$$
\begin{aligned}
P(X>s+t\,|X>s) &= \frac{P(X>s+t)}{P(X>s)} = \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda s}} \\
&= e^{-\lambda t} \\
&= P(X>t)
\end{aligned}
$$

을 만족한다. 예를 들어, s시간 이상 수명이 지속된 부품(또는 기계)의 수명이 추가적으로 t시간 이상을 더 지속할 확률은, 지금까지 살아온 시간을 무시하고(memoryless), 새 부품이 처음부터 t시간 이상 수명을 지속할 확률과 동일하다는 것이다. 해당 부품이 마모나 노후화 고장은 거의 없으며 우발적 고장이 대부분인 경우가 이에 해당되며, 이 경우 부품의 수명분포의 모형으로 (무기억성을 만족하는) 지수분포가 사용될 수 있을 것이다.

참고 1. 연속형분포 가운데 무기억성을 가지는 분포는 지수분포가 유일하다. 이산형 분포 가운데는 기하분포가 무기억성을 가진다(2.4절 (예제 5) 참고).

2. 신뢰성공학 등에서 기계 등의 수명(고장날 때까지의 시간)에 대한 분포로 보다 널리 사용되는 분포로는 와이블분포(Weibull distribution), 대수정규분포(lognormal distribution) 등이 있으며, 이 가운데 와이블분포가 가장 애용된다. 와이블 분포는 지수분포가 확장된 형태의 분포이다(5.3절 연습문제 1번 참고).

3.4 감마분포

감마분포는 지수분포의 확장으로 다음과 같이 정의된다. 즉, 포아송 가정을 만족하는 실험에서

$$X=\alpha \text{ 번째 사건이 발생할 때까지 걸린 시간}$$

으로 정의하면, X의 $c.d.f.$는

$$\begin{aligned} F(x) &= P(X \le x) = 1 - P(X > x) \\ &= 1 - P(\text{시 구간 } [0,\ x] \text{ 내에서 발생한 사건의 수} < \alpha) \\ &= 1 - P(Y \le \alpha - 1), \quad Y \sim Poisson(\lambda x) \\ &= 1 - \sum_{k=0}^{\alpha-1} \frac{(\lambda x)^k e^{-\lambda x}}{k!} \end{aligned}$$

이 되고, 이로부터 X의 $p.d.f.$는

$$\begin{aligned} f(x) = F'(x) &= \lambda e^{-\lambda x} - \sum_{k=1}^{\alpha-1} \frac{1}{k!} \left[k(\lambda x)^{k-1} \lambda e^{-\lambda x} - \lambda e^{-\lambda x} (\lambda x)^k \right] \\ &= \lambda e^{-\lambda x} - e^{-\lambda x} \sum_{k=1}^{\alpha-1} \left[\frac{\lambda (\lambda x)^{k-1}}{(k-1)!} - \frac{\lambda (\lambda x)^k}{k!} \right] \\ &= \lambda e^{-\lambda x} - e^{-\lambda x} \left[\lambda - \frac{\lambda (\lambda x)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} \right] \\ &= \begin{cases} \dfrac{\lambda^\alpha}{(\alpha-1)!} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & otherwise \end{cases} \end{aligned}$$

으로 주어지며, 이 분포를 얼랑분포(Erlang distribution)라 한다.

얼랑분포에서 α는 양의 정수로 국한되지만 이를 양의 실수($\alpha > 0$)로 확장하면 다음과 같이 감마분포가 정의된다. 먼저, 감마함수(gamma function)를

$$\Gamma(\alpha) = \int_o^\infty y^{\alpha-1} e^{-y} dy$$

으로 정의하면, 부분적분을 통해

$$\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)\Gamma(\alpha - 1)$$

을 보일 수 있으며(연습문제 4번), α가 양의 정수인 경우에는

$$\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)! \ \ (\alpha\text{: 양의 정수})$$

이 됨을 알 수 있다. 따라서 얼랑분포는 양의 실수 α에 대해서

$$f(x) = \frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}, \quad x > 0$$

으로 일반화되며, 편의상 $\beta = \frac{1}{\lambda}$(∶ 첫 번째 사건이 발생할 때까지 걸린 시간)로 할 때

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}}, & x > 0 \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

으로 표현되며, 이 분포를 감마분포(gamma distribution)라 하고, 기호로는 $X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$ 또는 $Gamma(\alpha, \beta)$로 나타낸다. 여기서 모수 α는 형태모수(shape parameter), β는 척도모수(scale parameter)로 불린다.

아래의 [그림 1]는 α값에 따른 감마분포의 형태를 나타낸다.

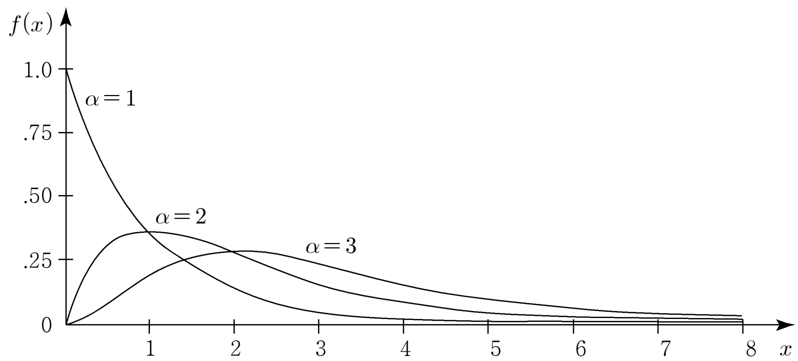

그림 1 $\Gamma(\alpha, 1)$의 확률밀도함수

Remark $\Gamma(\alpha, \beta)$분포는 첫 번째 사건 발생할 때까지 걸리는 시간이 $\beta(=1/\lambda)$인 실험에서 α 번째 사건이 발생할 때까지의 시간에 대한 분포로 이해할 수 있다. 따라서

감마분포에서 $\alpha = 1$인 경우는 지수분포가 되며, 보다 구체적으로 이들 관계를 표현하면

$$\mathcal{E}(\lambda) \overset{d}{=} \Gamma(1, \frac{1}{\lambda})$$

이 된다.

$X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$일 때, X의 $m.g.f.$는

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \int_0^\infty e^{tx} \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}} \, dx \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\frac{1-\beta t}{\beta}x} dx \\ &= \frac{1}{\beta^\alpha}\left(\frac{\beta}{1-\beta t}\right)^\alpha \int_0^\infty \left\{p.d.f. \;\; of \;\; \Gamma(\alpha, \frac{\beta}{1-\beta t})\right\} dx \\ &= (1-\beta t)^{-\alpha}, \quad 1-\beta t > 0 \end{aligned}$$

으로 주어진다. 이로부터

$$E(X) = M'(0) = \alpha\beta$$

$$Var(X) = M''(0) - M'(0)^2 = \alpha\beta^2$$

이 됨을 쉽게 보일 수 있다.

참고 앞 절에서 다룬 지수분포 $\mathcal{E}(\lambda)$는 감마분포의 특별한 경우로, $\mathcal{E}(\lambda) \overset{d}{=} \Gamma(1, \frac{1}{\lambda})$의 관계를 이용하면 $M(t) = (1-\beta t)^{-\alpha} = \left(1 - \frac{1}{\lambda}t\right)^{-1}$이고, 이로부터 $E(X) = \alpha\beta = \frac{1}{\lambda}$, $Var(X) = \alpha\beta^2 = \frac{1}{\lambda^2}$임을 쉽게 알 수 있다.

3.5 카이제곱분포

감마분포의 특별한 경우로 지수분포 외에 카이제곱 분포가 있다. 카이제곱 분포는 $\Gamma(\alpha, \beta)$에서 $\beta = 2$인 경우에 해당한다.

자유도가 r인 카이제곱분포는 평균이 r인 감마분포 $\Gamma(\frac{r}{2}, 2)$에 해당되며, $p.d.f.$는

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(\frac{r}{2})2^{r/2}} x^{\frac{r}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, & x \geq 0 \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

으로 주어지며, 이 분포를 자유도가 r인 카이제곱분포(chi−square distribution)라 하고, 기호로는 $X \sim \chi^2(r)$로 나타낸다. 여기서 $r > 0$이다.

즉, 카이제곱 분포와 감마분포 간에는 다음의 관계

$$\chi^2(r) \overset{d}{=} \Gamma(\frac{r}{2}, 2)$$

가 성립하며, 따라서 $X \sim \chi^2(r)$일 때, X의 $m.g.f.$는

$$M(t) = (1-2t)^{-\frac{r}{2}}, \quad 1-2t > 0$$

이 되고, 이로부터

$$E(X) = \alpha\beta = r$$

$$Var(X) = \alpha\beta^2 = 2r$$

이 된다.

참고 카이제곱 분포는 표준정규분포의 제곱을 통해 정의되기도 한다. 이에 대해서는 5장에서 자세히 다루기로 한다.

3.6 기타분포

3.6.1 베타분포

베타분포(beta distribution)는 구간 [0, 1]에서 정의되는 분포로, $p.d.f.$는

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

으로 주어지며, 기호로는 $X \sim \beta eta(\alpha, \beta)$로 나타낸다. 여기서 $\alpha > 0$, $\beta > 0$이다.

특히 $\alpha = 1$이고, $\beta = 1$인 경우는 $U(0, 1)$의 분포와 동일하며, α와 β의 값에 따라 매우 다양한 형태를 취하는 분포이다. 아래의 [그림 2]는 베타분포의 다양한 형태를 보여준다.

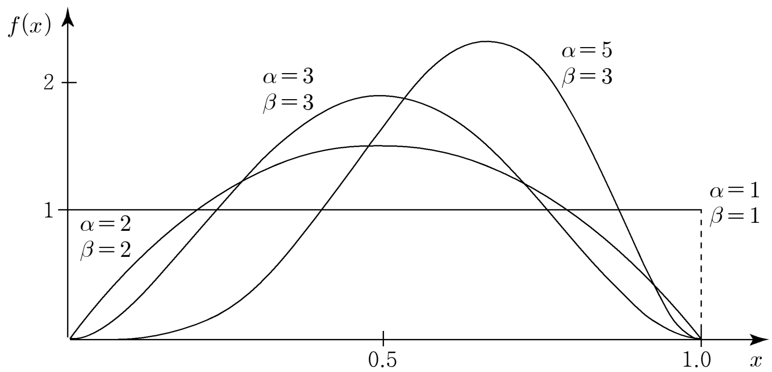

그림 2 $\beta eta(\alpha, \beta)$의 확률밀도함수

$X \sim \beta eta(\alpha, \beta)$일 때, $E(X)$와 $Var(X)$는

$$E(X) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$$

$$Var(X) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$$

이다(연습문제 4번).

참고 5.3절의 (예제 5)에서는 베타분포의 $p.d.f.$가 감마분포의 비(ratio)를 통해 유도되는 과정을 다루고 있다. 베타분포의 확장된 형태로는 디리슐레분포(Dirichlet distribution)가 있다.

3.6.2 이중지수분포

이중지수분포(double exponential distribution)는 라플라스분포(Laplace distribution)라고도 하며, $p.d.f.$는

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\beta}\exp\left\{-\frac{|x-\alpha|}{\beta}\right\}, & -\infty < x < \infty \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

로 주어지며, 기호로는 $X \sim DE(\alpha, \beta)$로 나타낸다. 여기서 $-\infty < \alpha < \infty$, $\beta > 0$이다.

$X \sim DE(\alpha, \beta)$일 때,

$$E(X) = \alpha$$

$$Var(X) = 2\beta^2$$

이다.

특히 $\alpha = 0$이고, $\beta = 1$인 경우의 $p.d.f.$는

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}e^{-|x|}, & -\infty < x < \infty \\ 0, & otherwise\end{cases}$$

으로 주어지며, $m.g.f.$는

$$M(t)=\frac{1}{1-t^2}$$

으로 주어진다. 이 분포는 $N(0,\ 1)$보다 꼬리가 두터운(heavy tailed) 분포로 알려져 있다.

참고 이중지수분포는 지수분포의 차이(difference)에 대한 분포로 설명되기도 한다 [5.3절 (예제 6) 참고].

3.6.3 코쉬분포

코쉬분포(Cauchy distribution)는 꼬리가 매우 두터운 분포로 알려져 있으며, $p.d.f.$는

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\mu}{\pi}\dfrac{1}{\mu^2+(x-\theta)^2}, & -\infty < x < \infty \\ 0, & otherwise\end{cases}$$

으로 주어지며, 기호로는 $Cauchy(\mu,\ \theta)$로 나타낸다. 여기서 $\mu>0$이고, $-\infty<\theta<\infty$이다.

특히 $\mu=1$, $\theta=0$인 경우를 표준코쉬분포(standard Cauchy distribution)라 하고, 이의 $p.d.f.$는

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi(1+x^2)}, & -\infty < x < \infty \\ 0, & otherwise\end{cases}$$

으로 주어진다.

참고 1. $Cauchy(1,\ 0)$분포는 $t(1)$분포(6.1절 참고)와 동일하며 $N(0,\ 1)$에 비해 꼬리가 매우 두터운 분포이다. 이 분포는 표준정규분포의 비(ratio) 또는 균일분포 $U(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2})$의 탄젠트변환을 통해 설명되기도 한다[5.3절 (예제 2) 참고].

2. 코쉬분포는 평균과 분산(또는 2차 이상의 적률)이 존재하지 않는 특이한 분포이다. 예를 들어, $Cauchy(1,\ 0)$의 경우, 이 분포는 0에 대해 대칭이므로 분포의 중심위치는 0이라 할 수 있으나, 수학적 기댓값인 $E(X)$는 존재하지 않는다. 그 이유는

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\pi(1+x^2)}\,dx \\ &= \int_{-\infty}^{0} \frac{x}{\pi(1+x^2)}\,dx + \int_{0}^{\infty} \frac{x}{\pi(1+x^2)}\,dx \end{aligned}$$

에서

$$\begin{aligned} \int_{0}^{\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dx &= \lim_{c\to\infty} \int_{0}^{c} \frac{x}{1+x^2}\,dx \\ &= \lim_{c\to\infty} \left[\frac{1}{2} \ln(1+\mathrm{x}^2) \Big|_{0}^{\mathrm{c}} \right] \\ &= \infty \end{aligned}$$

이고, 같은 이유로 $\int_{-\infty}^{0} \frac{x}{1+x^2}\,dx = -\infty$ 이므로 $E(X) = \infty - \infty$ 형태가 되어 적분 값이 존재하지 않는다.

3.6.4 로지스틱분포

로지스틱분포(logistic distribution)는 $c.d.f.$가

$$F(x) = \frac{1}{1+\exp\left(-\frac{x-\alpha}{\beta}\right)}, \quad -\infty < x < \infty$$

으로 주어지는 분포로 α에 대해 대칭이며, 기호로는 $Logistic(\alpha, \beta)$로 나타낸다. 여기서 $-\infty < \alpha < \infty$, $\beta > 0$이다.

$X \sim Logistic(\alpha, \beta)$일 때

$$E(X) = \alpha, \quad Var(X) = \frac{\beta^2 \pi^2}{3}$$

이다.

표준로지스틱분포(standard logistic distribution) 즉, $Logistic(0, 1)$ 분포는 $c.d.f.$가

$$F(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}} \quad (\text{또는 } \frac{e^x}{1 + e^x})$$

으로 주어지는 분포이다. 이로부터 $p.d.f.$는

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2}, & -\infty < x < \infty \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

으로 주어진다. 이 분포의 $m.g.f.$는

$$M(t) = \Gamma(1-t)\Gamma(1+t), \quad -1 < t < 1$$

이며

$$E(X) = 0, \quad Var(X) = \frac{\pi^2}{3} \approx 3.29 (\doteqdot 1.8^2)$$

이다. 이 분포는 0에 대해 대칭이며, $N(0, 1)$에 비해 다소 꼬리가 두터운 분포로 알려져 있다.

3장 연습문제

1 X의 $m.g.f.$가 $M(t)=(1-2t)^{-5}$일 때, 다음 물음에 답하여라.

(a) $E(X)$와 $Var(X)$를 구하여라.

(b) 위 분포의 제90 백분위수($90th\ \ percentile$)를 구하여라.

참고 X가 연속형일 때, 제100p 백분위수($0<p<1$)는 다음 식

$$p=\int_{-\infty}^{\xi_p} f(x)\,dx=F(\xi_p)$$

를 만족하는 ξ_p로 정의된다.

2 $\Gamma(\alpha,\beta)$의 왜도와 첨도가 각각 다음과 같이 주어짐을 보여라.

$$\frac{2}{\sqrt{\alpha}},\qquad \frac{6}{\alpha}$$

3 $X\sim f(x)=\begin{cases} e^{-x-1}, & x>-1 \\ 0, & otherwise \end{cases}$ 일 때, 다음 물음에 답하여라.

(a) X의 $m.g.f.$가 $M(t)=e^{-t}(1-t)^{-1}\ (t<1)$임을 보여라.

(b) X의 평균과 분산이 각각 0과 1이 됨을 보여라.

4 다음 사실이 성립함을 보여라.

(a) $\Gamma(\alpha)=(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)$임을 보여라.

(b) $X\sim \beta eta(\alpha,\beta)$일 때

$$E(X)=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}, \quad Var(X)=\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$$

임을 보여라.

5 $Z \sim N(0,\,1)$일 때, 다음 물음에 답하여라.

(a) Z의 m차 적률이 다음과 같이 주어짐을 보여라.

$$E(Z^m)=\begin{cases}\dfrac{(2k)!}{2^k k!}=(2k-1)(2k-3)\cdots(3)(1), & m=2k\\ 0, \quad m=2k-1\end{cases} \qquad (k=1,2,\cdots)$$

Hint $M_Z(t)=exp\left(\dfrac{t^2}{2}\right)=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{t^2}{2}\right)^k}{k!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2k)!}{k!\,2^k}\frac{1}{(2k)!}t^{2k}$

(b) 위 결과로부터 Z의 왜도와 첨도가 모두 0이 됨을 확인하여라.

6 표준정규분포 $N(0,\,1)$을 따르는 확률변수 X의 $p.d.f.$와 $c.d.f.$를 각각 $\phi(x)$와 $\Phi(x)$로 표기하자. Y가 다음의 $p.d.f.$

$$g(y)=\begin{cases}\dfrac{\phi(y)}{\Phi(b)-\Phi(a)}, & a<y<b\\ 0, & otherwise\end{cases}$$

를 가질 때

$$E(Y)=\frac{\phi(a)-\phi(b)}{\Phi(b)-\Phi(a)}$$

임을 보여라. 이 분포를 절단정규분포(truncated normal distribution)라 한다.