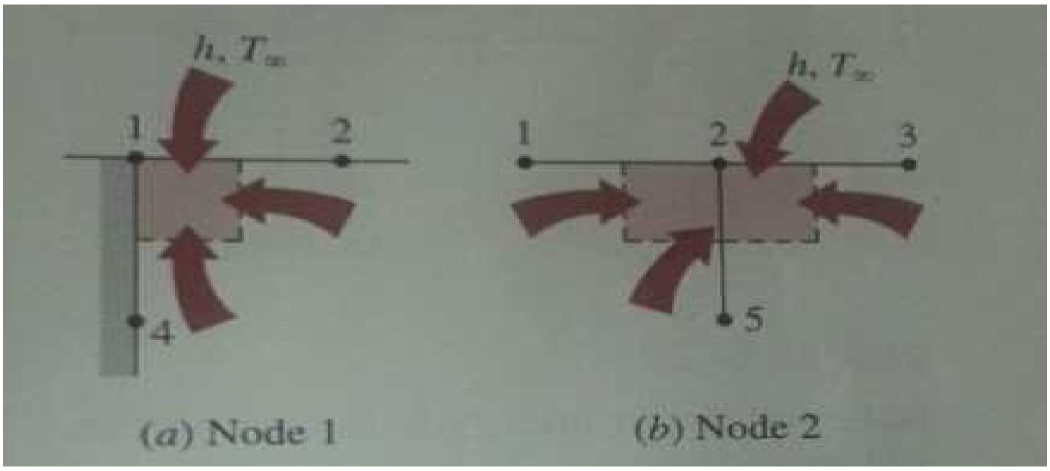
$k = 15\, W/m \bullet K$

$h = 80\, W/m^2 \bullet K$

$T_\infty = 25℃$

$\triangle x = \triangle y = 1.2 cm$

$q \quad = 5000\, W/m^2 4$



(a) Node 1 (b) Node 2

절점 1) 대류에 의한 열전달, node 2, 4, 에서의 열전도, 열발생의 영향을 받는다.

$$+h\frac{\triangle x}{2}(\quad - T_1) + k\frac{\triangle y}{2}\frac{T_{2} - T_1}{\triangle x} + k\frac{\triangle x}{2}\frac{T_{4} - T_1}{\triangle y} + e_1\frac{\triangle x}{2}\frac{\triangle y}{2} = 0$$

$\triangle x = \triangle y = l$ 로 놓으면

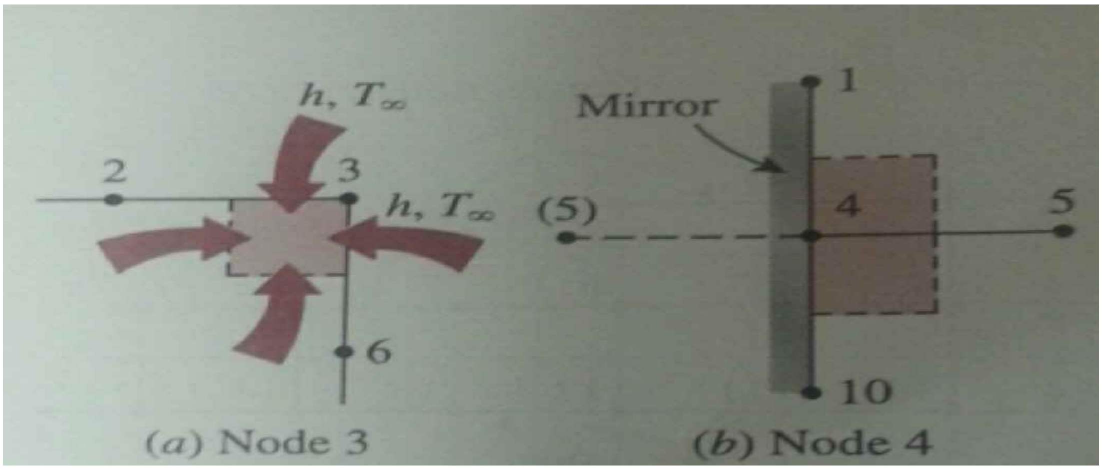
$$-(2+\frac{hl}{k})T_{1} + T_2 + T_4 = -\frac{hl}{k}T_\infty - \frac{e_1 l^2}{2k}$$ 로 정리 된다.

절점 2) 대류에 의한 열전달, node 1, 5, 3 에서의 전도, 열 발생의 영향을 받는다.

$$h\triangle x(T_\infty - T_2) + k\frac{\triangle y}{2}\frac{T_{3} - T_2}{\triangle x} + k\triangle x\frac{T_{5} - T_2}{\triangle y} + k\frac{\triangle y}{2}\frac{T_{1} - T_2}{\triangle y} + e_2\triangle x\frac{\triangle y}{2} = 0$$

$\triangle x = \triangle y = l$ 로 놓으면 다음과 같이 정리된다.

$$T_1 - (4+\frac{2hl}{k})T_2 + T_3 + 2T_5 = -\frac{2hl}{k}T_\infty - \frac{e_2 l^2}{k}$$



절점 3) 대류에 의한 열전달, node 2,6 에서의 전도, 열발생의 영향을 받는다.

$$h(\frac{\triangle x}{2} + \frac{\triangle y}{2})(T_\infty - T_3) + k\frac{\triangle x}{2}\frac{T_6 - T_3}{\triangle y} + k\frac{\triangle y}{2}\frac{T_2 - T_3}{\triangle x} + e_3\frac{\triangle x}{2}\frac{\triangle y}{2} = 0$$

$\triangle x = \triangle y = l$ 로 놓으면

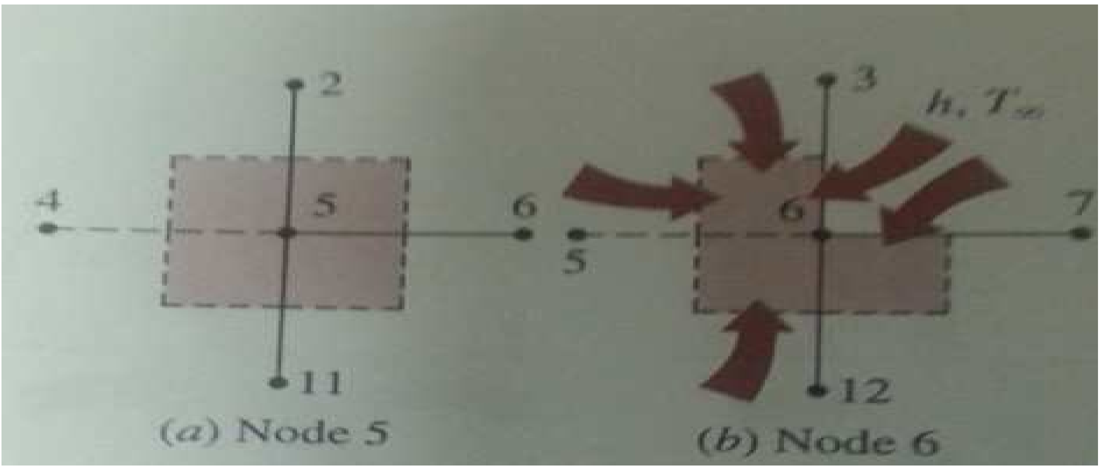
$$(2+\frac{2hl}{k})T_3+T_6=-\frac{2hl}{k}T_\infty-\frac{e_3l^2}{2k}$$

절점 4)경계가 단열되어있고, 단열면을 반사경으로 생각하면, node1,5,10 에 의한 전도와 열 발생의 영향을 받으므로.

$$T_5+T_1+T_5+T_{10}-4T_4+\frac{e_4l^2}{k}=0$$

$T_{10}=90℃$ 이므로 위의 식을 정리하면,

$$T_1-4T_4+2T_5=-90-\frac{e_4l^2}{k}$$



절점 5) node 2,4,6,11, 에 의한 전도와 열 발생의 영향을 받는다.

$$T_4+T_2+T_6+T_{11}-4T_5+\frac{e_4l^2}{k}=0$$

$T_{11}=90℃$ 이므로, 위 식은 다음과 같이 정리된다.

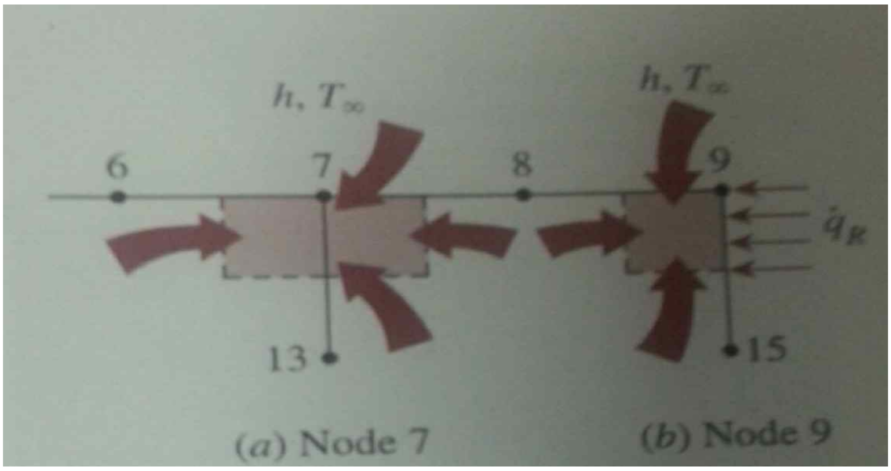
$$T_2+T_4-4T_5+T_6=-90-\frac{e_5l^2}{k}$$

절점 6) 대류에 의한 열전달, node 3,5,7,12 에 의한 전도와 열 발생의 영향을 받는다.

$$h(\frac{\triangle x}{2}+\frac{\triangle y}{2})(T_\infty-T_6)+k\frac{\triangle y}{2}\frac{T_7-T_6}{\triangle x}+k\triangle x\frac{T_{12}-T_6}{\triangle y}+k\triangle y\frac{T_5-T_6}{\triangle x}+k\frac{\triangle x}{2}\frac{T_3-T_6}{\triangle y}+e_6\frac{4\triangle x\triangle y}{3}=0$$

$\triangle \quad = \triangle y = l$ 로 놓으면

$$+2T_5 - (6 + \frac{2hl}{k})T_6 + T_7 = -180 - \frac{2hl}{k}T_\infty - \frac{3e_6 l^2}{2k}$$ 으로 정리,



절점 7) 대류에 의한 열전도, node 7,8,13, 에의한 전도, 열발생의 영향을 받는다

$$h\triangle x(T_\infty - T_7) + k\frac{\triangle y}{2}\frac{T_8 - T_7}{\triangle x} + k\triangle x\frac{T_{13} - T_7}{\triangle y} + k\frac{\triangle y}{2}\frac{T_6 - T_7}{\triangle x} + e_7\triangle x\frac{\triangle y}{2} = 0$$

$\triangle x = \triangle y = l$ 로 놓고 $T_{13} = 90℃$ 이므로, 다음과 같이 정리된다.

$$T_6 - (4 + \frac{2hl}{k})T_7 + T_8 = -180 - \frac{2hl}{k}T_\infty - \frac{e_7 l^2}{k}$$

절점 8) 절점 7의 경우와 같은 영향을 받으므로 절점의 숫자만 1씩 증가하게된다.

$$T_7 - (4 + \frac{2hl}{k})T_8 + T_9 = -180 - \frac{2hl}{k}T_\infty - \frac{e_8 l^2}{k}$$

절점 9) 열유속, 대류에 의한 열전달, node 8,15 에의한 전도, 열발생의 영향을 받는다.

$$h\frac{\triangle x}{2}(T_\infty - T_9) + q\frac{\triangle y}{2} + k\frac{\triangle x}{2}\frac{T_{15} - T_9}{\triangle y} + k\frac{\triangle y}{2}\frac{T_8 - T_9}{\triangle x} + e_9\frac{\triangle x}{2}\frac{\triangle y}{2} = 0$$

$\triangle x = \triangle y = l$ 로 놓고 $T_{15} = 90℃$ 이므로, 위 식은 다음과 같이 정리된다.

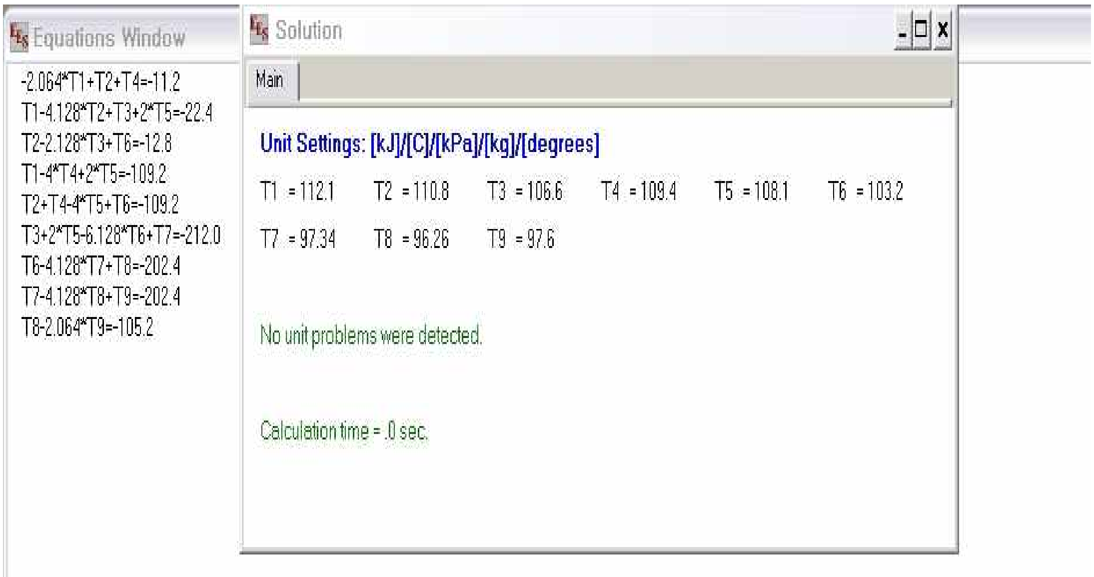
$$T_8 - (2 - \frac{hl}{k})T_9 = -90 - \frac{q_R l}{k} - \frac{hl}{k}T_\infty - \frac{e_9 l^2}{2k}$$

위에서 정리된 방정식으로부터, 주어진 물성치 들을 대입,

최종적으로 다음과 같은 9 개의 연립방정식을 만들 수 있다.

$$2.064 \quad + T_2 + T_4 = -11.2$$
$$T_1 - 4.128T_2 + T_3 + 2T_5 = -22.4$$
$$T_2 - 2.128T_3 + T_6 = -12.8$$
$$T_1 - 4T_4 + 2T_5 = -109.2$$
$$T_2 + T_4 - 4T_5 + T_6 = -109.2$$
$$T_3 + 2T_5 - 6.128T_6 + T_7 = -212.0$$
$$T_6 - 4.128T_7 + T_8 = -202.4$$
$$T_7 - 4.128T_8 + T_9 = -202.4$$
$$T_8 - 2.064T_9 = -105.2$$

EES program 사용, 9개의 연립방정식을 풀은 결과 다음과 같은 답을 얻을 수 있다.



예제 5.4) 굴뚝을 통한 열손실

굴뚝이 상하,좌우로 대칭구조를 가지고있으므로 그림과같이 점 1,2,3,4,5,6,7,8,9 의 온도를 구하면 전체 굴뚝의 온도를 구할 수 있다.

굴뚝은 콘크리트 $k=1.4\quad /m \cdot K$)로 만들어져있고 20cm X 20cm 이고 벽의 두께는 20cm이다.

굴뚝안 뜨거운 가스의 평균온도는 $T=300℃$ 이고 굴뚝안에서의대류열전달계수는

$h_i = 70\,W/m^2 \cdot K$이다.

굴뚝은 벽의 바깥 면으로부터

$T_0 = 20℃$, $h_0 = 21\,W/m^2 \cdot k$로 대류에 의하며 열을 빼앗기고, 복사에 의하여 대기로 열을 빼앗긴다.

방사율$\epsilon = 0.9$이고 유효대기온도는 260K로 측정되었다.

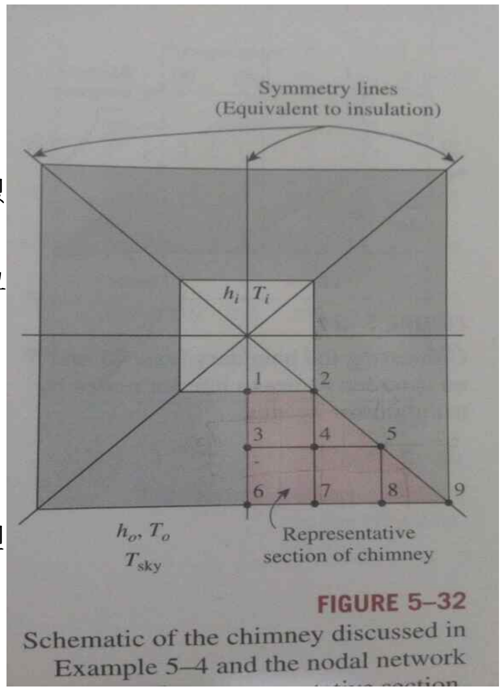


FIGURE 5–32
Schematic of the chimney discussed in Example 5–4 and the nodal network

$\triangle x = \triangle y = 10cm$로 유한차분법을 사용하고 대칭성을 이용하여 단면의 절점에서의 온도와 굴뚝 1m 길이에 대한 열손실률을 구하라.

(a) 절점 1. 내부 경계에 위치하여 대류가 일어난다.

$$0 + h_i \frac{\triangle x}{2}(T_i - T_1) + k\frac{\triangle y}{2}\frac{T_2 - T_1}{\triangle x} + k\frac{\triangle x}{2}\frac{T_3 - T_1}{\triangle y} + 0 = 0$$

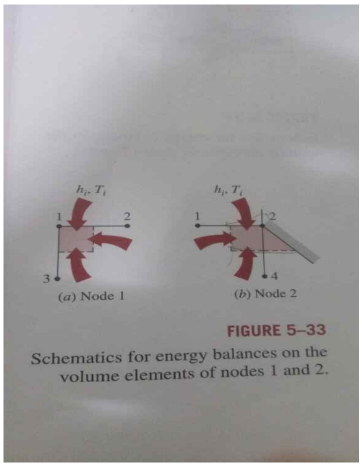


FIGURE 5–33
Schematics for energy balances on the volume elements of nodes 1 and 2.

$\triangle x = \triangle y = l$ 로 놓고, 간단히 하면

$$-(2 + \frac{h_i l}{k})T_1 + T_2 + T_3 = -\frac{h_i l}{k}T_i$$

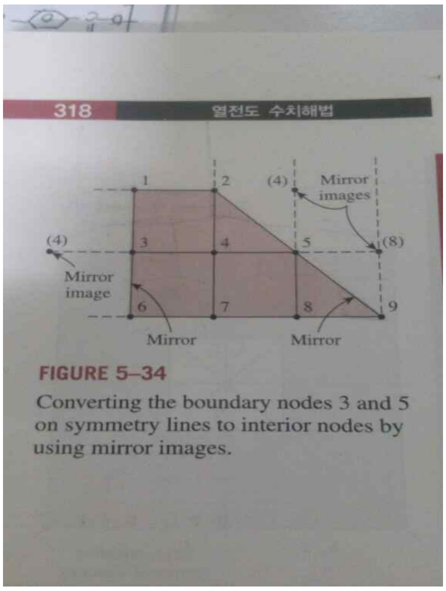
(b) 절점2. 내부 경계에 위치하여 대류가 일어난다.

$$k\frac{\triangle y}{2}\frac{T_1 - T_2}{\triangle x} + h_i\frac{\triangle x}{2}(T_1 - T_2) + 0 + k\triangle x\frac{T_4 - T_2}{\triangle y} = 0$$

$\triangle x = \triangle y = l$ 로 놓고, 간단히 하면

$$T_1 - (3 + \frac{h_i l}{k})T_2 + 2T_4 = -\frac{h_i l}{k}T_i$$

(c)절점 3,4,5(내부 절점)
반사상을 이용하여 대칭축 상에 있는 경계 절점 3,5를 내부 절점으로 변환한다.



절점3 : $T_1+T_4+T_6-4T_3=0$

절점4 : $T_3+T_2+T_5+T_7-4T_4=0$

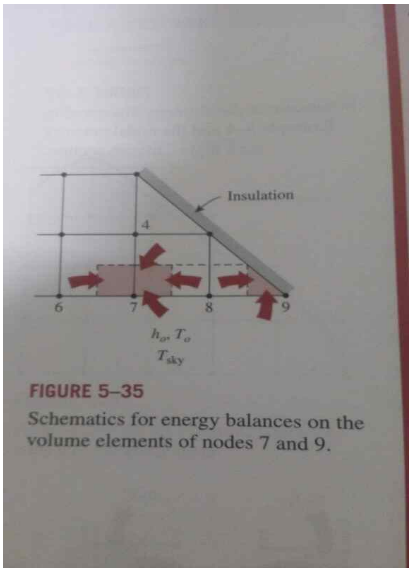
절점5 : $T_4+T_4+T_8+T_8-4T_5=0$

(d) 절점 6. 외부 경계에 위치하여 대류와 복사가 일어난다.

$$0+k\frac{\triangle x}{2}\frac{T_3-T_6}{\triangle y}+k\frac{\triangle y}{2}\frac{T_7-T_6}{\triangle x}$$
$$+h_0\frac{\triangle x}{2}(T_0-T_6)+\epsilon\sigma\frac{\triangle x}{2}(T_{sky}^4-T_6^4)=0$$

$\triangle x=\triangle y=l$로 놓고, 간단히 하면

$$T_2+T_3-(2+\frac{h_0 l}{k})T_6=-\frac{h_0 l}{k}T_0-\frac{\epsilon\sigma l}{k}(T_{sky}^4-T_6^4)$$



(e) 절점 7. 외부 경계에 위치하여 대류와 복사가 일어난다.

$$k\frac{\triangle y}{2}\frac{T_6-T_7}{\triangle x}+k\triangle x\frac{T_4-T_7}{\triangle y}+k\frac{\triangle y}{2}\frac{T_8-T_7}{\triangle x}$$
$$+h_0\triangle x(T_0-T_7)+\epsilon\sigma\triangle x(T_{sky}^4-T_7^4)=0$$

$\triangle x=\triangle y=l$로 놓고, 간단히 하면

$$2T_4+T_6-(4+\frac{2h_0 l}{k})T_7+T_8=-\frac{2h_0 l}{k}T_0-\frac{2\epsilon\sigma l}{k}(T_{sky}^4-T_7^4)$$

(f) 절점 8.절점 번호를 1만큼 증가시키면 (위의 관계식에서 4를5, 6을7, 7을8, 8을9 로 치환함) 절점 7과 동일하다.

$$+T_7-(4+\frac{2h_o l}{k})T_8+T_9=-\frac{2h_0 l}{k}T_0-\frac{2\epsilon\sigma l}{k}(T_{sky}^4-T_8^4)$$

(g) 절점 9. 외부 경계에 위치하여 대류와 복사가 일어난다.

$$k\frac{\triangle y}{2}\frac{T_8-T_9}{\triangle x}+0+h_0\frac{\triangle x}{2}(T_0-T_9)+\epsilon\sigma\frac{\triangle x}{2}(T_{sky}^4-T_9^4)=0$$

$\triangle x=\triangle y=l$ 로 놓고, 간단히 하면

$$T_8-(1+\frac{h_0 l}{k})T_9=-\frac{h_0 l}{k}T_0-\frac{\epsilon\sigma l}{k}(T_{sky}^4-T_9^4)$$

이문제는 절대온도를 사용해야 하는 복사를 포함하고 있으므로 모든 온도는 Kelvin으로 표시해야 한다.

그렇지 않으면 복사에 대한 항에 포함된 4개의 온도를 $(T+273)^4$형태로 표현하여 모든온도에 대하여 ℃를 사용할 수도 ldT다. 주어진 값을 대입하면, 9개의 미지의 절점 온도를 결정하기 위한 9개의 방정싞으로 이루어진 연립 방정식이 나오고, 이것을 반복법을 사용하기적당한 형태로 고치면

$$T_1=(T_2+T_3+2865)/7$$
$$T_2=(T_1+2T_4+2865)/8$$
$$T_3=(T_1+2T_4+T_6)/4$$
$$T_4=(T_2+T_3+T_5+T_7)/4$$
$$T_5=(2T_4+2T_8)/4$$
$$T_6=(T_2+T_3+456.2-0.3645\times10^{-9}T_6^4)/3.5$$
$$T_7=(2T_4+T_6+T_8+912.4-0.729\times10^{-9}T_7^4)/7$$
$$T_8=(2T_5+T_7+T_9+912.4-0.729\times10^{-9}T_8^4)/7$$
$$T_9=(T_8+456.2-0.3645\times10^{-9}T_9^4)/2.5$$

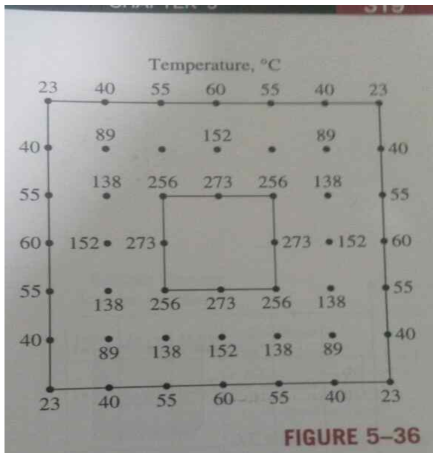


FIGURE 5–36
The variation of temperature in the chimney.

이것은 비선형 연립 방정식이다. 적절한 풀이방법에 의하여 해를 구하면

=545.7K=272.6℃ T_2=529.2K=256.1℃ T_3=425.2K=152.1℃

T_4=411.2K=138.0℃ T_5=362.1K=89.0℃ T_6=332.9K=59.7℃

T_7=328.1K=54.9℃ T_8=313.1K=39.9℃ T_9=296.5K=23.4℃

굴뚝에서의 온도의 변화가 그림에서처럼 보여지고 있다.

표면적에 의해 가중치를 고려하여 굴뚝의 외부 면에서의 평균온도를 구하면

$$T_{wall,out} \quad \frac{(0.5\,T_6 + T_7 + T_8 + 0.5\,T_9)}{(0.5+1+1+0.5)}$$

$$= \frac{0.5\times 332.9 + 328.1 + 313.1 + 0.5\times 296.5}{3} = 318.6K$$

그러면 굴뚝의 1m 길이의 단면을 통한 열손실률은 근사적으로 다음과 같이 결정될 수 있다.

$$Q_{\chi mney} = h_0 A_0 (T_{wall,out} - T_0) + \epsilon\sigma A_0 (T^4_{wall,out} - T^{4)}_{sky}$$
$$(21\,W/m^2 \bullet K)[4\times(0.6m)(1m)](318.6-293)K + 0.9(5.67\times 10^{-8}\,W/m^2 \bullet K^4)$$
$$[4\times(0.6m)(1m)][(318.6K)^4 - (260K)^4]$$
$$= 1291 + 702 = 1993\,W$$

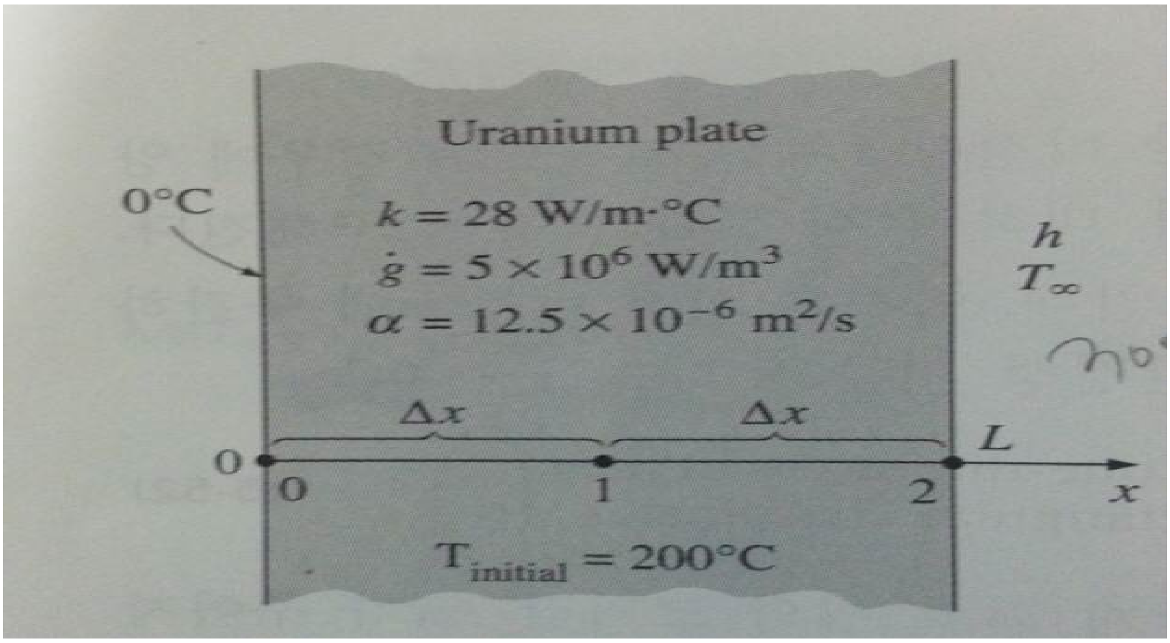
우리는 또한 이 열전달을 내부 벽에 대한 평균온도 (272.6+256.1)/2 =264.4℃로부터 그 표면에 Newton의 냉각 법칙을 적용하여 결정할 수 있다.

$$Q_{\chi mney} = h_i A_i (T_i - T_{wall,}\quad)$$
$$= (70\,W/m^2 \bullet K)[4\times(0.2m)(1m)](300-264.4)℃ = 1994\,W$$

이 두 결과의 차이는 수치해법의 근사성에 기인한다.

예제 5.5) 넓은 우라늄 금속판의 비정상 열전도

두께가 L=4cm 열전도도가 k=28W/m · C, 열 확산율이 α=12.5x 0 $^{6}\, m^2/s$ 인 넓은 우라늄 금속판이 일정한 초기 온도 200℃의 상태에 있다. 열은 금속판에서 g = 10^6 $/m^3$ t=0에서 금속판의 한 쪽 면은 얼음물에 접촉하고 있어 계속0℃로 대류가 일어난다. 매질 내에서 총3개의 같은 간격의 절점이, 두 개는 경계에 있고 한 개는 중앙에 있다고 생각하여 냉각을 시작한 지 2.5분 후에 금속판의 표면 온도를 (a) 양함수 법 (b) 음함수 법을 이용하여 예측하라.



• 문제에서 주어진 물성치

$\alpha = 12.5 \times 10^{-6} m^2/s$

$k = 28\, W/m$ • ℃

$\dot{q} = 5 \times 10^6\, W/m^3$

L=4cm

$h = 45\, W/m^2$ • K

여기서 문제는 비정상 상태이기 때문에 비정상 유한차분법의 적용하여 계산을 할 수 있다.

문제에서의 접점은 3개가 있기 때문에 M=3 이 되고 절점의 간격Δx는

$$\triangle x = \frac{L}{M-1} = \frac{0.04m}{3-1} = 0.02\, m$$

1. 양함수의 풀이

양함수(explicit) 방법으로 기본식을 정리하면,

① 절점 1을 기준으로 한 식 전개

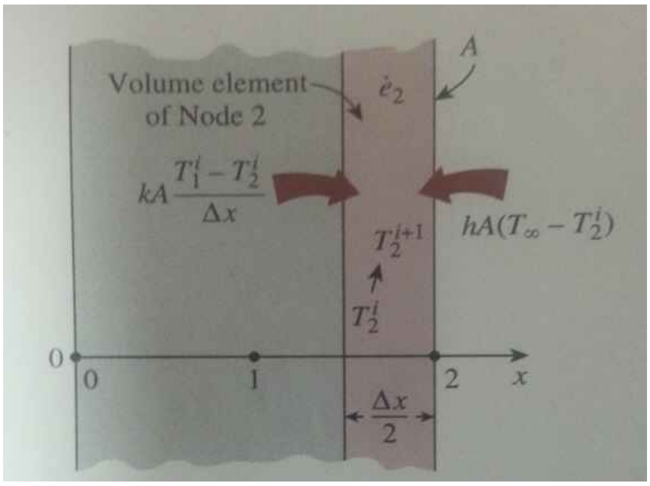
$^{i}_{-1} \quad 2T_m^i + T_{m+1}^i + \frac{g_m \triangle X^2}{k} = \frac{T_m^{i+1} - T_m^i}{\tau}$ 다음과 같은 식을 얻을 수 있게 된다.

위의 식을 T_m^{i+1}의 항으로 정리

$T_m^{i+1} = \tau(T_{m-1} + T_{m+1}^i) + (1-2\tau)T_1^i + \tau\frac{g_{1\triangle x}}{k}$ **이때, m=1 이므로 값을 대입**

$T_1^{i+1} = \tau(T_0 + T_2^i) + (1-2\tau)T_1^i + \tau\frac{g_{1\triangle}x^2}{k}$

② 절점 2를 기준으로 한 식 전개



대류에 의한 열전달과 열 발생, T1로 부터의 열전도에 대한 식을 전개하면

$hA(T_\infty - T_2^i) + kA\frac{T_1^i - T_2^i}{\triangle x} + g_2 A\frac{\triangle x}{2} = \rho A\frac{\triangle x}{2}C\frac{T_2^{i+1} - T_2^i}{\triangle x}$ 이와 같은 식을 얻을 수 있으며

T 의 i+1 의 항에 대해서 정리하면,

$T_2^{i+1} = (1-2\tau-2\tau\frac{h\triangle x}{k})T_2^i + \tau(2T_1^i + \frac{2h\triangle x}{k}T_\infty + \frac{g_2\triangle x^2}{k})$ 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

위의 첫 번째 식에서 양 변의 값을 $kA/2\triangle x$ 로 나누어 주고,

열 확산계수인 $= k/\rho$ **와 무차원 mesh Fourier number 를** $\tau = \alpha\triangle t/(\triangle x)$ **의 정의를 이용,**

$$\frac{2h\triangle x}{k}(T_\infty - T_2^i) + 2(T_1^i - T_2^i) + \frac{g_2\triangle x}{k} = \frac{T_2^{i+1} - T_2^i}{\tau}$$

T의 i+1 의 항으로 정리,

$$T_2^{i+1} = (1 - 2\tau - 2\tau\frac{h\triangle x}{k})T_2^i + \tau(2T_1^i + \frac{2h\triangle x}{k}T_\infty + \frac{g_2\triangle x^2}{k})$$

두 개의 방정식을 모두 구했으므로 다음은, 안정성 기준으로부터 시간의 상한선(최대 허용값)을 구해야 한다, 그러기 위해서는

식1번, 식2번에서 모두 T_1^i 계수와 T_2^i 의 계수가 0보다 크거나 같아야 한다
이 경우에서 T_2^i**의 계수가 더 작으므로 안정성의 기준은 다음과 같이 표현 된다.**

$$1 - 2\tau - 2\tau\frac{h\triangle x}{k} \geq 0 \;\rightarrow\; \tau \leq \frac{1}{2(1 + h\triangle x/k)} \quad\rightarrow\quad \triangle t \leq \triangle\frac{x^2}{2\alpha(1 + h\triangle x/k)}$$

여기서 주어진 값들을 대입하면, 시간 단계의 최대 허용치를 구할 수 있게 된다.

$$\triangle t \leq \frac{(0.02m)^2}{2(12.5\times10^{-6}m^2/s)[1 + (45\,W/m^2℃)(0.02m)/28\,W/m℃} = 15.5s$$

따라서 이 문제를 풀기위한 시간 단계 즉 $\triangle x$**는 15.5 초 미만이여야 하므로 시간 단계** $\triangle t = 15s$**로 지정,**

$\tau = \dfrac{\alpha\triangle t}{\triangle x^2} = \dfrac{(12.5\times10^{-6}m^{2/s})(15s)}{(0.02m)^2} = 0.46875$ **이므로 주어진 물성치 들을 대입하면,**

$$T_1^{i+1} = 0.0625\,T_1^i + 0.46875\,T_2^i + 33.482$$
$$T_2^{1+1} = 0.9375\,T_1^i + 0.032366\,T_2^i + 34.386$$

초기온도 $T_1^0 = 200℃$ $T_2^0 = 200℃$ 를 대입, 반복 계산하면 다음과 같은 값들을 얻을 수 있다.

t[s]	T1	T2
0	200	200

15	139.678	228.3592
30	149.2013	172.7252
45	123.718	179.8526
60	125.4663	156.1927
75	114.485	157.066
90	114.208	146.7993
105	109.3782	146.2073
120	108.7988	141.6602
135	106.6311	140.9699
150	106.1721	138.9153

위의 결과를 통해 냉각을 시작한지 2.5 분후의 경계표면의 온도는

^{10} 139.0℃ 임을 알 수 있다.

__2.음함수의 풀이__

implicit 방식은 양함수법과 다르게 시간단계를 i가 아닌, i+1 을 사용하여 표현 하면,

$T_{m-1}^{i+1} - 2T_m^{i+1} + T_{m+1}^{i+1} + \frac{g_m^{i+1} \triangle x^2}{k} = \frac{T_m^{i+1} - T_m^i}{\tau}$ 다음과 같이 정리 할수 있고, 양변에 τ를 곱하고 정리하면,

$\tau T_{m-1} - (1+2\tau)T_m^{i+1} + \tau T_{m+1}^{i+1} + \tau\frac{g_0 \triangle x^2}{k} + T_m^i = 0$ 이와 같은 식을 얻을 수 있다.

이때 절점1은 내부 절점이므로, m=1 에 관한 식으로 정리해보면,

$\tau T_0 - (1+2\tau)T_1^{i+1} + \tau T_2^{i+1} + \tau\frac{g_0 \triangle x^2}{k} + T_1^i = 0$ 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

절점 2는 대류가 일어나는 경계 절점이고, 그 절점에서의 음함수형 유한차분식 은 양함수형 식 에서 시간단계를 I 가 아닌 I+1 을 사용하여 표현할 수 있다.

$$\frac{2h\triangle x}{k}(T_\infty - T_2^{i+1}) + 2(T_i^{i+1} - T_2^{i+1}) + \frac{g_2 \triangle x^2}{k} = \frac{T_2^{i+1} - T_2^1}{\tau}$$

위의 식을 간단하게 정리하면,

$$\tau^{\ \ i+1} - (1+2\tau+2\tau\frac{h\triangle x}{k})T_2^{i+1} + 2\tau\frac{h\triangle x}{k}T_\infty + \tau\frac{g_2\triangle x^2}{k} + T_2^i = 0$$

문제 (a) 와 값을 비교하기위하여 $\triangle t = 15s$ **와 같이 지정 하게 되면**

$\tau = \dfrac{\alpha\triangle t}{(\triangle x)^2} = \dfrac{(12.5\times10^6 m^2/s)(15s)}{(0.02m)^2} = 0.46875 \quad (\mathrm{for}\triangle t = 15s)$ **이와 같은 값을 얻을 수 있다.**

주어진 물성치 들을 대입하면 다음과 같이 식이 정리된다

$$-1.9375T_1^{i+1} + 0.046875_2^{i+1} + T_1^i + 33.482 = 0$$
$$0.9375T_1^{i+1} - 1.9676T_2^{i+1} + T_2^i + 34.386 = 0$$

초기온도 $T_1^0 = 200℃$ $T_2^0 = 200℃$ 를 대입, 반복 계산하면 다음과 같은 값들을 얻을 수 있다.

t[s]	T1	T2
0	200	200
15	168.78	199.54
30	150.51	190.6
45	138.6	180.38
60	130.24	171.2
75	124.08	163.61
90	119.44	157.53
105	115.88	152.75
120	113.14	149.02
135	111.03	146.11
150	109.39	143.85

위의 결과를 통해 냉각을 시작한지 2.5 분후의 경계표면의 온도는

$T_2^{10} = 143.9℃$ 임을 알 수 있다.

예제5.6) Trombe Walls의 태양에너지 저장

Trombe walls라고 불리는 짙게 칠해진 두꺼운 벽돌 벽(masonry walls)은 수동형 태양열 주택(passive solar homes)의 남쪽 방향에서 낮에는 태양에너지를 흡수하여 저장하고 있다가 밤에는 집에 방출하는 데 흔하게 쓰인다.(그림5-46).이러한 생각은 1881년 메사추세츠의 E.L.Morse에 의해 제안되었으며, 이것을 1970년대 자신의 설계에 광범위하게 사용한 프랑스의 Felix Trombe 교수의 이름을 따서 지어졌다. 일반적으로 한겹 또는 두 겹의 유리가 벽의 바깥쪽에 있어 벽의 노출면으로부터 외부로의 열손실을 막으면서 대부부의 태양 에너지를 통과시킨다.또한 보통 Trombe wall의 위와 아래에 공기 구멍이 있어 집안의 공기가 Trombe Wall과 유리 사이의 평행류 홈(Parallel flow Channel)에 들어가고 이것이 가열되면 떠올라 윗부분의 구멍을 통해 방으로 들어가게 된다.

남쪽 벽면이 열전도도가 $=0.69\ \ /m\cdot$℃이고, 열확산율이 $\alpha=4.44\times10\ ^{7}m^2/s$인 두께 1 ft의 Trombe wall로 된 Nevada의 Reno에 위치한 어떤 주택을 생각해 보자. 표 5-4에는 1월의 한 전형적인 하루의 외부 온도 T_{out}과 낮 동안에 남향 수직면으로 입사하는 태양 열플럭스 $\dot{q}_{solar}$의 변화가 3시간 간격으로 주어져 있다. Trombe wall에는 흡수율-투과율의 비가 $k=0.77$(즉, 입사하는 태양 에너지의 77%가 Trombe wall의 노출면에서 흡수된다)인 한 겹의 유리가 있고, Trombe wall로부터 주위로 손실되는 일에 대한 평균 혼합 열전달계수는 $h_{out}=4\,W/m^2\cdot$℃이다. 집의 내부는 $T_{in}=21$℃로 항상 일정하게 유지되고 Trombe wall의 내부 표면에서의 열전달계수는 $h_{in}=10\,W/m^2\cdot$℃이다. 또한, Trombe wall의 공기 구멍은 막혀 있어서, 집안의 공기와 Trombe wall사이의 열전달은 벽의 내부면을 통해서만 일어난다. Trombe wall의 온도가 내부 표면의 온도 21℃와 오전 7시의 외부 표면 온도 -1℃사이에서 선형적으로 변화한다고 가정하고 일정한 절점 간격 $\triangle x=0.6cm$에 대한 양함수형 유한차분식을 사용하여 6시간 후의 Trombe wall 두께방향에 따른 온도 분포를 구하라. 또한, 첫째 날과 둘째 날 동안 Trombe wall로부터 집으로 전달된 순 열전달량(net amount of heat)을 구하라. 벽은 높이가 $3m$이고, 길이가 $7.5m$라고 가정한다.

***풀이과정**

풀이 Trombe wall을 통한 주택의 수동적 태양열 난방(passive solar heating)을 고려하고 있다.12시간 간격으로 벽에서의 온도 분포와 첫째 날과 둘째 날 동안의 열전달량을 구한다.

가정 1 벽의 노출된 표면은 두께에 비하여 크므로 1차원 열전달이다.
2 열전도도는 일정하다.
3 열전달계수는 일정하다.

물성치 벽의 상태량은 $k=0.69\,W/m\cdot$℃, $\alpha=4.44\times10^{-7}m^2/s$, $\kappa=0.77$로 주어졌다.

해석 절점의 간격은 $\triangle x=6cm$로 주어졌으므로 Trombe wall의 전체 절점 수는

$$M=\frac{L}{\triangle x}+1=\frac{30cm}{6cm}+1=6$$

그림 5-47에 보여진 바와 같이 Trombe wall의 내부 표면을 절점 0,외부 표면을 절점 5로 하

여 각 절점들에 0,1,2,3,4,5의 번호를 붙인다. 절점 1부터 4는 내부 절점이고, 이 절점들에 대한 양함수형 유한차분식은 식 5-47로부터 직접 구할 수 있다.

$$de\,1\,(m=1):\ T^{i+1} = \tau(T_0^i + T_2^i) + (1-2\tau)\,T_1^i$$
$$Node\,2\,(m=2):\ T_2^{i+1} = \tau(T_1^i + T_3^i) + (1-2\tau)\,T_2^i$$
$$Node\,3\,(m=3):\ T_3^{i+1} = \tau(T_2^i + T_4^i) + (1-2\tau)\,T_3^i$$
$$Node\,4\,(m=4):\ T_4^{i+1} = \tau(T_3^i + T_5^i) + (1-2\tau)\,T_4^i$$

내부 표면은 대류가 일어나므로, 절점 0의 양함수형 식은 식 5-51로부터 직접 구할 수 있다.

$$T_0^{i+1} = (1 - 2\tau - 2\tau\frac{h_{in}\triangle x}{k})\,T_0^i + 2\tau T_1^i + 2\tau\frac{h_{in}\triangle x}{k}\,T_{in}$$

시간에 따라 변화하지 않는 값 $h_{in}, \triangle x, k, T_{in}$을 위의 식에 대입하면

$$T_0^{i+1} = (1-3.74\tau)\,T_0^i + \tau(2\,T_1^i + 36.5)$$

Trombe wall의 외부 표면에서 열플럭스를 받을 뿐 아니라 대류도 발생한다. 그 경계에서의 양함수형 유한차분식은 절점 5에 대한 체적요소에 에너지 균형을 적용하면 구할 수 있다.

$$h_{out}A\,(T_{out}^i - T_5^i) + \kappa A q_{solar}^i + kA\,\frac{T_4^i - T_5^i}{\triangle x} = \rho A\,\frac{\triangle x}{2}\,c_p\,\frac{T_5^{i+1} - T_5^i}{\triangle t}$$

간단히 하면

$$T_5^{i+1} = (1 - 2\tau - 2\tau\frac{h_{out}\triangle x}{k})\,T_5^i + 2\tau T_4^i + 2\tau\frac{h_{out}\triangle x}{k}\,T_{out}^i + 2\tau\frac{\kappa \dot{q}_{solar}\triangle x}{k}$$

여기서 $\tau = \alpha\triangle t/\triangle x^2$은 무차원 mesh Fourier number이다. 우리는 시간에 따라 변화하는 값에 대하여 상첨자 i를 계속 사용하고 있다. 시간에 따라 변화하지 않는 값 $h_{out}, \triangle x, k, \kappa$를 위의 식에 대입하면

$$T_5^{i+1} = (1-2.70\tau)\,T_5^i + \tau(2\,T_4^i + 0.70\,T_{out}^i + 0.134\dot{q}_{solar})$$

여기서 $\dot{q}_{solar}$의 단위는 W/m^2이다.

우리는 양항수법을 사용하고 있으므로 다음에 우리는 안정성 기준으로부터 시간 간격 $\triangle$ 의 상한선을 구해야 한다. 그러기 위해서는 수식들에서 최소 기본 계수를 알아야 한다. 우리는 내부 절점보다 경계 절점이 더 제한적이라는 것을 알고 있으므로, 경계 절점 0과 5의 식에 대해서만 살펴본다.

이 경우에 $1-3.74\tau < 1-2.7\tau$이므로 최소의 기본 계수, 그래서 가장 제한적인 기본 계수는

절점 0의 식에 있는 ^{i}의 계수이다. 그러므로 이 문제에 대한 안정성 기준은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$-3.74\tau \geq 0 \rightarrow \tau = \frac{\alpha \triangle x}{\triangle x^2} \leq \frac{1}{3.74}$$

주어진 값을 대입하면 시간 단계의 최대 허용 수치는

$$\triangle t \leq \frac{\triangle x^2}{3.74\alpha} = \frac{(0.06m)^2}{3.74 \times (4.44 \times 10^{-7} m^2/s)} = 2168s$$

그러므로 이 문제를 풀기 위해서는 2168초 이하의 어떤 시간 단계라도 사용할 수 있다.
편의상 시간 단계를 Δt=900초=15분으로 선정하자. 그러면 mesh Fourier number는

τ=αΔtτ $= \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} = \frac{(4.44 \times 10^{-7} m^2/s)(900s)}{(0.06m^2)} = 0.111 \qquad (\text{for}\, \Delta t = 15\text{min})$

초기에(오전 7시 또는 t=0), 벽의 온도는 절점 0의 온도 21℃와 절점 5의 온도 -1℃사이에서 선형적으로 변화한다고 했다. 같은 길이의 5개의 절점간격이 있으므로, 두 개의 이웃한 절점간의 온도변화는 (21-(-1))℃/5=4.4℃이다. 그러므로 초기 절점 온도는

$T_0^0 = 21℃,\quad T_1^0 = 16.6℃,\quad T_2^0 = 12.2℃$
$T_3^0 = 7.8℃,\quad T_4^0 = 3.4℃,\quad T_5^0 = -1℃$

그러면 t=Δt=15분(오전 7:15)에서 절점온도는 위의 식으로부터 아래와 같이 구해진다.

$$\begin{aligned} T_0^1 &= (1 - 3.74\tau) T_0^0 + \tau(2T_1^0 + 36.5) \\ &= (1 - 3.74 \times 0.111)21 + 0.111(2 \times 16.6 + 36.5) \\ &= 20.0℃ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_1^1 &= \tau(T_0^0 + T_2^0) + (1 - 2\tau) T_1^0 \\ &= 0.111(21 + 12.2) + (1 - 2 \times 0.111)16.6 \\ &= 16.6℃ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_2^1 &= \tau(T_1^0 + T_3^0) + (1 - 2\tau) T_2^0 \\ &= 0.111(16.6 + 7.8) + (1 - 2 \times 0.111)12.2 \\ &= 12.2℃ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_3^1 &= \tau(T_2^0 + T_4^0) + (1 - 2\tau) T_3^0 \\ &= 0.111(12.2 + 3.4) + (1 - 2 \times 0.111)7.8 \\ &= 7.8℃ \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
{}^{1}\quad & \tau(T_3^0 + T_5^0) + (1-2\tau)T_4^0 \\
&= 0.111[7.8 + (-1)] + (1 - 2\times 0.111)3.4 \\
&= 3.4℃
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
T_5^1 &= (1-2.70\tau)T_5^0 + \tau(2T_4^0 + 0.70T_{out}^0 + 0.134\dot{q}_{solar}^0) \\
&= (1-2.70\times 0.111)(-1) + 0.111(2\times 3.4 + 0.70\times 0.6 + 0.134\times 360) \\
&= 5.5℃
\end{aligned}
$$

첫 번째 시간 단계 동안 내부 절점은 같은 온도로 남아 있지만, Trombe wall 내부 표면의 온도는 1℃ 떨어졌고 외부표면의 온도는 6.5℃ 상승했다. 이것은 열발생이 없는 매질의 전형적인 비정상 문제이다. 다음 시간 단계에서의 절점의 온도는 컴퓨터를 이용하여 유사한 방법으로 구해진다. 주위 온도와 입사하는 태양복사에 대한 데이터는 12시간 단계(time step)에 해당하는 매 3시간 마다 변화하므로 이것을 컴퓨터 프로그램에 반영해야한다. 예를 들어, $\dot{q}_{solar}^{i}$의 값은 $i=1-12$에 대하여 $\dot{q}_{solar}^{i}$=360, $i=13-24$에 대하여 $\dot{q}_{solar}^{i}$=763, $i=25-36$에 대하여 562, $i=37-96$에 대하여 $\dot{q}_{solar}^{i}$=0이어야 한다.

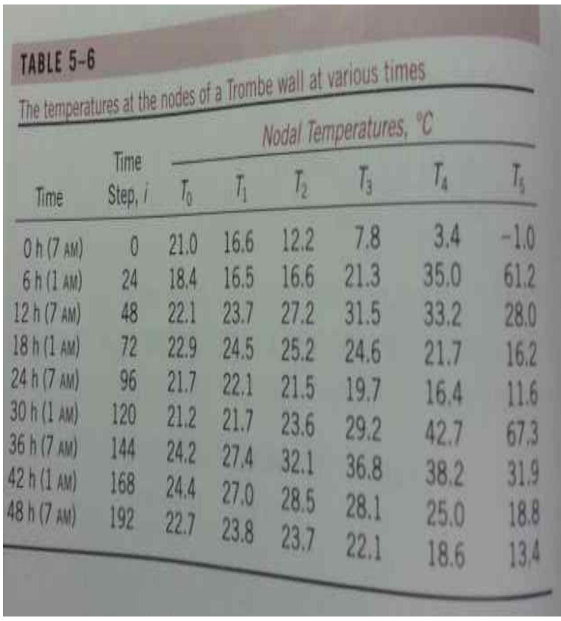


TABLE 5-6

The temperatures at the nodes of a Trombe wall at various times

		Nodal Temperatures, °C					
Time	Time Step, i	T_0	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5
0 h (7 AM)	0	21.0	16.6	12.2	7.8	3.4	-1.0
6 h (1 AM)	24	18.4	16.5	16.6	21.3	35.0	61.2
12 h (7 AM)	48	22.1	23.7	27.2	31.5	33.2	28.0
18 h (1 AM)	72	22.9	24.5	25.2	24.6	21.7	16.2
24 h (7 AM)	96	21.7	22.1	21.5	19.7	16.4	11.6
30 h (1 AM)	120	21.2	21.7	23.6	29.2	42.7	67.3
36 h (7 AM)	144	24.2	27.4	32.1	36.8	38.2	31.9
42 h (1 AM)	168	24.4	27.0	28.5	28.1	25.0	18.8
48 h (7 AM)	192	22.7	23.8	23.7	22.1	18.6	13.4

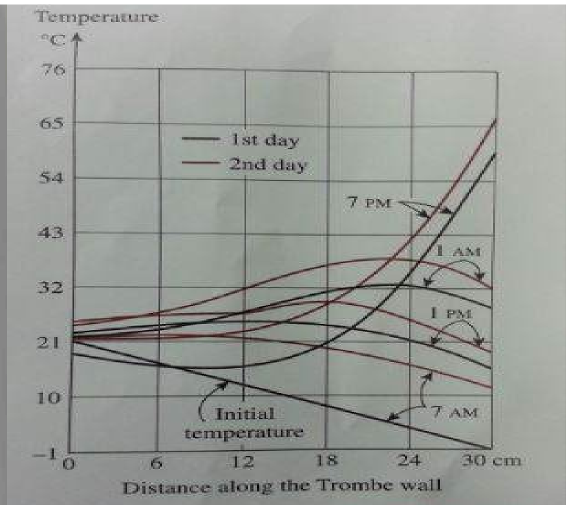


FIGURE 5–48

The variation of temperatures in the Trombe wall discussed in Example 5–6.

6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48시간 후의 결과가 표 5-5에 주어졌고, 첫째 날에 대한 결과가 그림 5-48에 출력되어있다. Trombe wall의 내부 온도는 이른 아침 시간에 떨어지고, 외부 표면에 흡수된 태양에너지가 벽을 통해 확산할 때 온도는 상승한다. Trombe wall의 외부 표면온도는 태양에너지 흡수로 인하여 6시간 만에 -1℃에서 61.2℃까지 상승하지만, 그 후에 다음날 아침까지 밤 동안의 열손실로 인하여 11.6℃로 떨어진다. 그러므로 열손실을 최소화하기 위하여 밤에는 외부표면을 덮어두는 것이 좋다.
각 시간 단계 동안 Trombe wall로부터 집 내부로의 열전달률은 벽(절점 0)의 내부 표면에서의 평균온도를 사용하여 Newton의 법칙을 적용하면 구해진다,

$$
\begin{aligned}
{}^{i}{}_{ombe\,wall} \quad & \dot{Q}^{i}_{Trombe\,wall}\Delta t \\
&= h \;\; A(T^{i}_{0} - T_{\in})\Delta t \\
&= h_{\in}A[(T^{i}_{0} - T^{i-1}_{0})/2 - T_{\in}]\Delta t
\end{aligned}
$$

그러므로 첫 시간단계 $i=1$) 즉 첫 15분 동안의 열전달량은

$$
\begin{aligned}
Q^{1}_{Trombe\,wall} &= h_{\in}A[(T^{1}_{0} + T^{0}_{0})/2 - T_{\in}]\triangle t \\
&= (10\,W/m^{2} \bullet ℃)(3\times 7.5m^{2})[(20.0+21)/2 - 21℃](900s) \\
&= -101{,}250J
\end{aligned}
$$

음의 부호는 열이 집안의 공기로부터 Trombe wall로 전달되었음을 가리키는데 이것은 열손실을 나타낸다. 그 다음 주어진 기간 동안의 전체 열전달은 각 시간 단계에 대한 열전달량을 더하면 구해진다.

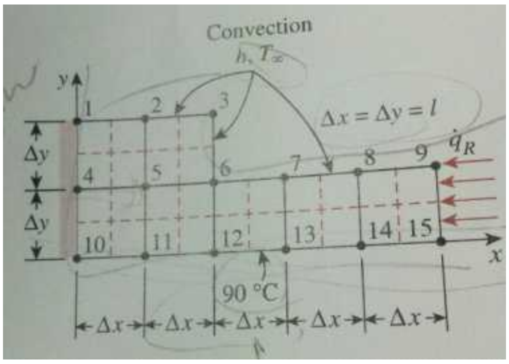
$$
Q_{Trombe\,wall} = \overset{I}{\underset{i=1}{}} \dot{Q}^{i}_{Trombe\,wall} = \sum_{i=1}^{I} h_{\in}A[(T^{i}_{0} + T^{i-1}_{0})/2 - T_{\in}]\triangle t
$$

여기서 I은 주어진 기간에서의 전체 시간 간격수이다. 이 경우에 12h에 대해서는 I=48, 24h에 대해서는 I=96 등이다. 컴퓨터를 사용하여 위에서 설명한 방법을 적용하면 Trombe wall과 집 내부간의 열전달량은

${}_{ombe\,wall} = -16{,}559kJ$ after 12h (16,559kJ loss during the first 12h)
$Q_{Trombe\,wall} = -785kJ$ after 24h (785kJ loss during the second 12h)
$Q_{Trombe\,wall} = 7{,}923kJ$ after 36h (7,923kJ gain during the third 12h)
$Q_{Trombe\,wall} = 37{,}729kJ$ after 48h (37,729kJ gain during the fourth 12h)

그러므로 집은 낮은 초기온도에서 하루를 시작하는 첫째 날은 Trombe wall을 통하여 785kJ의 열을 잃게 되지만 둘째날은 총 38,514kJ의 열을 집에 공급하게 된다. 더 높은 평균온도에서 하루를 시작하는 셋째 날 동안 Trombe wall은 더 많은 열을 집에 공급할 것이다.

예제5.7) L형 봉(L-bars)에서의 비정상 2차원 열전도



90

$\dot{g}_m = 2*10^6 W/m^3$

$k = 15 W/m*k$

$\alpha = 23.2*10^{-6} m^2/s$

왼쪽면은 단열,

아랫면은 90도씨로 유지,

오른쪽 면은 $\dot{g} = 5000 W/m^2$의 일정한 속도로 열플럭스 공급,

윗면은 $T_\infty = 25$인 외부와 대류.

$h = 80 W/m^2*k$

$\triangle x = \triangle y = 1.2cm$인 15개의 절점으로 구성

양함수법을 사용하여 1,3,5,10,60분 후 절점3의 온도를 구하라.

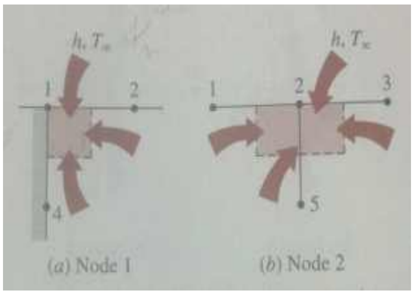
풀이 양함수형 유한차분식은 비정상상태에 대한 에너지 균형으로부터 다음과 같이 표현된다.

$$\sum_{all\,sides} \dot{Q} + \dot{G}_{element} = \rho V_{element} C \frac{T_m^{i+1} - T_m^i}{\Delta t}$$

(a) 절점1.

$$h\frac{\triangle x}{2}(T_\infty - T_1^i) + k\frac{\triangle y}{2}\frac{T_2^i - T_1^i}{\triangle x} + k\frac{\triangle x}{2}\frac{T_4^i - T_1^i}{\triangle y} + e_1\frac{\triangle x}{2}\frac{\triangle y}{2} = \rho\frac{\triangle x}{2}\frac{\triangle y}{2}c_p\frac{T_1^{i+1} - T_1^i}{\triangle t}$$

k/4로 나누고 간단히 하면



(a) Node 1
(b) Node 2

$$\frac{2hl}{k}(T_\infty - T_1^i) + 2(T_2^i - T_1^i) + 2(T_4^i - T_1^i) + \frac{e_1 l^2}{k} = \frac{T_1^{i+1} - T_1^i}{\tau}$$

이것을 T_1^{i+1}에 대하여 풀면

$$T_1^{i+1} = (1 - 4\tau - 2\tau\frac{hl}{k})T_1^i + 2\tau(T_2^i + T_4^i + \frac{hl}{k}T_\infty + \frac{e_1 l^2}{2k})$$

(b) 절점2.

$$h\triangle x(T_\infty - T_2^i) + k\frac{\triangle y}{2}\frac{T_3^i - T_2^i}{\triangle x} + k\triangle x\frac{T_5^i - T_2^i}{\triangle y} + k\frac{\triangle y}{2}\frac{T_1^i - T_2^i}{\triangle x} + e_2\triangle x\frac{\triangle y}{2} = \rho\triangle x\frac{\triangle y}{2}c_p\frac{T_2^{i+1} - T_2^i}{\triangle t}$$

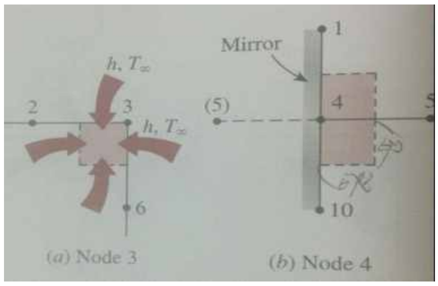
k/2로 나누어 간단히 하고, T_2^{i+1}에 대하여 풀면

$$T_2^{i+1} = (1 - 4\tau - 2\tau\frac{hl}{k})T_2^i + \tau(T_1^i + T_3^i + 2T_5^i + \frac{2hl}{k}T_\infty + \frac{e_2 l^2}{2k})$$

(c)절점3.

$$(\frac{\triangle x}{2}+\frac{\triangle y}{2})(\quad -T_3^i)+k\frac{\triangle x}{2}\frac{T_6^i-T_3^i}{\triangle y}+k\frac{\triangle y}{2}\frac{T_2^i-T_3^i}{\triangle x}+e_3\frac{\triangle x}{2}\frac{\triangle y}{2}=\rho\frac{\triangle x}{2}\frac{\triangle y}{2}c_p\frac{T_3^{i+1}-T_3^i}{\triangle t}$$

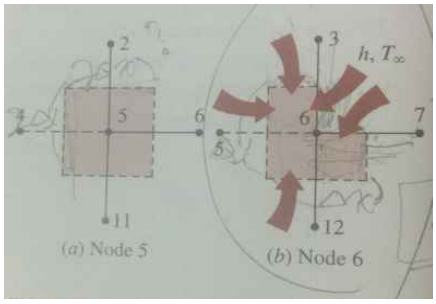
k/4로 나누어 간단히 하고, T_3^{i+1}에 대하여 풀면



$$T_3^{i+1}=(1-4\tau-4\tau\frac{hl}{k})T_3^i+2\tau(T_2^i+T_6^i+\frac{2hl}{k}T_\infty+\frac{e_3l^2}{2k})$$

(d)절점4.단열된 경계상의 절점이므로 내부절점으로 취급가능.
$T_{10}=90$이므로,

$$T_4^{i+1}=(1-4\tau)T_4^i+\tau(T_1^i+T_5^i+90+\frac{e_4l^2}{2k})$$



(e)절점5.
내부절점이고, $T_{11}=90$이므로,

$$T_5^{i+1}=(1-4\tau)T_5^i+\tau(T_2^i+T_4^i+T_6^i+{}^i90+\frac{e_5l^2}{2k})$$

(f)절점6. 두 면에서 대류가 일어나는 경계이므로,

$$h(\frac{\triangle x}{2}+\frac{\triangle y}{2})(T_\infty-T_6^i)+k\frac{\triangle y}{2}\frac{T_7^i-T_6^i}{\triangle x}+k\triangle x\frac{T_{12}^i-T_6^i}{\triangle y}+k\triangle y\frac{T_5^i-T_6^i}{\triangle x}+\frac{\triangle x}{2}\frac{T_3^i-T_6^i}{\triangle y}+e_6\frac{3\triangle x\triangle y}{4}=\rho\frac{3\triangle x\triangle y}{4}c_p\frac{T_6^{i+1}-T_6^i}{\triangle t}$$

3k/4로 나누어 간단히 하고, T_6^{i+1}에 대하여 풀면

$$T_6^{i+1}=(1-4\tau-4\tau\frac{hl}{3k})T_3^i+\frac{\tau}{3}[2T_3^i+4T_5^i+2T_7^i+4*90+4\frac{hl}{k}T_\infty+3\frac{e_6l^2}{k}]$$

(g)절점7. 대류가 일어나는 경계이므로,

$$h\triangle x(T_\infty-T_7^i)+k\frac{\triangle y}{2}\frac{T_8^i-T_7^i}{\triangle x}+k\triangle x\frac{T_{13}^i-T_7^i}{\triangle y}+k\frac{\triangle y}{2}\frac{T_6^i-T_7^i}{\triangle x}+e_7\triangle x\frac{\triangle y}{2}=\rho\triangle x\frac{\triangle y}{2}c_p\frac{T_7^{i+1}-T_7^i}{\triangle t}$$

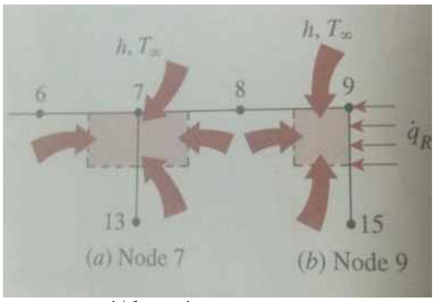
k/2로 나누어 간단히 하고, T_7^{i+1}에 대하여 풀면

$$T_7^{i+1}=(1-4\tau-2\tau\frac{hl}{k})T_7^i+\tau[T_6^i+T_8^i+2*90+2\frac{hl}{k}T_\infty+\frac{e_7l^2}{k}]$$

(h)절점8. 이 절점은 절점7과 같고 유한차분식은 절점7의식에서 절점번호를 1만큼 증가시키면 됨.

$$^{i+1} \quad (1-4\tau-2\tau\frac{hl}{k})T_8^i+\tau[T_7^i+T_9^i+2*90+2\frac{hl}{k}T_\infty+\frac{e_8 l^2}{k}]$$

(i)절점9. 두 면에서 대류가 일어나는 절점이므로,



$$h\frac{\triangle x}{2}(T_\infty-T_9^i)+q\frac{\triangle y}{2}+k\frac{\triangle x}{2}\frac{T_{15}^i-T_9^i}{\triangle y}+k\frac{\triangle y}{2}\frac{T_8^i-T_9^i}{\triangle x}+e_9\frac{\triangle x}{\triangle y}=\rho\frac{\triangle x\triangle y}{4}c_p\frac{T_9^{i+1}-T_9^i}{\triangle t}$$

k/4로 나누어 간단히 하고, T_9^{i+1}에 대하여 풀면,

$$T_9^{i+1}=(1-4\tau-2\tau\frac{hl}{k})T_9^i+2\tau[T_8^i+90+\frac{q_R l}{k}+\frac{hl}{k}T_\infty+\frac{e_9 l^2}{2k}]$$

이제 모든 유한차분식을 완성했다. 이제 시간단계의 상한선을 결정하자. 위의 식들 중 최소 기본계수는 T_3^{i+1}에 대한 식에서 T_3^i의 계수이므로,

$$1-4\tau-4\tau\frac{hl}{k}\geq 0\rightarrow\tau\leq\frac{1}{4(1+hl/k)}\rightarrow\triangle t\leq\frac{l^2}{4\alpha(1+hl/k)}$$

주어진 값을 대입하면,

$$\triangle t\leq\frac{(0.0012)^2}{4(3.2*10^{-6})[1+80*0.0012/15]}=10.6s$$

따라서 $\triangle t=10s$로 선정. 그러면 mesh Fourier수는

$$\tau=\frac{\alpha\triangle t}{l^2}=\frac{(3.2*10^{-6})*10}{0.012^2}=0.222$$

이 τ값과 다른 주어진값을 차분식에 대입하면,

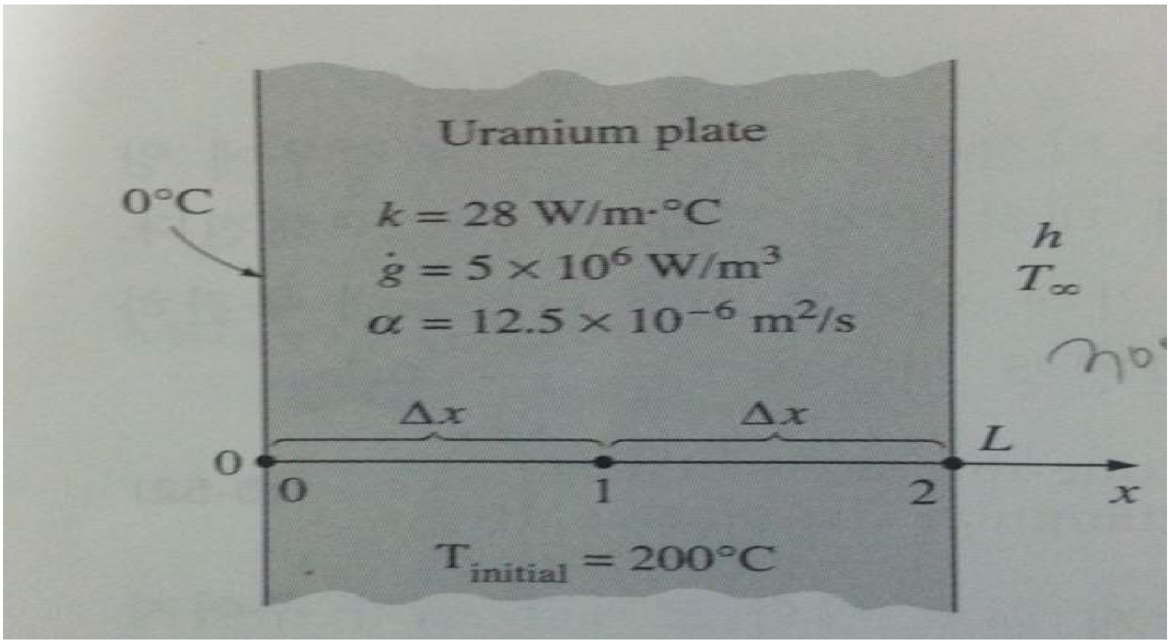
$$T_1^{i+1}=0.0836T_1^i+0.444(T_2^i+T_4^i+11.2)$$
$$T_2^{i+1}=0.0836T_2^i+0.222(T_1^i+T_3^i+2T_5^i+22.4)$$
$$T_3^{i+1}=0.0552T_3^i+0.444(T_2^i+T_6^i+12.8)$$
$$T_4^{i+1}=0.112T_4^i+0.222(T_1^i+2T_5^i+109.2)$$
$$T_5^{i+1}=0.112T_5^i+0.222(T_2^i+T_4^i+T_6^i+109.2)$$
$$T_6^{i+1}=0.0931T_6^i+0.074(2T_3^i+4T_5^i+2T_7^i+424)$$
$$T_7^{i+1}=0.0836T_7^i+0.222(T_6^i+T_8^i+202.4)$$
$$T_8^{i+1}=0.0836T_8^i+0.222(T_7^i+T_9^i+202.4)$$
$$T_9^{i+1}=0.0836T_1^i+0.444(T_8^i+105.2)$$

주어진 초기조건을 t=0에 대한 해로 사용하여 위의 9개의 방정식에 대하여 풀면 10초간격의 해를 얻을 수 있다. 절점3의 해는 1,3,5,10,60분에 대하여 각각 100.2, 105.9 106.5 106.6 106.6이 된다. 마지막 세 개의 해는 변화가 거의 없는데 이것은 매질이 약 5분 후에 정상상태에 도달함을 의미한다.

예제 5-8) SS-T-Conduct 소프트웨어를 이용한 비정상 1차원 열전도 문제의 풀이

넓은 우라늄 금속판의 비정상 열전도

두께가 L=4cm 열전도도가 k=28W/m · C, 열 확산율이 α=12.5x $0^{6}\,m^2/s$ 인 넓은 우라늄 금속판이 일정한 초기 온도 200℃의 상태에 있다. 열은 금속판에서 g = 10^6 $/m^3$ t=0에서 금속판의 한 쪽 면은 얼음물에 접촉하고 있어 계속0℃로 대류가 일어난다. 매질 내에서 총3개의 같은 간격의 절점이, 두 개는 경계에 있고 한 개는 중앙에 있다고 생각하여 냉각을 시작한지 2.5분 후에 금속판의 표면 온도를 (a) 양함수 법 (b) 음함수 법을 이용하여 예측하라.



위의 문제를 도식화 하면 다음과 같은 그림으로 나타낼 수 있다.

여기서 문제는 비정상 상태이기 때문에 비정상 유한차분법의 적용하여 계산을 할 수 있다.

문제에서의 접점은 3개가 있기 때문에 M=3 이 되고 절점의 간격Δx는

$$\triangle x = \frac{L}{M-1} = \frac{0.04m}{3-1} = 0.02\,m$$

1. 양함수의 풀이

양함수(explicit) 방법으로 기본식을 정리하면,

① 절점 1을 기준으로 한 식 전개,

$$^{i}_{-1} \quad 2T^{i}_{m} + T^{i}_{m+1} + \frac{g_m \triangle X^2}{k} = \frac{T^{i+1}_{m} - T^{i}_{m}}{\tau}$$ 다음과 같은 식을 얻을 수 있게 된다.

위의 식을 T^{i+1}_{m}의 항으로 정리

$$T^{i+1}_{m} = \tau(T_{m-1} + T^{i}_{m+1}) + (1-2\tau)T^{i}_{1} + \tau\frac{g_{1\triangle x}}{k}$$ **이때, m=1 이므로 값을 대입**

$$T^{i+1}_{1} = \tau(T_0 + T^{i}_{2}) + (1-2\tau)T^{i}_{1} + \tau\frac{g_{1\triangle}x^2}{k}$$

② 절점 2를 기준으로 한 식 전개

대류에 의한 열전달과 열 발생, T1로 부터의 열전도에 대한 식을 전개하면

$$hA(T_\infty - T^{i}_{2}) + kA\frac{T^{i}_{1} - T^{i}_{2}}{\triangle x} + g_2 A\frac{\triangle x}{2} = \rho A\frac{\triangle x}{2}C\frac{T^{i+1}_{2} - T^{i}_{2}}{\triangle x}$$ 이와 같은 식을 얻을 수 있으며

T 의 i+1 의 항에 대해서 정리하면,

$$T^{i+1}_{2} = (1 - 2\tau - 2\tau\frac{h\triangle x}{k})T^{i}_{2} + \tau(2T^{i}_{1} + \frac{2h\triangle x}{k}T_\infty + \frac{g_2\triangle x^2}{k})$$ 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

위의 첫 번째 식에서 양 변의 값을 $kA/2\triangle x$ 로 나누어 주고,

열 확산계수인 $\alpha = k/\rho C$ 와 무차원 mesh Fourier number 를 $\tau = \alpha\triangle t/(\triangle x)^2$의 정의를 이용,

$$\frac{2h\triangle x}{k}(T_\infty - T^{i}_{2}) + 2(T^{i}_{1} - T^{i}_{2}) + \frac{g_2\triangle x}{k} = \frac{T^{i+1}_{2} - T^{i}_{2}}{\tau}$$

T의 i+1 의 항으로 정리,

$$T^{i+1}_{2} = (1 - 2\tau - 2\tau\frac{h\triangle x}{k})T^{i}_{2} + \tau(2T^{i}_{1} + \frac{2h\triangle x}{k}T_\infty + \frac{g_2\triangle x^2}{k})$$

두 개의 방정식을 모두 구했으므로 다음은, 안정성 기준으로부터 시간의 상한선(최대 허용값)을 구해야 한다, 그러기 위해서는

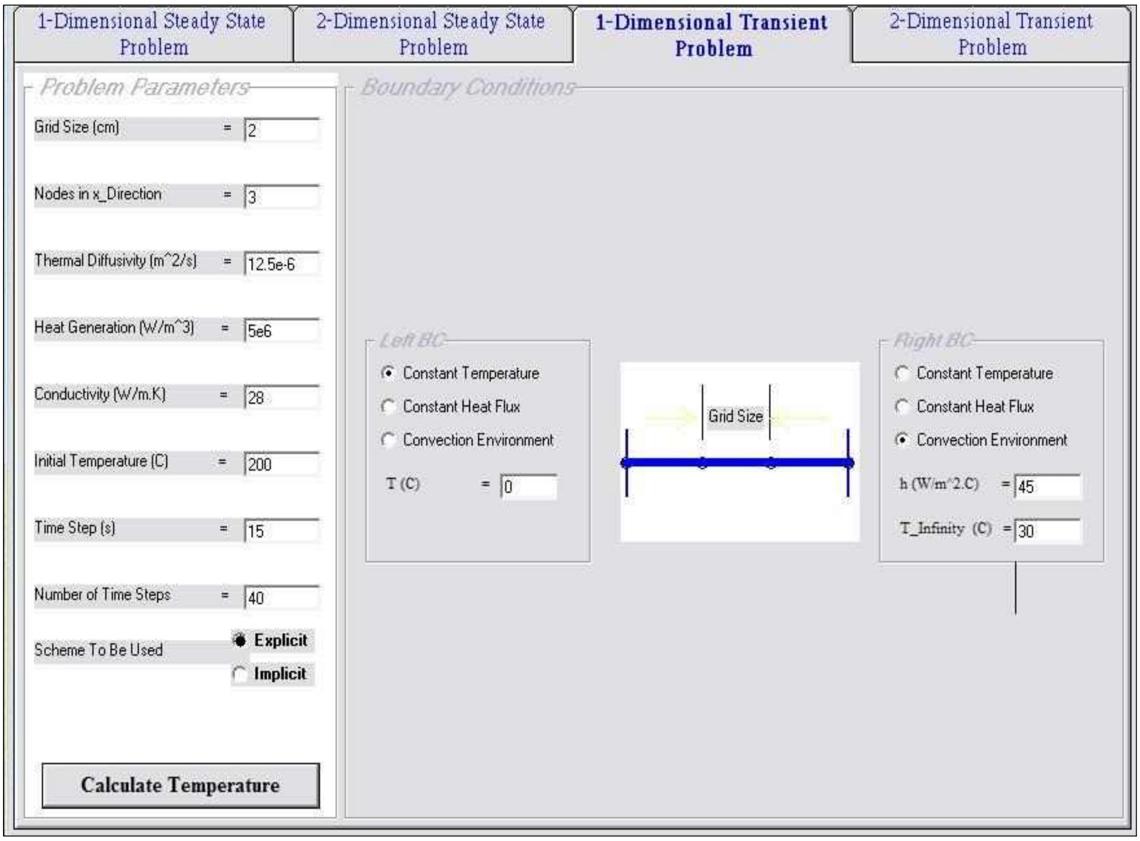
식1번, 식2번에서 모두 ^{i} 계수와 T_2^i 의 계수가 보다 크거나 같아야 한다
이 경우에서 T_2^i **의 계수가 더 작으므로 안정성의 기준은 다음과 같이 표현 된다.**

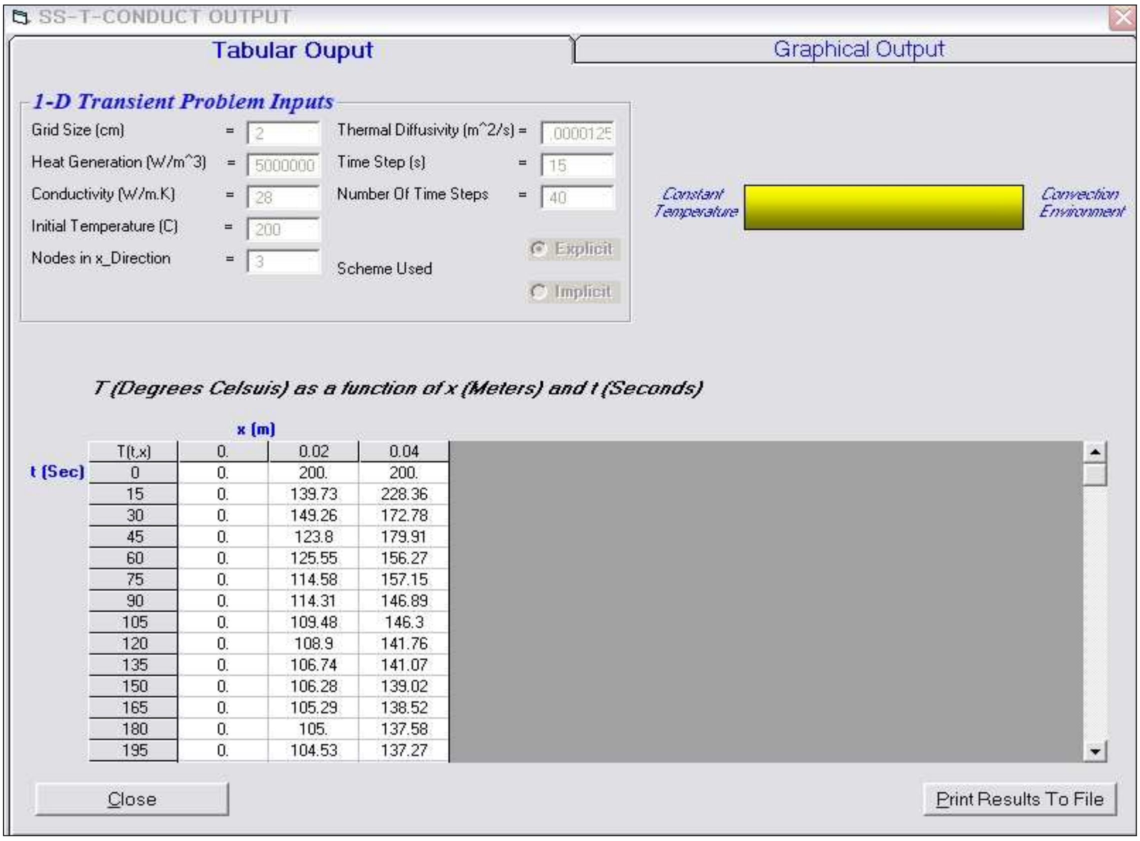
$$1-2\tau-2\tau\frac{h\triangle x}{k} \geq 0 \;\rightarrow\; \tau \leq \frac{1}{2(1+h\triangle x/k)} \;\rightarrow\; \triangle t \leq \triangle\frac{x^2}{2\alpha(1+h\triangle x/k)}$$

여기서 주어진 값들을 대입하면, 시간 단계의 최대 허용치를 구할 수 있게 된다.

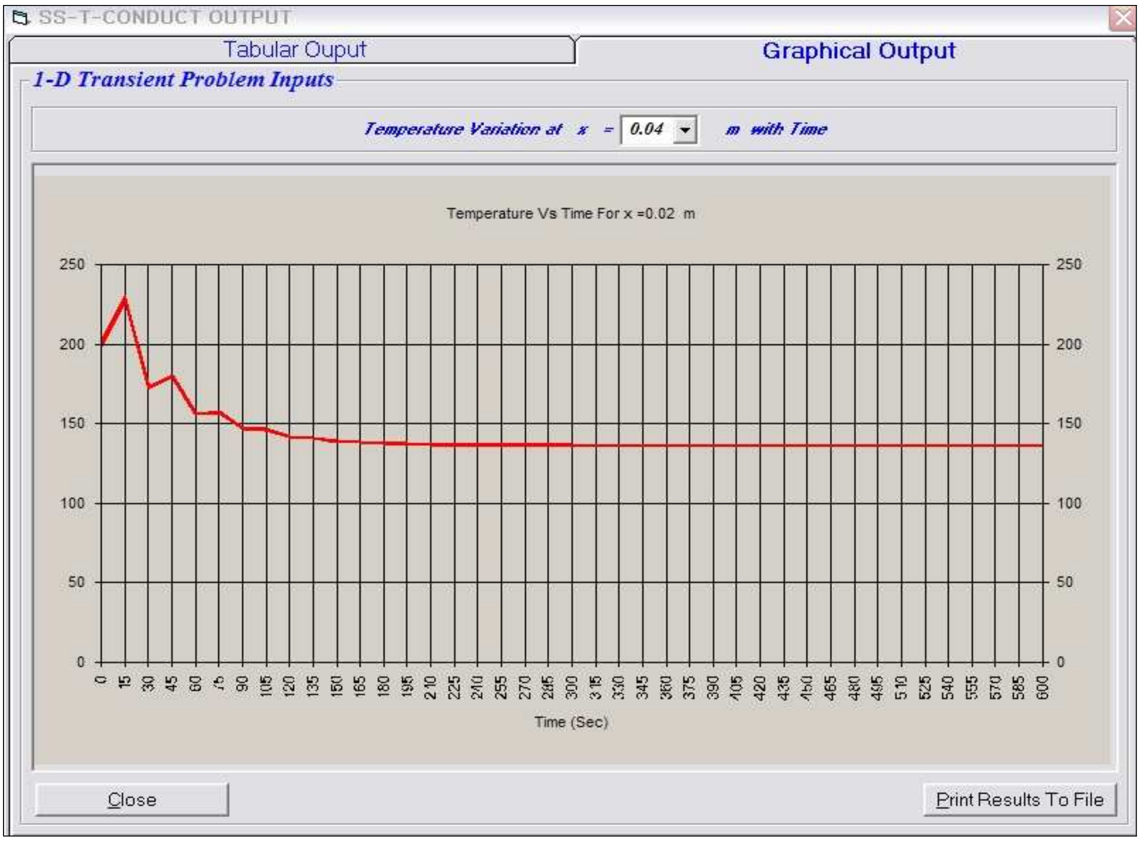
$$\triangle t \leq \frac{(0.02m)^2}{2(12.5\times 10^{-6}m^2/s)[1+(45\,W/m^2℃)(0.02m)/28\,W/m℃} = 15.5s$$

따라서 이 문제를 풀기위한 시간 단계 즉 $\triangle x$는 15.5 초 미만이여야 하므로 시간 단계를 15s 로 지정 한 다음 문제를 해결할 것이다





T(t,x)	0.	0.02	0.04
0	0.	200.	200.
15	0.	139.73	228.36
30	0.	149.26	172.78
45	0.	123.8	179.91
60	0.	125.55	156.27
75	0.	114.58	157.15
90	0.	114.31	146.89
105	0.	109.48	146.3
120	0.	108.9	141.76
135	0.	106.74	141.07
150	0.	106.28	139.02
165	0.	105.29	138.52
180	0.	105.	137.58
195	0.	104.53	137.27



2.음함수의 풀이

implicit 방식은 양함수법과 다르게 시간단계를 i가 아닌, i+1 을 사용하여 표현 하면,

$^{i+1}_{-1} \quad 2T_m^{i+1} \ + T_{m+1}^{i+1} + \dfrac{g_m^{i+1}\triangle x^2}{k} = \dfrac{T_m^{i+1} - T_m^i}{\tau}$ 다음과 같이 정리 할수 있고, 양변에 τ를 곱하고 정리하면,

$\tau T_{m-1} - (1+2\tau)T_m^{i+1} + \tau T_{m+1}^{i+1} + \tau\dfrac{g_0\triangle x^2}{k} + T_m^i = 0$ 이와 같은 식을 얻을 수 있다.

이때 절점1은 내부 절점이므로, m=1 에 관한 식으로 정리해보면,

$\tau T_0 - (1+2\tau)T_1^{i+1} + \tau T_2^{i+1} + \tau\dfrac{g_0\triangle x^2}{k} + T_1^i = 0$ 다음과 같은 식을 얻을 수 있다. **(식3)**

절점 2는 대류가 일어나는 경계 절점이고, 그 절점에서의 음함수형 유한차분식 은 양함수형 식 에서 시간단계를 I 가 아닌 I+1 을 사용하여 표현할 수 있다.

$$\frac{2h\triangle x}{k}(T_\infty - T_2^{i+1}) + 2(T_i^{i+1} - T_2^{i+1}) + \frac{g_2\triangle x^2}{k} = \frac{T_2^{i+1} - T_2^1}{\tau}$$

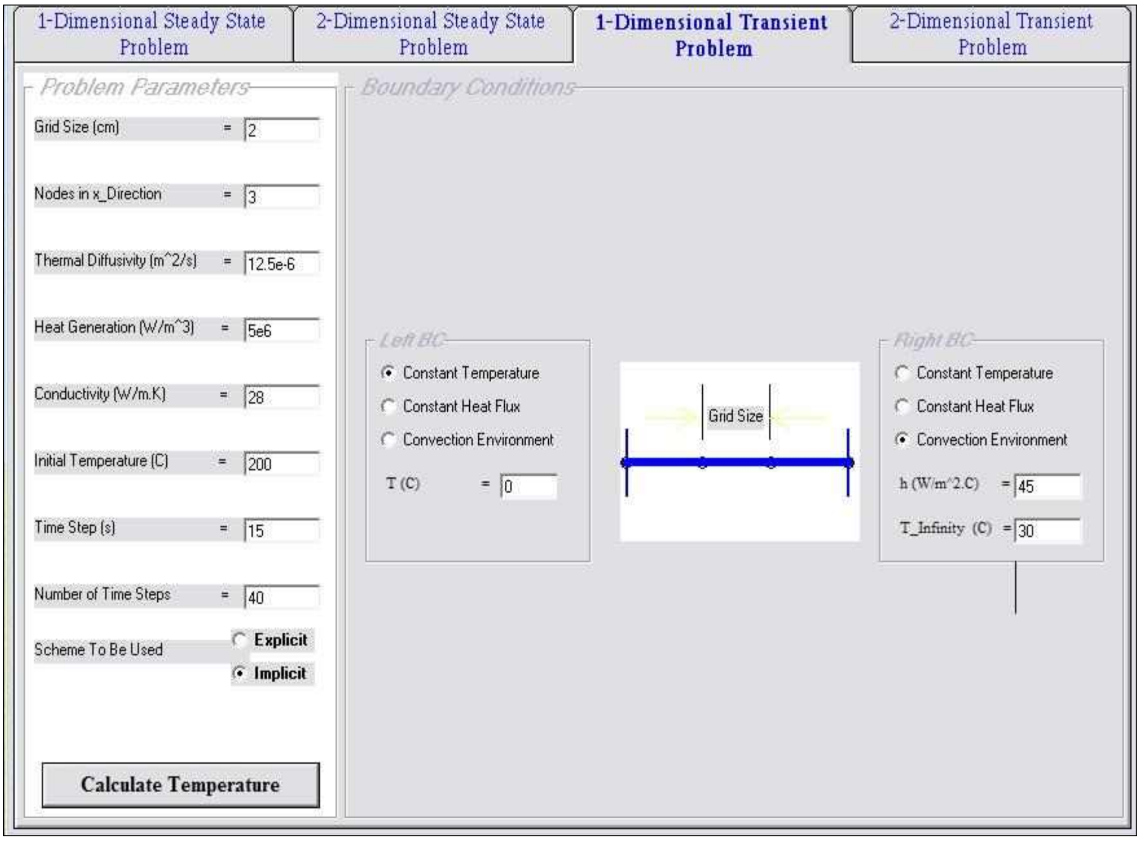
위의 식을 간단하게 정리하면,

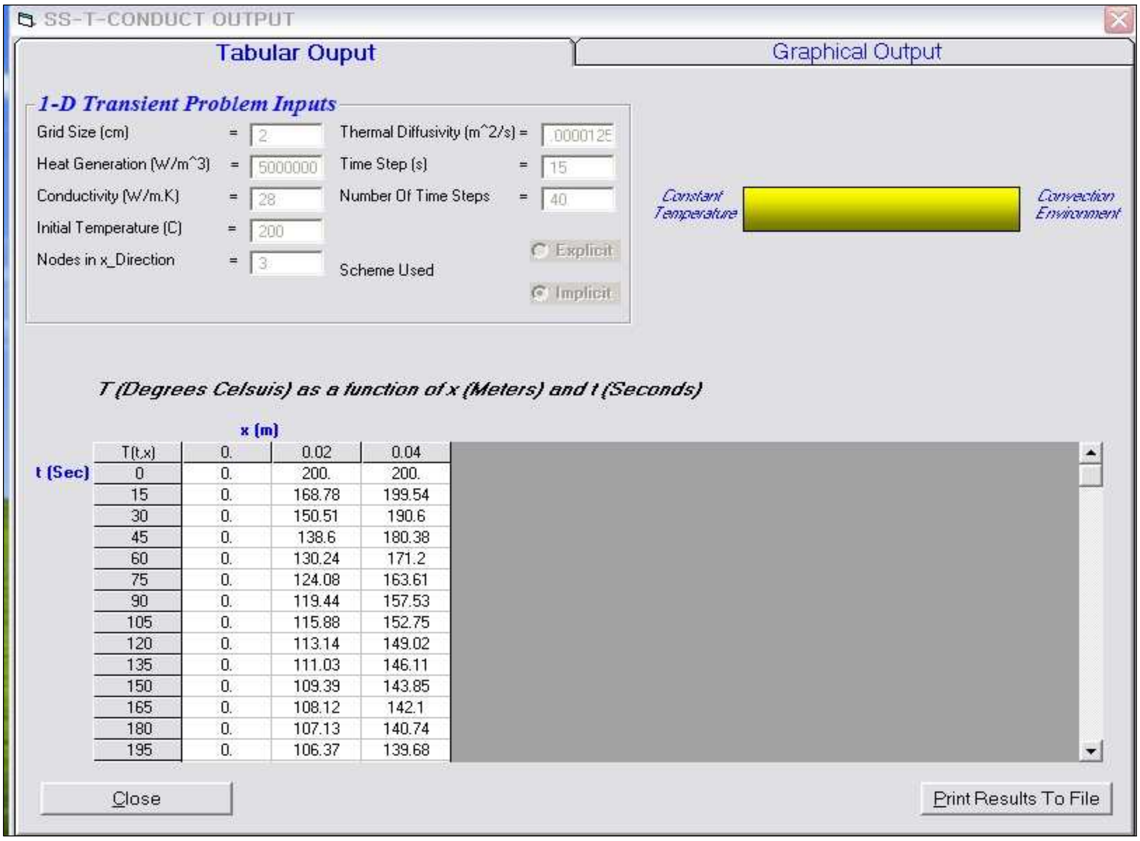
$2\tau T_1^{i+1} - (1+2\tau+2\tau\dfrac{h\triangle x}{k})T_2^{i+1} + 2\tau\dfrac{h\triangle x}{k}T_\infty + \tau\dfrac{g_2\triangle x^2}{k} + T_2^i = 0$ **(식4)**

음함수 법은 양함수 법과 다르게 시간에 대한 제한이 없으므로 원하는 어떠한 값을 이용 할 수 있다.

하지만, 문제 (a) 와 값을 비교하기위하여 $\triangle t = 15s$ **와 같이 지정 하게 되면**

$\tau = \dfrac{\alpha\triangle t}{(\triangle x)^2} = \dfrac{(12.5\times 10^6 m^2/s)(15s)}{(0.02m)^2} = 0.46875 \quad (\mathrm{for}\triangle t = 15s)$ **이와 같은 값을 얻을 수 있다.**



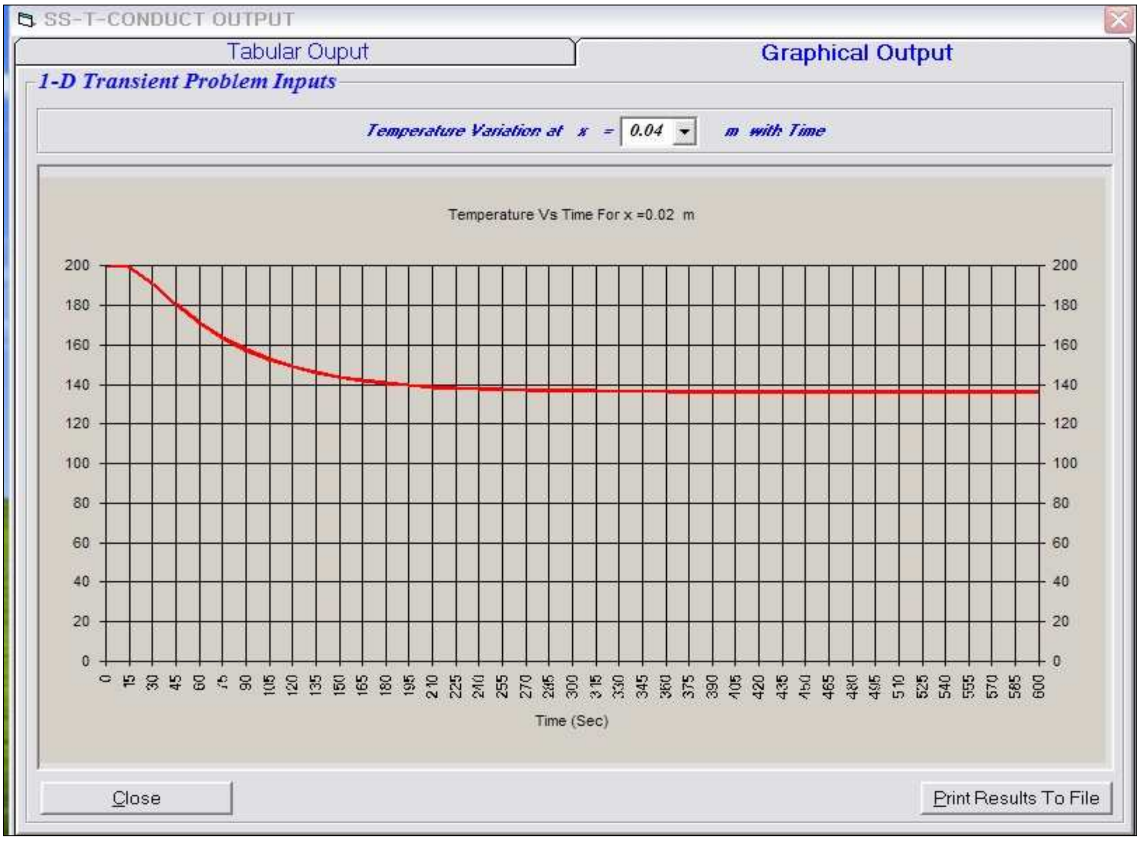


T (Degrees Celsuis) as a function of x (Meters) and t (Seconds)

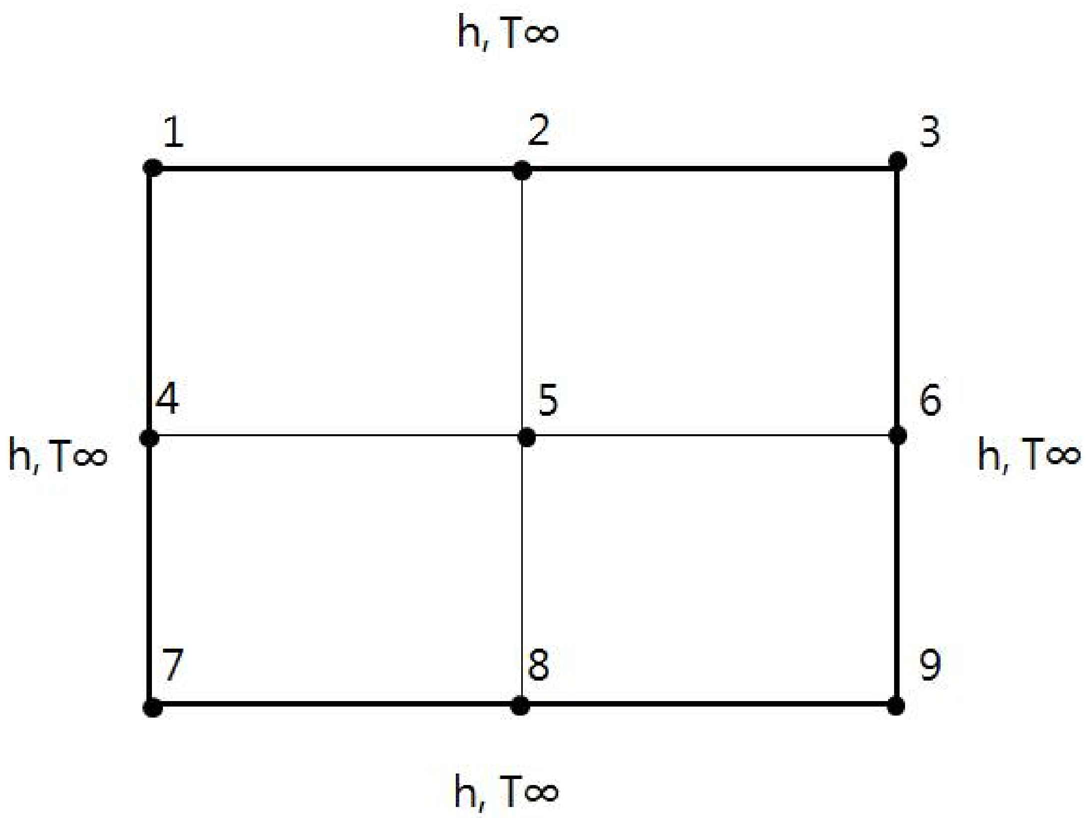
x (m)

t (Sec)

T(t,x)	0.	0.02	0.04
0	0.	200.	200.
15	0.	168.78	199.54
30	0.	150.51	190.6
45	0.	138.6	180.38
60	0.	130.24	171.2
75	0.	124.08	163.61
90	0.	119.44	157.53
105	0.	115.88	152.75
120	0.	113.14	149.02
135	0.	111.03	146.11
150	0.	109.39	143.85
165	0.	108.12	142.1
180	0.	107.13	140.74
195	0.	106.37	139.68


SS-T-CONDUCT OUTPUT
Tabular Ouput
Graphical Output
1-D Transient Problem Inputs
Temperature Variation at x = 0.04 m with Time
Temperature Vs Time For x =0.02 m
Time (Sec)
Close
Print Results To File

예제 5.9) SS-T-Conduct 소프트웨어를 이용한 비정상 1차원 열전도 문제의 풀이



양함수 유한차분법 이용
a) 20분 후 봉 중앙에서의 온도
b) 정상상태가 된 후 봉 중앙에서의 온도

대칭에 의해
T1=T3=T7=T9, T2=T4=T6=T8
따라서 T1,T2,T5만 구하면 된다.

$$\sum_{Allside} \dot{Q}^i + \dot{e} V_{element} = \rho V_{element} c_p \frac{T_m^{i+1} - T_m^i}{\Delta t}$$

$$T_1^{i+1} = (1 - 4\tau - \frac{4\tau hl}{k}) T_1^i + 2\tau(2T_2^i + 2\frac{hl}{k} T_\infty + \frac{\dot{e}_1 l^2}{2k})$$

$$T_2^{i+1} = (1 - 4\tau - \frac{2\tau hl}{k}) T_2^i + \tau(2T_1^i + 2T_5^i + 2\frac{hl}{k} T_\infty + \frac{\dot{e}_2 l^2}{2k})$$

$$T_5^{i+1} = (1-4\tau)T_5^i + \tau(4T_2^i + \frac{\dot{e}_5 l^2}{k})$$

Node1에 4/k를 곱하면

$$\frac{4hl}{k}(T_\infty - T_1^i) + 2(T_2^i - T_{1)}^i + 2(T_4^i - T_{1)}^i + \frac{\dot{e}l^2}{k} = \frac{T_1^{i+1} - T_1^i}{\tau}$$

$$T_1^{i+1} = \frac{4hl\tau}{k}T_\infty - \frac{4hl\tau}{k}T_1^i + 2\tau T_2^i - 2\tau T_1^i + 2\tau T_4^i - 2\tau T_1^i + \frac{\tau\dot{e}l^2}{k} + T_1^i$$

$$T_1^{i+1} = (1 - 4\tau - \frac{4\tau hl}{k})T_1^i + 2\tau(T_2^i + T_4^i + 2\frac{hl}{k}T_\infty + \frac{\dot{e}_1 l^2}{2k})$$

$^{i} = T_4^i)$ 이므로

$$T_1^{i+1} = (1 - 4\tau - \frac{4\tau hl}{k})T_1^i + 2\tau(2T_2^i + 2\frac{hl}{k}T_\infty + \frac{\dot{e}_1 l^2}{2k})$$

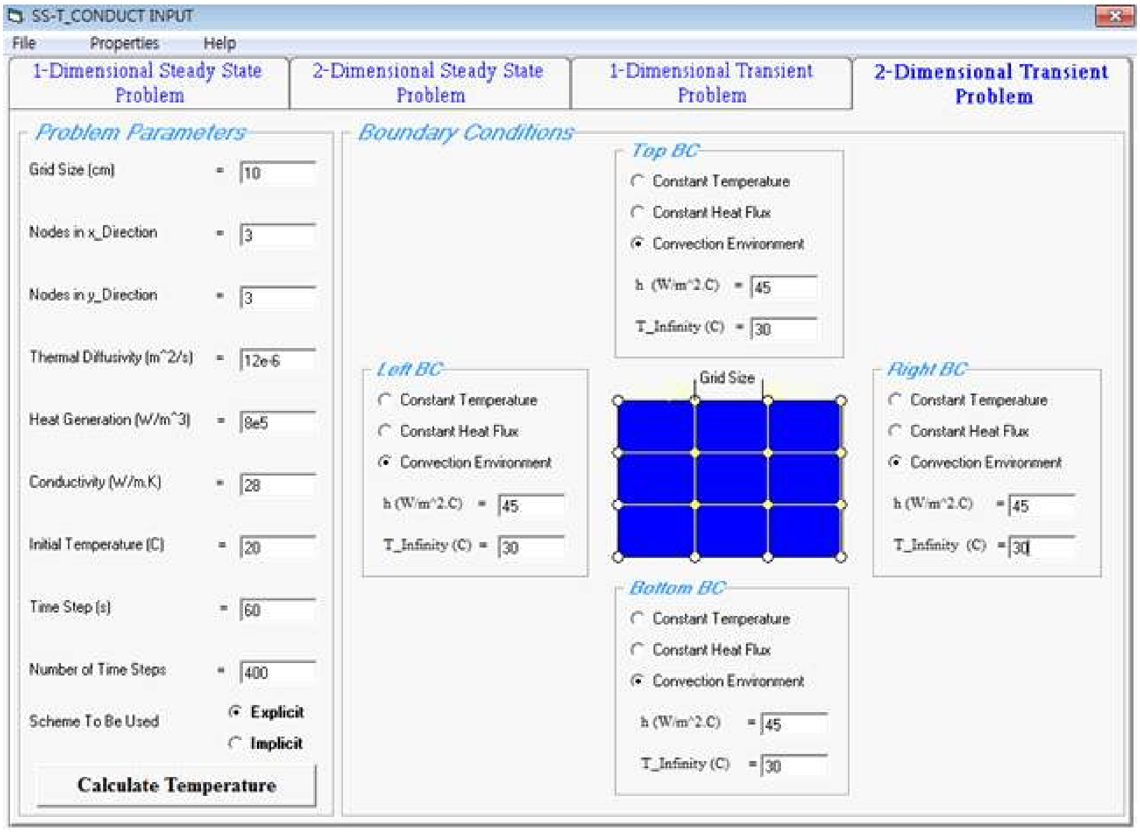
$$1 - 4\tau - 4\tau\frac{hl}{k} \geq 0 \quad \rightarrow \quad \tau \leq \frac{1}{4(1+hl/k)} \quad \rightarrow \quad \Delta t \leq \frac{l^2}{4\alpha(1+hl/k)}$$

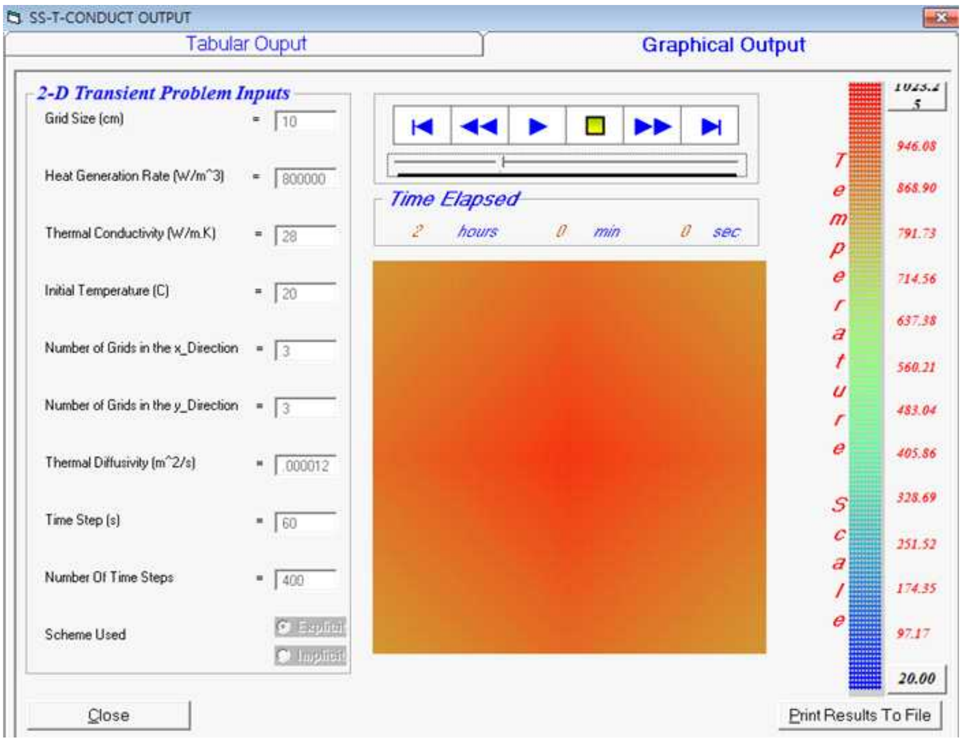
$$\Delta t \leq \frac{(0.1m^2)}{4(12\times10^{-6}m^{2/s})[1+(45\,W/m^2\cdot K)(0.1m)/(28\,W/m\cdot K)]} = 179s$$

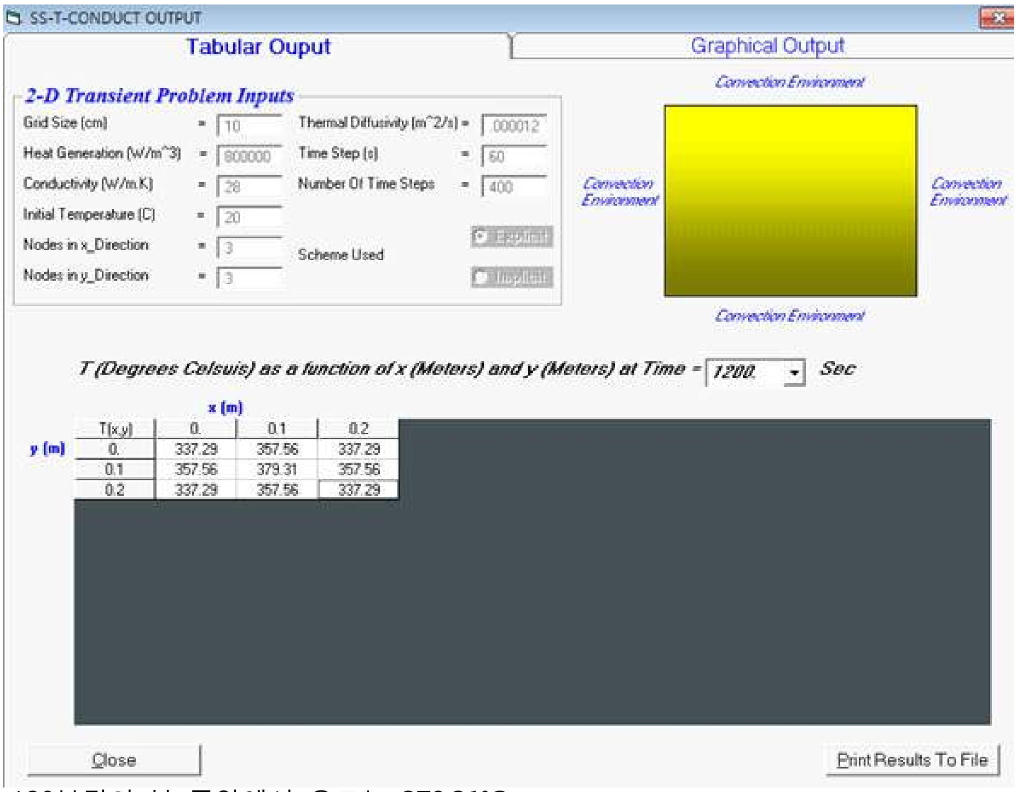
$$\tau = \frac{\alpha\Delta t}{l^2} \qquad \alpha = \frac{k}{\rho C_p}$$

$$\tau = \frac{\alpha\Delta t}{l^2} = \frac{(12\times10^{-6}m^2/s)(60s)}{(0.1m^2)} = 0.072$$

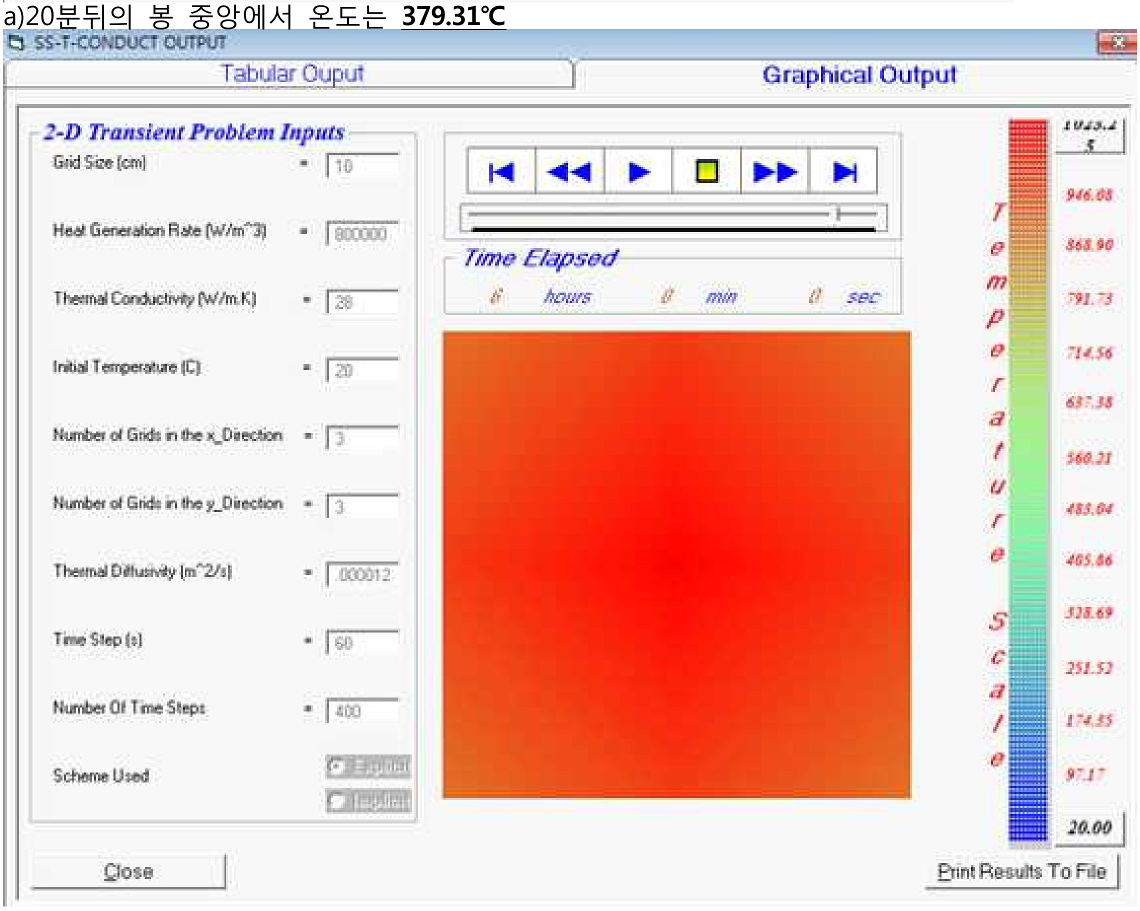
for $\triangle t = 60s$)







a)20분뒤의 봉 중앙에서 온도는 **379.31℃**



b)약6시간 후 쯤부터 온도의 변화가 거의 관찰되지 않으므로 정상상태라고 가정한다.
아무리 시간이 지나도 최고온도 **1023.25℃** 이상으로는 온도가 올라가지 않으므로
정상상태가 된 후 봉 중앙의 온도는 **1023.25 ℃** 라고 할 수 있다.