

음악과 수학

목적: 음악 속에 숨겨진 수학적 배경을 살펴보고 그의 수학적 이론을 살펴본다.



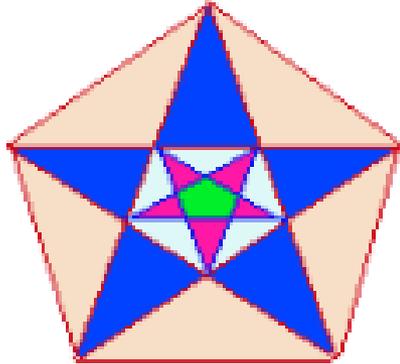
인간의 마음속에는 규칙과 질서가 있어서 그 규칙과 질서에 순응할 때 편안함을 느낀다.

음악은 인간의 마음속에 내재하고 있는 선율을 끌어내어 소리로 표현한 것이라 할 수 있다. 조용한 음악을 들을 때 우리는 편안함을 느끼고 군가를 들을 때 우리의 마음이 흥분되는 것처럼 음악은 고대로부터 우리 인간의 정서를 순화 하는데 지대한 역할을 하여 왔다.

요즈음은 뮤직테라피(Music Therapy)라 하여 음악은 질병의 치료에도 사용되고 있다. 음악의 장르에 따라 우리에게 다가오는 느낌이 다른 이유는 무엇일까? 음악에는 어떠한 규칙과 질서가 있을까?

이번 시간에는 음악과 수학의 관련성을 살펴보자.

동서양의 음악과 수학 ♪



[피타고라스학파의 회원들이
자랑스럽게 가슴에 달고 다니
던 오각형모양의 휘장]

피타고라스의 정리로 유명한 그리스 수학자 피타고라스는 정수연구에 빠져서 모든 사물을 자신이 연구하는 정수의 규칙에 결부시키려 하였다.

피타고라스는 만물의 원리를 수(數)에 두고, 세계를 수적 관계 또는 비례에 기초를 둔 조화로 보고 피타고라스학파를 창시 하였다.

그의 학교에서 가르친 기초 학예에는 4학이라 일컬어지는 기하학, 음악, 천문학과, 수론으로 생각되는 산술이 있다. 여기에 3학인 문법, 논리학 수사학을 합쳐 7개의 학예가 교양 있는 사람이 되기 위한 필수적인 지식으로 간주 되었다.

옛날 동양의 교육 과정 속의 음악과 수학

육례라 하여 예(禮), 악(樂), 사(射), 어(御), 서(書), 수(數)라는 학문이 선비가 충실히 공부해야 할 교육과정으로 여겨왔다.

* 기타에서 알아보는 한 옥타브의 차이?

기타는 한 프렛씩 안쪽으로 옮겨서 누를 때마다 반음씩 올라간다.

현의 길이가 반으로 줄면 음정은 한 옥타브 올라간다는 것을 알 수 있다.



6번 줄을 '미'라는 음으로 조율하고 끝에서부터 한 프렛씩 옮겨가며 눌러서 튕겨 보면 끝에서 12번째 되는 프렛에서 한 옥타브 높은 '미'음이 나온다.

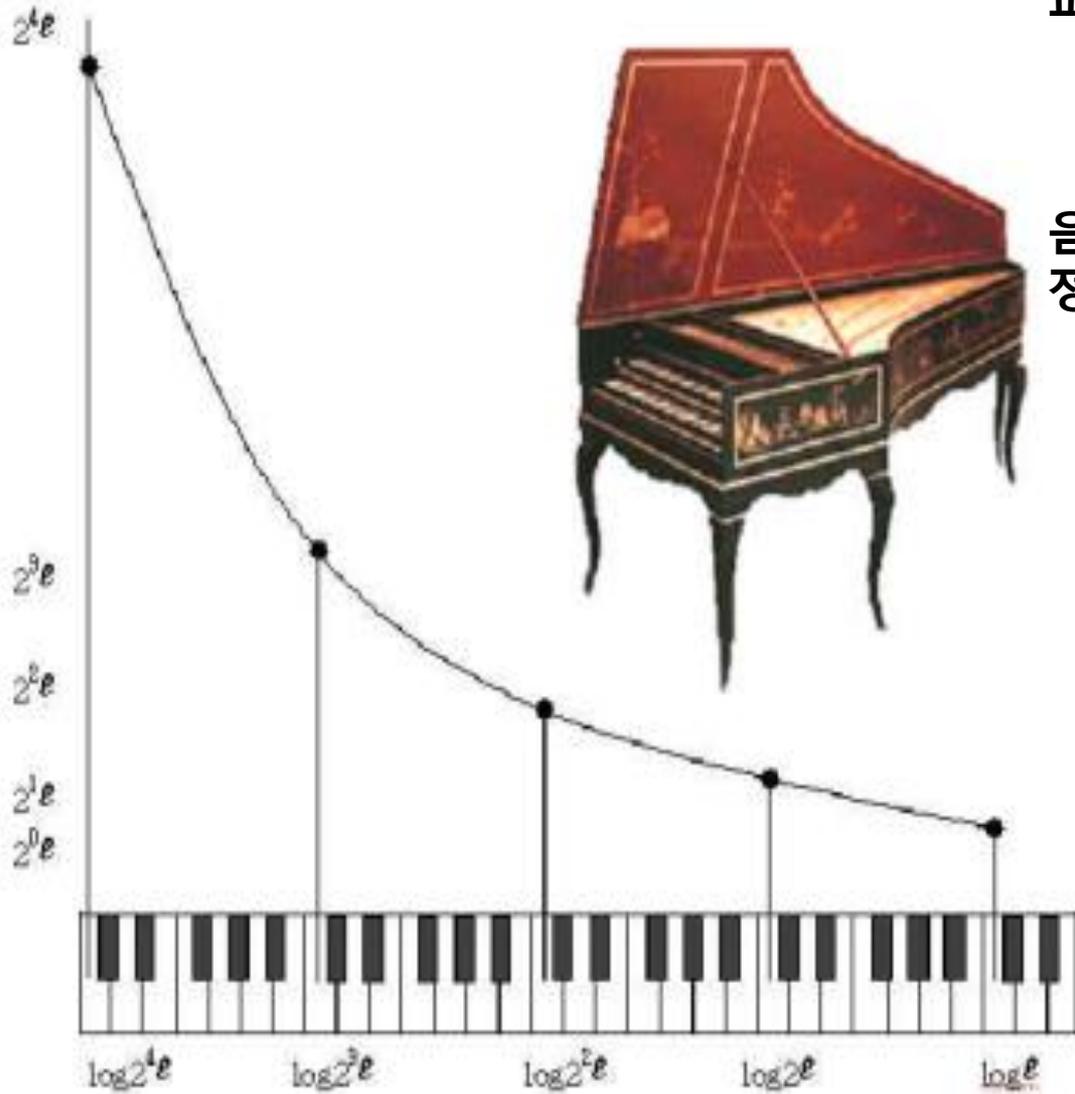
피아노 모양의 비밀



피아노는 어떻게 만들어져 있을까?

피아노와 비슷한 쳄발로를 살펴보자.

4옥타브 가운데 1옥타브마다 '도' 음을 잡아서 현의 길이를 측정해보면 정확히 2배씩 되어있다.



쳄발로의 현의 길이를 나타내는 곡선은 지수 함수곡선을 나타내고,

현의 길이의 변화에 따른 건반은 로그함수그래프로 표시된다.

첼발로의 경우 4옥타브 가운데 1옥타브마다 ‘도’음을 잡아서 현의 길이를 측정해보면 정확히 2배씩 되어있다. 이 들 각각의 로그를 취해보면 다음과 같은 표를 얻는다.

현의 길이	L	2 L	$2^2 L$	$2^3 L$	$2^4 L$
로그	$\log L$	$\log 2 + \log L$	$2\log 2 + \log L$	$3\log 2 + \log L$	$4\log 2 + \log L$

이 표를 토대로 가로축에 건반, 세로축에 현의 길이를 나타내는 그래프를 그려보면 앞의 그림과 같다.

즉 음정에 따른 첼발로의 현의 길이를 나타내는 곡선은 지수함수곡선을 나타내고, 건반은 로그함수그래프로 표시된다.

피아노의 경우는 8옥타브나 되기 때문에

가장 높은 '도'음을 10cm로 한다 해도 7 옥타브의 길이는

20cm, 40cm, 80cm, 160cm, 320cm, 640cm, 1280cm, 가 되어

12.8m나 되는 긴 피아노가 되고 만다.

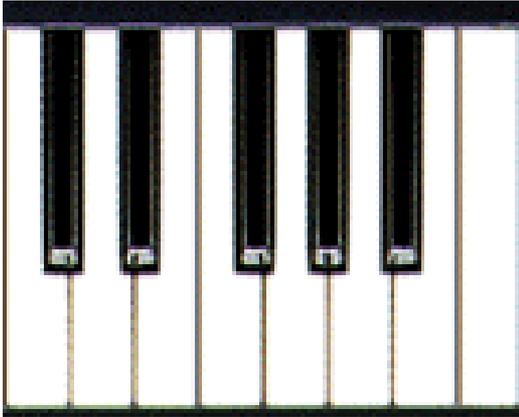
그래서 피아노는

저음의 현의 굵기를

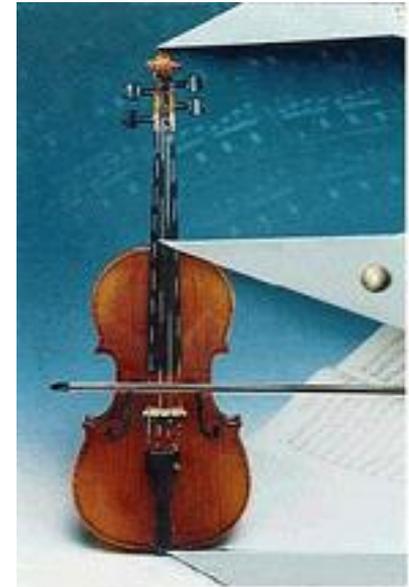
굵게 한다든지

구리를 감은 선을 사용한다든지 해서

피아노의 길이를 조정한다.



Harbeth
Super HL5 Plus Speaker



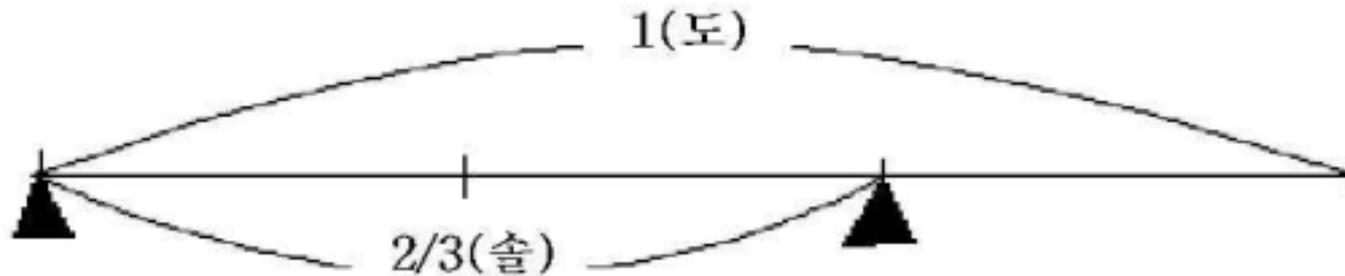
음악에서 한 옥타브는 도 레 미 파 솔 라 시 (도) 의 8(7)음계로 이루어져 있다.

피아노의 건반은 오른쪽 그림과 같이 한 옥타브를 13개의 음으로 나누어 표현하고 있으며, 이 중 하얀 건반이 8개, 검은 건반이 5개 있고, 하얀 건반은 3개와 5개, 검은 건반은 2개와 3개로 구분되어 있다. 여기에서 나타나는 2, 3, 5, 8, 13 은 잘 알다시피 피보나치의 수열이다.

스피커 인클로저를 만들 때 가장 이상적인 박스의 폭, 높이, 깊이의 비율도 폭이 1이면 깊이는 0.618, 높이는 1.618로 황금비가 적용됨을 알 수 있다.

바이올린에서도 찾아볼 수 있는데 바이올린 몸통의 분할점은 양 구멍에서 그은 직선이 만나는 점이다. 그리고 또 바이올린의 몸체와 목간의 비율도 황금분할에 따르고 있다.

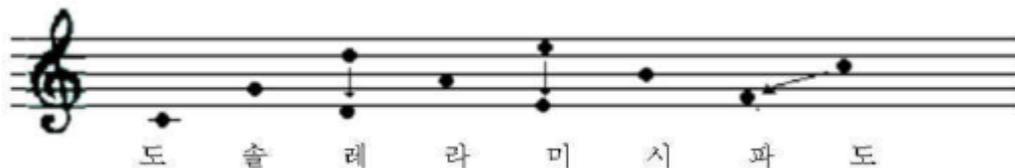
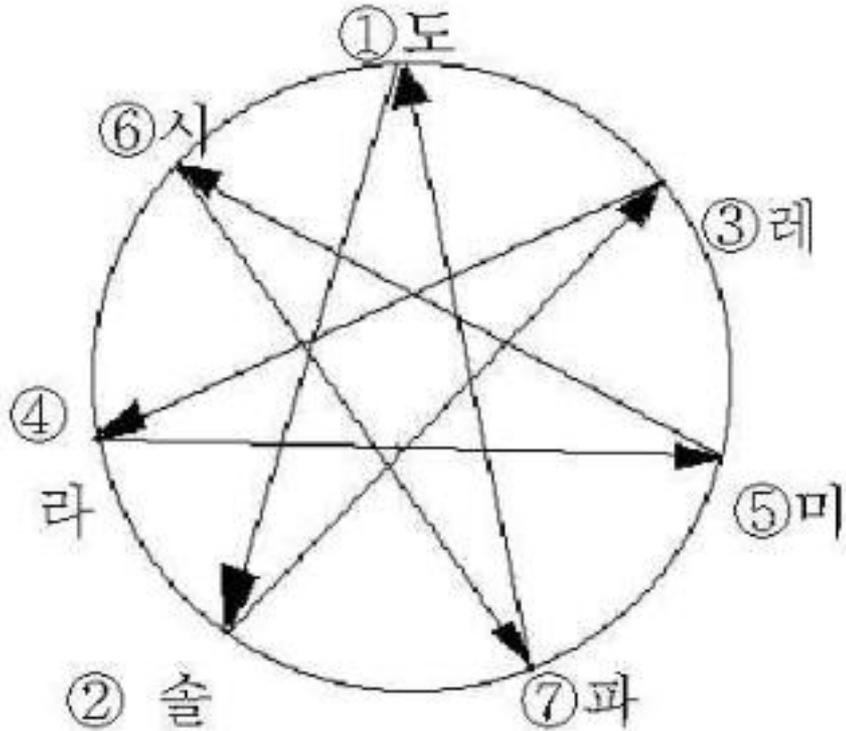
피타고라스 음계



피타고라스는 한 줄로 된 현의 길이를 위 그림처럼 ▲로 진동하는 부분의 길이, 즉 진폭을 바꿈으로써 음계를 만들었다. (진폭에 따른 음정)

현의 길이를 $1/2$ 로 하면 한 옥타브 높은 음이 되고 '도' 현의 길이를 $2/3$ 으로 하면 5도 높은 음의 '솔'이 된다. 이것을 차례차례로 되돌려 가면 "도 레 미 파 솔 라 시 도"의 음계를 만들 수 있다.

도 \Rightarrow 솔 \Rightarrow 레 \Rightarrow 라 \Rightarrow 미 \Rightarrow 시 \Rightarrow 파 \Rightarrow 도
 1 \quad 2/3 \quad (2/3)² \quad (2/3)³ \quad (2/3)⁴ \quad (2/3)⁵ \quad (2/3)⁶ \quad 1/2



이것을 아래와 같은 규칙에 의해 오선지에 그리면 다음과 같다.

음계를 한 옥타브 속에 넣기 위해서 높은 '도'를 넘어선 경우에는 (길이가 2배이면 음이 한 옥타브 내려가기 때문에) 두 배해서 1옥타브 내린다.

'파'는 '도'보다 5도 낮은 음이라고 생각한다.

[평균율 음계의 탄생]

16세기경 유럽에서 처음으로 생겨났고 현재의 악기에 사용되는 음계이다.

기타 줄의 시작점에서 그 프렛까지의 길이를 모두 알아보면 다음과 같다.
(6번 줄을 피아노의 “도” 음정에 맞추고 실험)

도	도#	레	레#	미	파	파#	솔	솔#	라	라#	시	도
62.8	59.2	56.0	52.8	49.8	47.0	44.5	41.9	39.5	37.3	35.2	33.2	31.4

이렇게 켜 길이를 보면 도#/도, 레/도#...등등 프렛까지의 길이가 긴 것에서 그 다음으로 긴 것을 나누면 전부다 약 0.94정도의 값이 나온다.

이것을 수학적으로 설명하면 반음씩 올라갈 때마다 시작점에서 프렛까지의 길이의 비가 생기고 그 비($r=0.94$)는 일정하여 등비수열 ($ar^{\{n\}}$)을 이룬다는 것을 의미한다.

즉, 도 a , 도# $a*r$, 레 $a*r*r$, 레# $a*r*r*r$, ..., 도 $a*r^{\{12\}}$, $r^{\{12\}} = 1/2$

피타고라스 음계와 평균율 음계를 정리하면 다음과 같다.

	도	레	미	파	솔	라	시	도
피타고라스 음계	1	8/9	64/81	3/4	2/3	16/27	128/243	1/2
평균율 음계	1	$(1/2)^{2/12}$	$(1/2)^{4/12}$	$(1/2)^{5/12}$	$(1/2)^{7/12}$	$(1/2)^{9/12}$	$(1/2)^{11/12}$	1/2
진동수	1	9/8	81/64	4/3	3/2	27/16	243/128	2/1
현의 길이	1	8/9	64/81	3/4	2/3	16/27	128/243	1/2

(주*) 레 : (솔의 2배) $\times(2/3) = (2/3 + 2/3)\times(2/3) = (4/3)\times(2/3) = 8/9$,
 파 : $3/4 = 1/2 \times 3/2$ (파 $\times 2/3 = 1/2$ 도)

위의 표에서 보는 것처럼

현의 길이와 진동수는 반비례한다. 그리고

현의 길이는 조화수열(:어떤 수열의 역수가 등차수열)을 이루는데

실제로 음정이 "도 솔 도" 인 경우 현의 길이가 1, 2/3 1/2 일 때
그의 역수인 진동수는 (1, 3/2, 2/1 으로 초항이 1이고 공차가 1/2인)
등차수열이 된다.

피타고라스 음계는 유리수의 음계,

평균율 음계는 무리수의 음계로 되어 있다.

또한 $\log(a \times b) = \log a + \log b$ 와 같은 로그 함수의 원리도 발견할 수 있다.

즉, 음정의 합 : 5도 + 4도 -> 8 도

(*중복 count 된 것을 고려)

진동수의 비의 곱 : $3/2 \times 4/3 \rightarrow 2/1$

$\log(3/2 \times 4/3) = \log(2/1)$ 와 같이

음정의 합과 진동수비의 곱이 로그함수의 원리와 같이 대응한다.

피타고라스학파는 수와 음악에 관련한 매우 놀랄만한 발견을 했다. 음악에서 두 음 사이의 거리인 음정이 어떤 수의 비례에 따른다는 것을 알아냈다. 이에 대한 추측은 여러 가지가 있으나 피타고라스가 집 근처의 대장간에서 들리는 쇠 베틀치는 소리가 화음을 이루다가 불협화음으로 들리는 이유를 궁금하게 생각한데서 시작하였다고 한다.

어떤 현악기든 동일한 장력아래서 현의 길이가 2:1일 때 8도의 음정차이가 나고, 3:2 일 때 5도의 음정차이가 있으며, 4:3일 때 4도의 음정차이가 있음을 발견하였다. 그리고 두 음정은 진동수비의 최소공배수가 작을 때 잘 어울린다. 5도 화음 도와 솔, 4도 화음 도와 파가 잘 어울리는 것은 그 음정의 진동수 비가 각각 2:3, 3:4이기 때문이다. 그러나 2도 화음 도와 레는 그 진동수의 비가 8:9로 최소공배수가 72나 되기 때문에 잘 어울리지 못한다. 수리 물리학 분야에서 기록된 최초의 이 결과는 피타고라스학파가 음정에 관한 과학적인 연구를 맨 처음 불러 일으켰음을 보여 주고 있다.

BWV846 바흐의 자필 악보

(평균율 클라비어곡집 제1부:전주곡과 푸가 No.1 C장조 중 전주곡의 총보)



앞에서 살펴 본 바와 같이 그리스의 철학자 피타고라스는 사람의 귀에 듣기에
편한 현의 길이의 비가 정수비 2:3 인 5도 음정만을 조합하여 하나의 음계를
만들었다.

한 음에서부터 5도씩 위로 상행하고 옥타브를 벗어나면 한 옥타브 아래의 동
일한 음에서 다시 시작하는 방법으로 한 옥타브의 음계를 조성했다. 그러나 이
는 조가 바뀌면 그 조에 맞추어 다시 조율해야하는 결점이 있었다.

즉 옛날 피타고라스의 음계로 연주 할 때는 조를 바꿀 때 마다 다시 조율을 하
고 연주했다는 것이다.

그 뒤에 순정조율이라는 방법이 생겨나서 피타고라스 음계의 모순점을 다소
보완하기는 하였지만 이 역시 문제점을 안고 있기는 마찬가지였다. 이러한 문
제점을 획기적으로 해결한 것은 12 평균율이 등장이었다.

12평균율은 한 옥타브를 12 균등 분할 한 것으로 한 번의 조율로 여러 조의
곡을 연주 할 수 있게 되었다. 프랑스의 메르센느라는 사람이 처음 제창하고
이 이론을 실제 작곡에 사용한 사람이 바흐였다. 조 바꿈 연주가 허용되지 않
던 시대에 한번의 조율로 여러 곡의 다른 조를 연주 할 수 있었던 것은 당시 사
람들에게는 엄청난 충격이었다.

그러나 낭만파 이후 오늘날의 12평균율이 자리 잡게 되었다.

순정율이란?

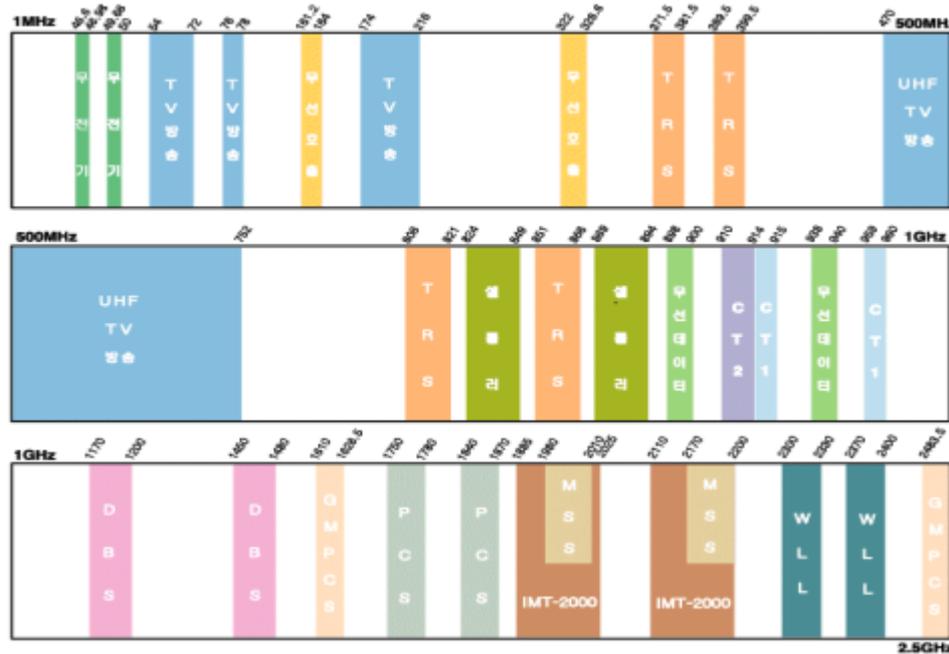


이 조율법은 기본음으로부터 순수하게 일정한 정수비에 의해서 모든 음의 주파수를 결정하게 된다. 따라서 사람의 귀가 아주 편안하고 자연스럽게 느끼게 된다. 그런데 이 순정율은 건반악기에서는 구현이 불가능한 단점을 가지고 있다. 즉, 조율 김할 때 변하는 주파수의 변화를 건반악기로서는 표현이 불가능했던 것이기 때문이다. 같은 노래를 C('도')에서 시작해서 부르는 것과 D('레')에서 부르는 것은 완전히 다른 주파수를 가진 음들을 필요로 한다. 순정율에서는 기본 베이스음에서부터 일정비로 주파수를 결정하기 때문에 기본음이 변하면 전체 음들의 주파수를 같이 바꿔주면 된다. 현악기나 성악 등에서는 이러한 차이를 사람이 쉽게 해줄 수 있다. 연주 할 때의 느낌으로 주파수를 자연스럽게 조금씩 바꿔주는 것이다. 그런데 오르간, 피아노로 대표되는 건반악기는 같은 음에 같은 주파수만 사용할 수 있는 치명적인 단점을 가지고 있기 때문에 순정율을 사용하는 것이 불가능하다.

성악 연습자들이 흔히 피아노 건반의 음에 맞춰서 발성연습을 많이 하는데 이는 그 성악가의 음감을 평균율화하여 매우 나쁘게 만들고 만다. 건반악기가 포함되지 않은 음악에서는 평균율을 사용하지 않는 것이 좋다고 한다. 특히 여러 악기가 함께 합주를 하는 오케스트라음악 같은 경우 순정율을 사용하는 것이 귀를 거슬리지 않는 소리를 내는 비결인 것이다.

* 주파수와 음계의 관계

국내 주파수 할당표



현의 길이의 비에 따라 음정이 변한다는 것은 현대 과학에서 현의 진동의 수인 주파수를 관찰함으로써 재확인할 수 있다. (진동수(주파수)는 일초동안에 셀 수 있는 수의 단위인 Hz를 단위로 사용한다. 사람이 들을 수 있는 범위(가청 주파수 범위)는 12[Hz] ~ 12,500[Hz])

음정	주파수(Hz)
도 C	261.6
레 D	293.7
미 E	329.7
파 F	349.2
솔 G	392.0
라 A	440.0
시 B	439.9
도 C*	513.3

음정의 비율
레/도 = 1.121
미/레 = 1.121
파/미 = 1.059
솔/파 = 1.121
라/솔 = 1.121
시/라 = 1.121
도/시 = 1.059

반음이 가지는 음정의 비율(r) 을 1.059 라 하고 초항(a)을 261.6 이라 하면 음정과 주파수(진동)의 관계는 다음 표와 같이 등비수열의 관계가 성립한다.

도 C	레 D	미 E	파 F	솔 G	라 A	시 B	도 C*
$a r^0$	$a r^2$	$a r^4$	$a r^5$	$a r^7$	$a r^9$	$a r^{11}$	$a r^{12}$

[아래 "도"와 한 옥타브 위의 "도"와의 비율 2:1 의 실험적 증명]

C : C*

$$ar^0 : ar^{12} = r^0 : r^{12}$$

$$= 1 : 1.059^{12}$$

$$= 1 : 1.989534714185891310\dots$$

$$\approx 1 : 2$$

※옥타브 :

아래 "도"부터 위의 "도"까지 8음정을 말하는 옥타브는 라틴어의 Octa(8)에서 유래

화음과 주파수(진동수)의 비례

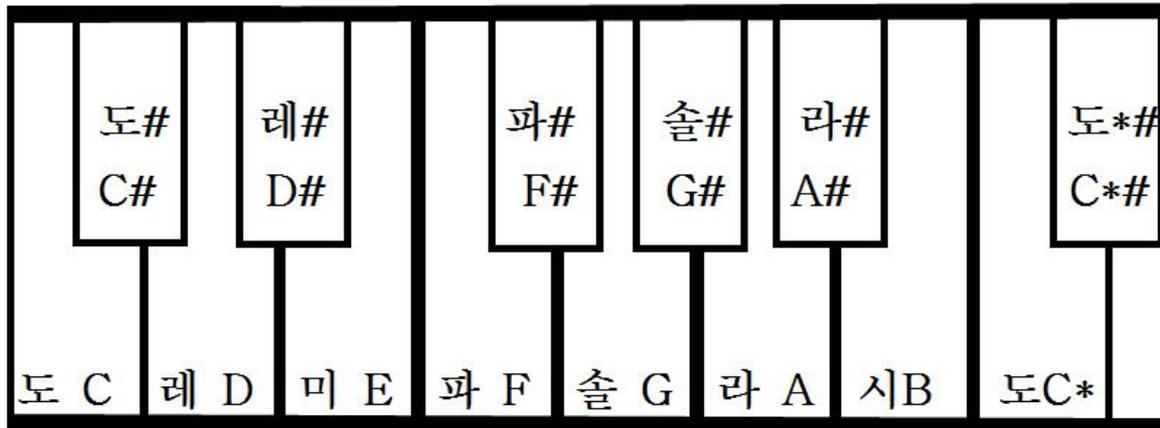
1 도 화음(으뜸화음: C code)의 비 :

1도 화음은 도, 미, 솔 음정이 어울려 내는 화음이다.

평균률음계에서 음정에 따른 주파수는, 반음 올라갈 때마다 일정 비율로 높아져, 반음 올라가면 배가 되는 등비수열을 이룬다.

기타에서는 이 화음을 C 코드라고 한다.

이 화음을 주파수의 비율로 나타 낼 수 있는데 도를 a_1 , 미를 a_5 , 솔을 a_8 라고 나타내면 주파수비는 정수비 4:5:6 과 근사하게 정수비로 계산된다. =>



도 C = ar^0 라 하면

C# = ar^1 , 레 D = ar^2 , D# = ar^3 , 미 E = ar^4 ,
 파 F = ar^5 , F# = ar^6 , 솔 G = ar^7 ,
 G# = ar^8 , 라 A = ar^9 , A# = ar^{10} , 시 B = ar^{11} ,
 도 C* = $ar^{12} = 2a$ 이다.

이 때 $r^{12} = 2$ 에서 $r = 2^{\{1/12\}}$.

E = $ar^4 = a(2^{\{1/12\}})^4 = a 2^{\{1/3\}} \cong 5/4 a$

G = $ar^7 = a(2^{\{1/12\}})^7 = a 2^{\{7/12\}} \cong 3/2 a$

따라서 도 : 미 : 솔 = C : E : G
 = $a : 5/4 a : 3/2 a = 4 : 5 : 6$ 이 되어

가장 기본적인 1도 화음의 주파수의 비는
 4 : 5 : 6 이다. (정수비례에 유의 할 것 !)

수학을 알면 음악이 보인다

프랑스의 수학자 푸리에(1768 ~ 1830년)는 현대 수학과 그 응용 분야에서 가장 중요한 위치를 차지하고 있는 푸리에 해석학을 창시, 주파수 별로 음성의 성분을 분해할 수 있음을 보여줬다. 태양광선이 프리즘에 의해 서로 다른 주파수를 가진 무지개 색깔로 분해되듯이, 음악이 나올 때 오디오 기기의 이퀄라이저에서 오르내리는 막대 신호는 그 주파수 대역으로 분해할 때 생긴 사인.코사인 함수의 계수와 관련지을 수 있다.

최근에는 이 이론이 지붕이 높지 않아도 소리가 잘 퍼져나가 음질을 좋게 할 수 있는 음악당 천장 설계, 오디오 광(狂)의 음향기기 반향판 제작에도 쓰이고 있다.

1940년대 미국을 대표하는 수학자였던 **새넨**은 푸리에 이론을 간단하게 응용해 **새넨 샘플링 정리**를 만들었다.

인간은 주파수 대역이 20~2만Hz인 음성신호만 들을 수 있는데 이처럼 주파수 대역이 제한된 신호는 정수점에서의 값만 알면 전체 신호를 알 수 있다는 정리다.

따라서 CD에 음악을 녹음하거나 전화 혹은 통신으로 음성·비디오 신호를 보낼 때 정수점에서의 디지털 값만 보내면 이를 받아 샘플링 정리를 실현하는 디지털-아날로그 변환기에 의해 찌그러짐 없이 원래 신호를 복원할 수 있다. 이 간단한 정리 하나가 **음악·영상 산업과 정보통신의 혁명**을 가지고 온 것이다. 200년 전의 푸리에에는 자신의 수학적 업적들이 인류에게 이런 편리와 유용성을 주리라고 상상도 못했을 것이다. 이렇게 순수 수학 이론도 음악과 과학 기술에 적용되면 우리 생활을 풍요롭고 아름답게 해 준다.

음악가와 수의 흥미로운 관계

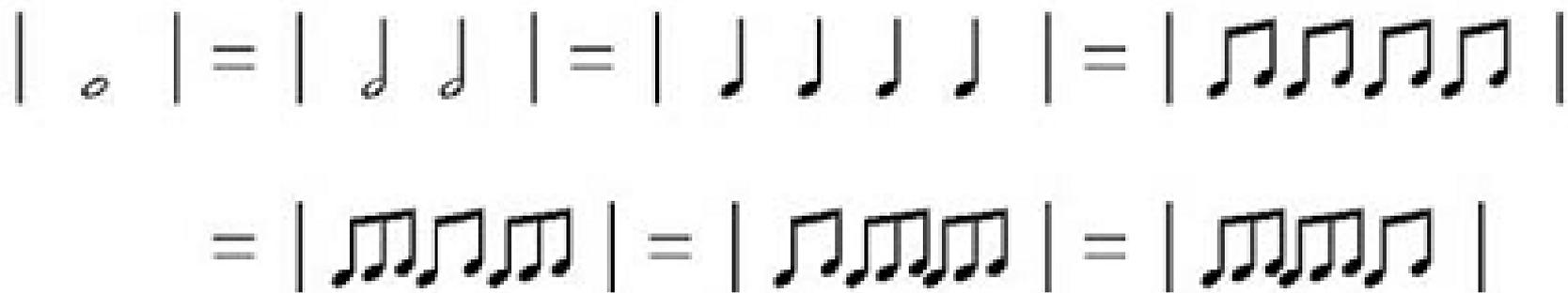


바르토크(Bartok, Bela 1881~1945 헝가리 작곡가. 나지센트미클로슈 출생.):

20세기 최고의 관현악 작품의 하나로 꼽히는 1936년 작곡된 '현악기와 타악기 및 첼리스트를 위한 음악'에서 시각 예술에 주로 사용됐던 '황금 분할'의 원리(피보나치수열의 사용)와 거울 형식 등의 독특한 기법을 적용함으로써 음악 형식의 통일성을 이루고자 했다

바르토크는 악곡의 클라이막스를 곡의 황금분할지점에 위치하도록 작곡함으로써 황금분할의 원리를 음악에 응용하였다.

그리고 **황금분할**은 리듬결합에서도 찾아 볼 수 있는데, 4/4박자 한 마디가 8개의 8분 음표로 분할되는 2-2-2-2의 정상적인 분할대신 3-2-3, 2-3-3, 3-3-2 등으로 분할한 것이다.



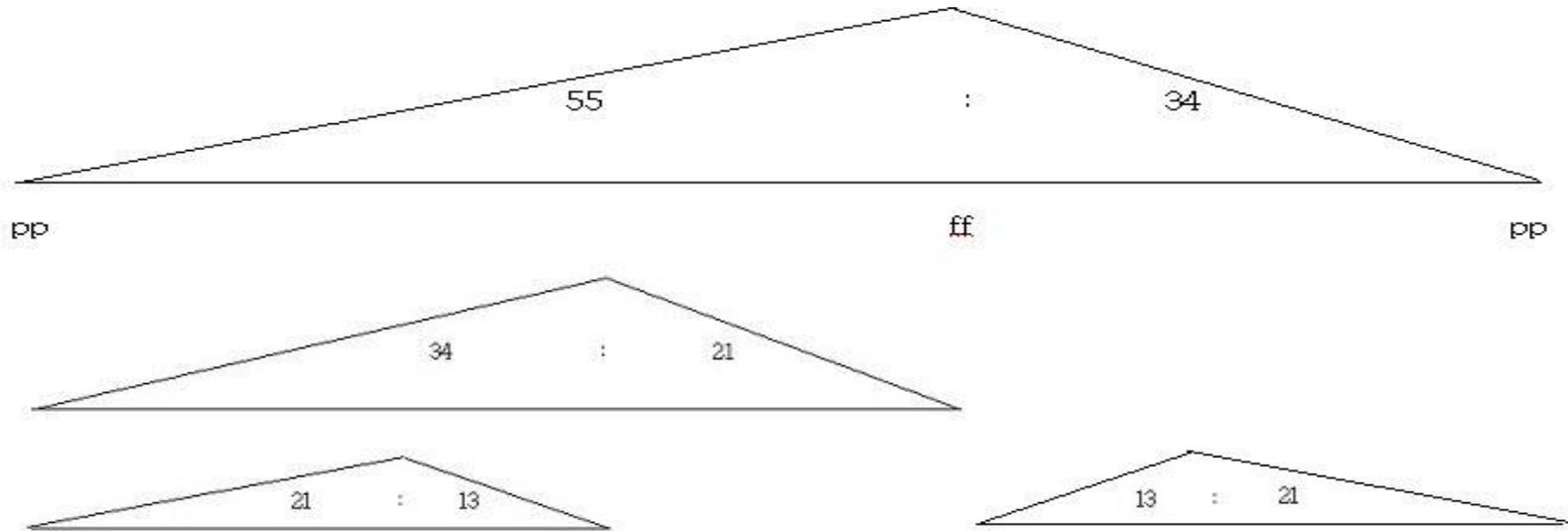
황금비 0.618...은 대략 2/3, 3/5, 5/8 등의 비
값으로도 표현될 수 있는데 바르토크의 리듬결
합에서 쉽게 찾아볼 수 있다.

20세기 최고의 관현악 작품의 하나로 꼽히는
그의 '현. 타악기. 첼레스타를 위한 음악'에서
피보나치수열을 교묘하게 사용하고 있다. 피보
나치수열이란 첫 두 항이 1.1이고, 다음 항부터
는 바로 앞 두 항의 합으로 이뤄진다. 처음 몇
항을 써보면

1. 1. 2. 3. 5. 8. 13. 21. 34. 55. 89 이다.

이 곡 첫 악장은 89 마디로 구성되어 있는 데
마치 산을 올라갔다가 내려오듯이 처음에는 피
아니시모(pp)부터 시작해 점점 강해져 55번째
마디에서 포르테시모(ff)로 클라이맥스를 이루
고 다시 피아니시모(pp)로 줄어드는 구조이다.

55마디 앞부분은 34. 21 마디 두 부분으로 나뉘고, 34마디는 다시 21.13으로 나뉜다. 뒷부분의 34 마디도 13. 21로 나뉘어 피보나치수열을 그대로 적용됐다.

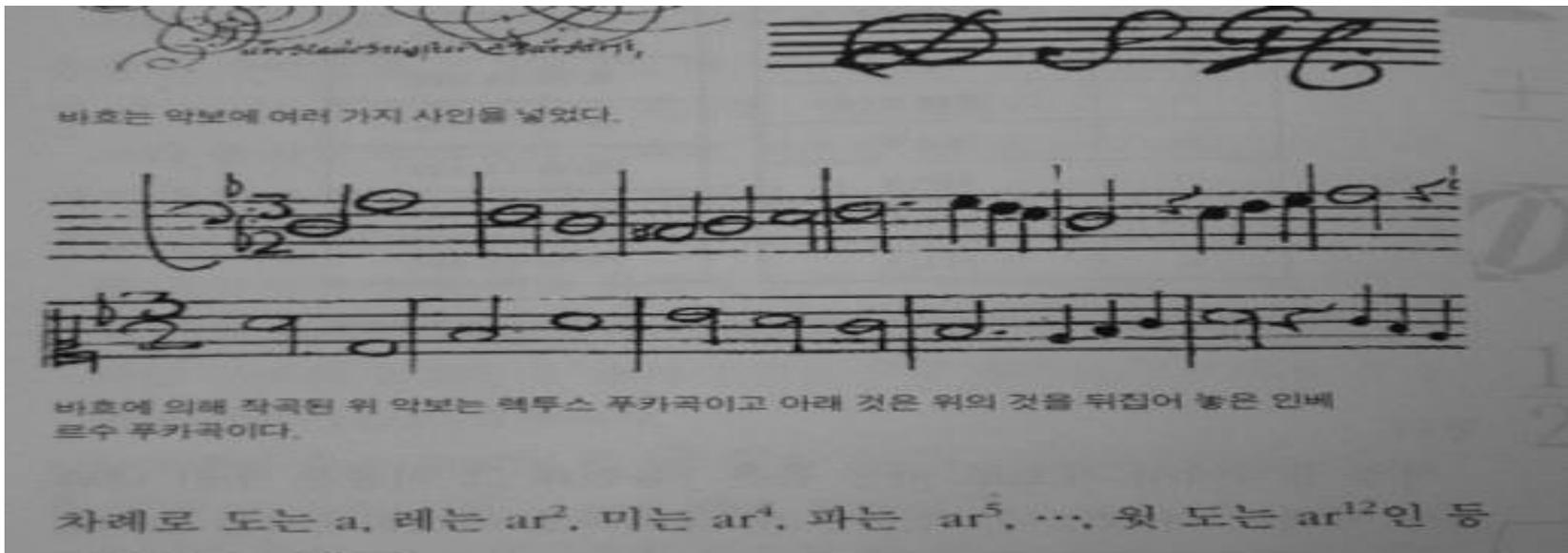


위대한 작곡가들은 자신이 좋아하는 수를 작품에 반영하거나 미적 균형을 유지하기 위해 치밀한 황금비와 같은 수학적 지식을 동원하고 있음을 알 수 있다.

수를 사랑한 음악가 바흐(Bach)

음악가중에 가장 수학적인 사람을 소개한다면 단연코 바흐(Bach)를 꼽는다. 작곡에서 숫자놀이를 즐겼고 그의 악보 중 '푸가(Fugue)'라는 악보는 두 단이 대칭을 이루고 있다.

(주: 그의 말년의 <음악의 헌정>과 <푸가의 기법>은 바흐의 대위법 예술의 정점을 보여주는 대작으로 대부분이 악기를 지정하지 않은 추상적인 성격을 지니며 일반적으로는 특수작품이라 하여 별개로 분류된다.)



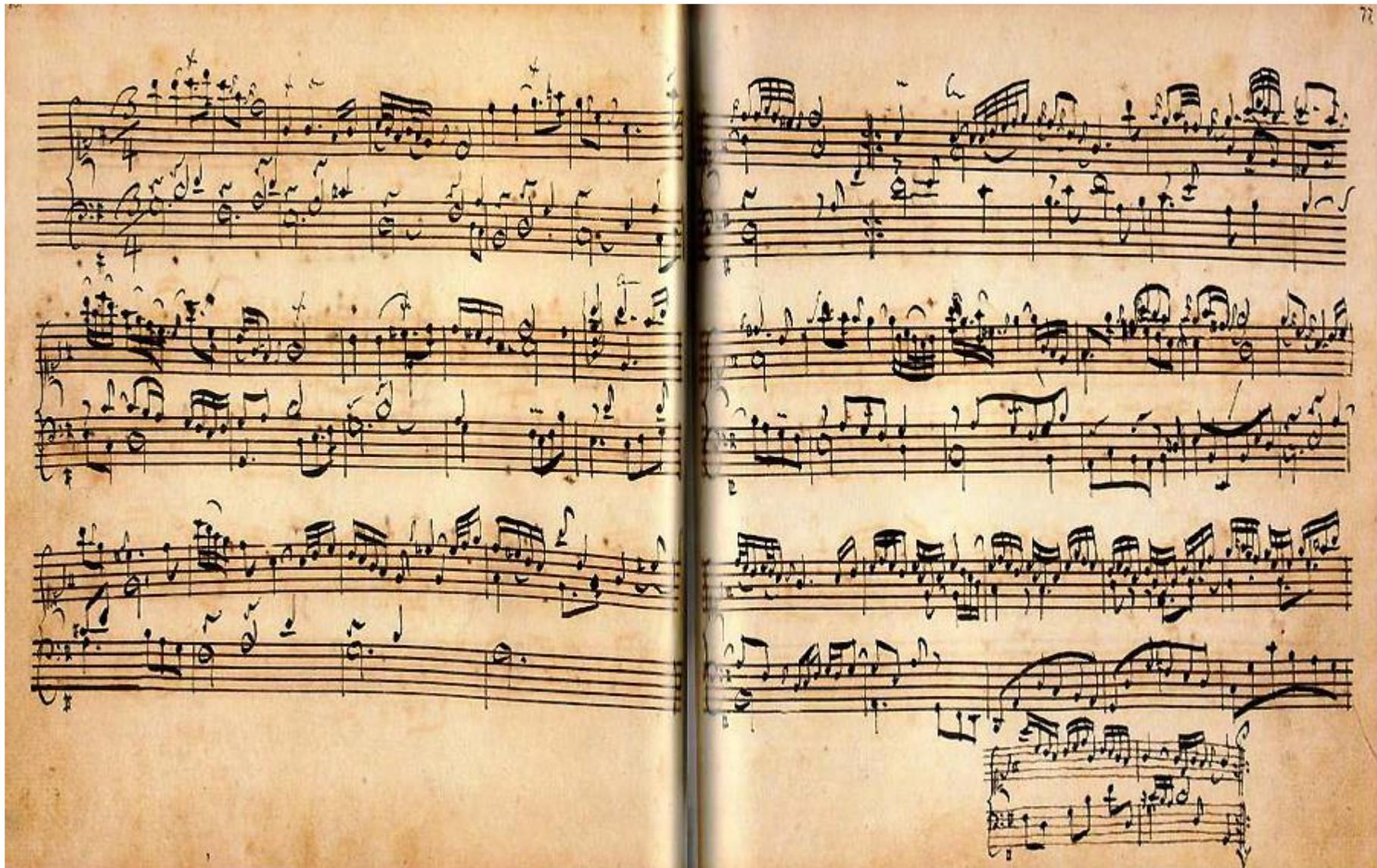
바흐는 악보에 여러 가지 사인을 넣었다.

바흐에 의해 작곡된 위 악보는 헥투스 푸카곡이고 아래 것은 위의 것을 뒤집어 놓은 인베르수 푸카곡이다.

차레로 도는 a, 레는 ar^2 , 미는 ar^4 , 파는 ar^5 , ... , 윗 도는 ar^{12} 인 등

가령 <골드베르크> 변주곡을 보면, 총 32곡의 개별 악장은 모두 32개의 음표로 된 지속 저음(ground bass)을 바탕으로 만들어졌으며 작품의 처음과 끝을 장식하는 아리아는 32마디로 된 사라방드가 16마디씩 전후반으로 나뉘어져 있다. 또, 변주곡들은 모두 3곡씩 소그룹을 이루고 있는데, 각각 서로 다른 성격을 부여해서 자연스럽게 논리적인 흐름을 만들어내고 있다. (이준형 / 음악평론가)

요한 세바스찬 바흐(J. S. Bach), 골드베르크 변주곡 BWV988, 자필악보



바하 음악 속에 흐르는 숫자의 뜻

바하(Johann Sebastian Bach: 1685-1750)는 1747 당시 제한된 회원들로 구성된 음악협회에 가입했는데, 이는 처음 가입하고자 했던 해보다 약 2년 뒤의 일이었다. 이유는 바하가 협회의 14번째 회원이 되기까지 기다렸던 것이다.

14란 숫자는 바하가 큰 의미를 부여하고 개인적으로도 무척 좋아한 숫자였다. BACH란 성의 알파벳의 숫자 값을 더하면 $14(2(B) + 1(A) + 3(C) + 8(H) = 14)$ 가 되기 때문이었다. 또한 J.S.Bach라는 이름 값은 옛 독일(라틴) 알파벳으로 $41(9(J, \text{라틴어에는 } J \text{가 없기 때문에 } I \text{ 값}) + 18(S) + 14(BACH))$ 이 되는데 이는 14를 거꾸로 한 값이 되며, 바하의 성과 이름을 전부 더한 값은 158이 되는데 이 숫자의 각 자리를 더하면 $14(1 + 5 + 8 = 14)$ 가 된다.

바하의 <평균율 클라비어 곡집>의 첫 주제는 14개의 음표로 구성되어있고, 그가 사위에게 최후로 구술한 <주여 당신의 옥좌 앞으로 나아갑시다>는 14개의 음표로 된 첫 줄과 모두 41개의 음표로 된 멜로디를 갖고 있다.

14외에도 바하의 작품에 영향을 끼친 숫자는 많이 있다.

1은 숫자 중 가장 신성한 수로, 2는 예수의 모방을, 3은 삼위일체를 상징하고, 4는 십자가와 네 방위 그리고 네 원소를 상징하며, 5는 모세 5경과 예수의 5군데 상처를, 6은 창조의 날들, 7은 7음계 및 주기도문의 7가지 간구와 성령(Holy Spirit)을, 10은 십계명을, 12는 12사도와 반음계의 12음과 12달 및 유대 12지파를 상징하고 있다. 한편 유다의 배반 때문에 13은 죄나 불행을 의미한다.

바하가 자신의 협주곡 6곡을 한데 모은 것은 3이 두 쌍 되는 6이라는 숫자가 가장 완벽한 구조를 보여주기 때문이다(Six English Pieces, Six French Suites, The Six Brandenburg Concertos).

또한 B단조 미사곡은 49마디($7 * 7 = \text{Holy, Holy}$)로 되어 있으며 사도신경이 7번 되풀이 된다. BWV 144와 145에서 충분함이 라는 뜻의 'Genueness'가 7번 반복되고, BWV 113과 115의 아리아에서도 <위로와 생명이 충만한 말씀>이라는 구절이 7번이나 반복된다.

BWV 77번 곡(주 너희 하나님을 사랑하라) 중 <이것은 신성한 십계명>이란 합창에서 주제를 10번이나 반복해 사용하며 트럼펫이 10번 등장한다. 구세주의 이름까지도 112음 또는 112박자($C + H + R + I + S + T + U + S = 3 + 8 + 17 + 9 + 18 + 19 + 20 + 18 = 112$)로 표현하였다.

14와 더불어 바하가 특히 좋아했던 숫자가 84이다. 이는 바하의 숫자 14에 6(천지창조의 날들)을 곱한 값으로 Patrem Omnipotentem곡이 84개의 마디로 되어 있는 것을 비롯하여 많은 바하곡들이 84마디로 되어 있으며 때로는 바하 작품의 마지막에 84라는 숫자를 발견할 수도 있다. 이는 바하가 84라는 숫자를 얼마나 사랑했는가를 나타내 주고 있다.

Die Kunst der Fuge

I – Contrapunctus 1

Johann Sebastian Bach (1685–1750)

Musical score for Contrapunctus 1, measures 1-8. It features four staves labeled Stimme 1, Stimme 2, Stimme 3, and Stimme 4. The notation is in C minor and 4/4 time.

Musical score for Contrapunctus 1, measures 9-15. It features four staves labeled Stimme 1, Stimme 2, Stimme 3, and Stimme 4. The notation is in C minor and 4/4 time.

Musical score for Contrapunctus 1, measures 16-21. It features four staves labeled Stimme 1, Stimme 2, Stimme 3, and Stimme 4. The notation is in C minor and 4/4 time.

Handwritten musical score for Contrapunctus 1, measures 16-21. The notation is in C minor and 4/4 time. The handwriting is in German.

B aber Dieser Fuge wo Der Kaffee
B A C H in Contrapunctus
reguliert worden ist
Der Kaffee geputzt.

[BWV906 환상곡과 푸가 C단 조 중 환상곡의 시작 페이지와

BWV1080 푸가의 기법중 마지막곡인 미완성 4성 푸가의 B-A-C-H가 명기되어있는 종지부]

MayaC plays the Bach Fantasia in C minor BMW906
http://youtu.be/IKqnwUgVb_Q

¹ Numerierung im Autograph – numbering in autograph.

바하의 음악적 서명은 <그림>과 같이 재미있게 표현된다. 바하는 이러한 사인을 그의 작곡에서도 보여주고 있는데, <푸가의 기법>의 마지막에 B-A-C-H로 나타내는 음표로 푸가의 주제를 싣고 있는 사실 또한 매우 인상적이다.

이 패턴은 B에서 A로 반음 그리고 다시 C로 반음이 세 번 상승하고 마지막으로 H(독일에서는 B단조를 B로, B음은 H로 구분한다)로 반음이 내려오는 -1, +3, -1 과 같은 대칭식을 나타내고 있다. 이러한 대칭사상은 12번째 푸가에서 거울에 비춰 본 것과 같이 나타나는데 중심 주제를 변주한 악보를 뒤집어서 밑에 붙여 놓고 있다.

오르간 연주자, 하프시코드 연주자, 즉흥연주자, 푸가의 통달자 등으로서 명성을 날린 바하는 또한 열렬한 기독교인이었다 그는 종교음악을 작곡할 때면 시작 부분엔 구세주 예수(Jesu Juva)를 나타내는 문자 J.J.를 적어 넣고 끝 부분엔 오직 하나님께 영광(Soli Deo Gloria)을 나타내는 문자 S.D.G.(또는 D.S.G.)를 적어 넣었다.

요한 수난곡(1724), 마태 수난곡(1727), 누가 수난곡(1730), 마가 수난곡(1731)은 사복음서에 나타난 예수의 고난받는 장면을 주제로 한 곡인데 특히 마태 수난곡에서 예수의 말씀이 나오는 장면은 예외 없이 음표의 개수와 성서를 연결시키고 있다. 예를 들면 제2번의 예수가 다가올 고난을 예고하는 장면은 7개의 음표로 되어 있는데 이는 시편 7편의 내용을, 예수가 향료든 여자의 순결함을 말하는 제8번은 24개의 음표로 되어 있는데 이는 시편 24편을 인용한 것 등이다.

자율적 구조를 가진 작품의 작곡가, 수사학자, 상징주의자 혹은 숫자사상가로도 불리우는 바하는 믿음과 예술 사이에서 영적 연결점을 찾고자 애썼으며 숫자는 그 가교 역할을 했다고 볼 수 있다.

■ 바이올린 Moderato

오스트리아 민요

바 이 올 린 소 - 리 잔 잔 - 잔 - 잔 - 잔 잔 잔

클 라 리 넷 달 콤 한 멜 로 - 디 참 아 - 림 - 다 워 라

클 라 리 넷 클 라 리 넷 듯 두 아 두 아 두 아 두 아 데

호 른 소 리 크 고 맑 아

또 트럼 췌은 트럼 췌 따 따 따 따 따 트럼 췌 따 따 따 따 따

등 탕 탕 탕 탕 탕 신 나 는 팀 파 니

술 도 도 술 술 등 등 등 등

술 도 도 술 술 등 등 등 등

술 도 도 술 술 등 등 등 등

술 도 도 술 술 등 등 등 등

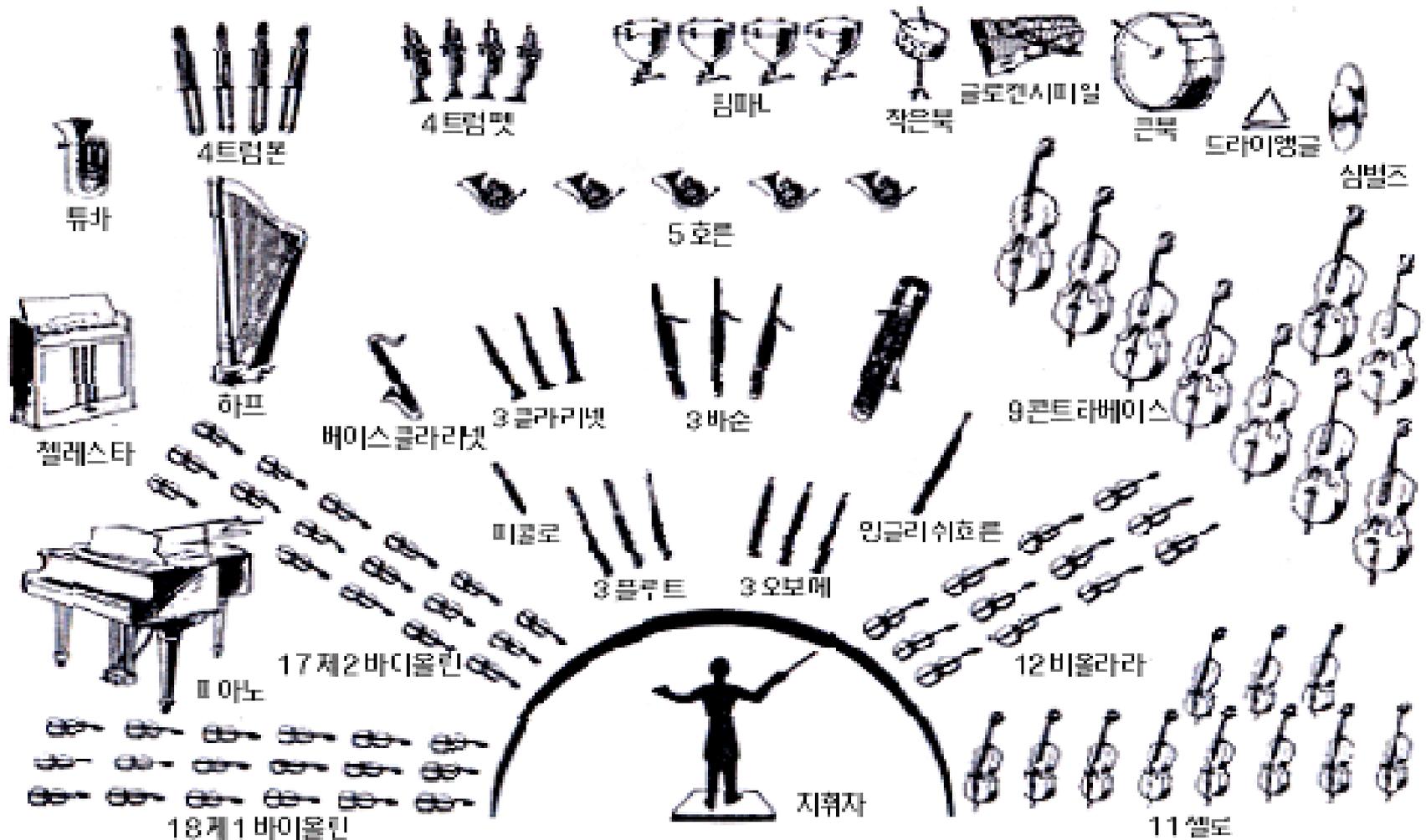
술 도 도 술 술 등 등 등 등

작곡에 사용된 수 학적 규칙

악보의 기록:

한 마디 안의 박자수는 일정하다.

관현 악보의 기록



관현악보의 기록은 수학이 음악에서 그의 영향을 보여주는 첫 번째의 명확한 분야이다.

악보에서, 우리는 박자(4/4박자, 3/4박자 등), 악장, 1음표, 1/2음표, 1/4음표, 1/8음표, 1/16음표 등을 찾을 수 있다.

이 때 악보에 마디마다 x 분 음표의 수를 맞추는 것은 공통분모를 찾는 것과 같다.

한 마디안에 주어진 박자수와 같도록 다른 길이의 음표를 길이를 조정하여 작곡을 한다.

완성된 작곡을 분석할 때, 모든 악기들은 다양하게 구성되어 있는 박자의 길이를 맞추는 규칙에 따라 연주하고 있다.

음악의 기본 요소

*음정

수학에서의 비례의 성질에 의존하고 있다.

*길이

물체의 진동시간에 비례하며,
음의 길이와 진동시간을 같게 본다.

*세기

강도는 소리의 강약을 말하는데
진동하는 폭에 비례한다.

*음색

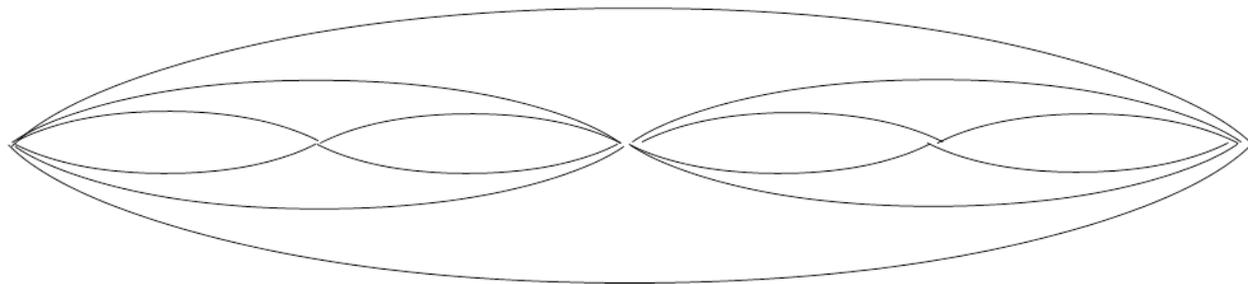
진동하는 물체의 성질과 진동상태에 의존한다.

※ 음색을 제외한 나머지 요소(음정, 길이, 세기)는 삼각함수 중 \sin 혹은 \cos 곡선으로 설명 가능하다.

19세기에 수학자 존 푸리에(john Fourier)의 연구 논문에서 모든 음악의 소리는 주기함수인 sine함수들의 합 $A \cos(\omega t + \theta), B \sin(\omega t + \theta)$ 으로 표시된다고 하였다.

푸리에의 발견은 음에 대한 세 가지 성질들을 그래프로 나타내고 또 구별 지을 수 있게 했다.

음의 고저는 곡선의 주기와 관계되고 음의 세기는 진폭, 그리고 음색은 주기 함수의 모양에 따라 나타난다.



소리는 삼각함수로 표현 가능하다

[Feedback 문제]

문제 1] 20세기 최고의 관현악 작품의 하나로 꼽히는 바르토크의 '현. 타악기. 첼레스타를 위한 음악'에서 피보나치수열이 사용되어졌다고 한다. 이 곡의 악보는 전체 89마디로 만들어졌다. 클라이막스로 추정되어지는 마디는?

- ① 21번째 마디 ② 34번째 마디 ③ 55번째 마디 ④ 89번째 마디

문제 2] '도'의 주파수가 261이라고 한다. 반음간의 공비를 1.06이라하고 한음 위인 '레'의 주파수를 계산하라. (소수점 첫째자리에서 반올림하라.)

문제 3] 길이가 1.5m인 팽팽한 줄을 튕겼더니 소리가 났다. 만약 1.0m의 줄을 튕기면 처음의 음과 얼마간의 음정차이가 있는가?

문제 4] 주파수(진동수)와 음정과의 관계를 수열로 나타내면?

[Feedback 문제의 답]

문제 1] 20세기 최고의 관현악 작품의 하나로 꼽히는 바르토크의 '현. 타악기. 첼레스타를 위한 음악'에서 피보나치수열이 사용되어졌다고 한다. 이 곡의 악보는 전체 89마디로 만들어졌다. 클라이막스로 추정되어지는 마디는?

- ① 21번째 마디 ② 34번째 마디 ③ 55번째 마디 ④ 89번째 마디

문제 1의 답] 3번, 55번째 마디가 클라이막스이다.

문제 2] "도"의 주파수가 261이라고 한다. 반음간의 공비를 1.06이라하고 한음 위인 '레'의 주파수를 계산하라. (소수점 첫째자리에서 반올림하라.)

문제 2의 답] 등비 수열공식에 의하여 계산하면 약 294 Hz

문제 3] 길이가 1.5m인 팽팽한 줄을 튕겼더니 소리가 났다. 만약 1.0m의 줄을 튕기면 처음의 음과 얼마간의 음정차이가 있는가?

문제 3의 답] 음계명은 "솔"로서 음정은 5도 차이가 난다.

문제 4] 주파수(진동수)와 음정과의 관계를 수열로 나타내면?

문제 4의 답] 등비수열을 이룬다.

[수학적 배경]

공배수(common multiple): 두 개 이상의 수에 공통된 배수를 말하고 이들 중 최소인 수를 최소공배수라 한다.

공약수(common divisor): 두 개 이상의 수에 공통된 약수를 말하고 이들 중 최대인 수를 최대공약수라 한다. 공인수라고도 함.

유리수(rational number): 두 개의 정수 a 와 0 이 아닌 b 를 취하여 분수 a/b 의 꼴로 나타내어 지는 수.

무리수: 실수 중에서 유리수가 아닌 수를 무리수라고 하며 이는 순환하지 않는 무한소수이다.

등차수열(Arithmetic Sequence) :

앞의 항에 일정한 수를 더한 값이 다음 항이되는 수열입니다. 여기서 더해지는 일정한 수를 공차라고 하고 d 라고 쓴다. 예를 들어 첫 항이 1 이고 공차가 3 인 등차 수열은 $1, 4, 7, 10, \dots$ 이다. 첫항이 a 이고 등차가 d 인 등차수열의 합은 $a + (n-1)d$ 이다.

등비수열(Geometric Sequence):

앞의 항에 일정한 수를 곱한 값이 다음 항이 되는 수열이다. 여기서 곱해지는 일정한 수를 공비라고 합니다. 보통 r 로 쓴다.

예를 들어 첫항이 1 이고 공비가 2 인 등비수열은 $1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, \dots$ 이다. 첫항 a 이고 공비가 r 인 등비수열의 일반항은 $ar^{(n-1)}$ 입니다. (r 의 $n-1$ 제곱)

조화수열(Harmonic Progression) :

그 역수가 등차수열인 수열을 조화수열이라 한다. 예를 들어 $1/2, 1/4, 1/6, 1/8, \dots$ 은 각각의 역수를 취하면 $2, 4, 6, 8, \dots$ 등차수열이 되므로 조화수열이다.

피보나치 수열:

앞의 두 항의 합이 다음 항이되는 수열 (파인애플, 해바라기에서 볼 수 있음)
예 : $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$

삼각함수:

그래프에서 중점을 원점으로, 반지름이 1인 원에서 모든 것이 설명가능하다. 이 원을 '단위원'이라 한다. 단위원, 1사분면 원 상의 적당한 곳에 한 점을 찍는다.

만약, 그 점을 원점(중점)과 직선으로 이었을 경우, 이 선분이 x축과의 각도가 30도라고 하자. 그럼, 아무 곳에 찍은 한 점의 좌표(x,y) 값이 나오는데 이때, y값(높이) = $\sin 30'$ 의 값, x값(가로) = $\cos 30'$ 의 값, y/x (x분의 y) = $\tan 30'$ 의 값이다. 즉, 원 위의 점의 높이가 \sin 값이고, 점의 가로가 \cos 값, 높이/가로가 \tan 값이다.

예를 들어,

$\sin 30'$ 는 원점과 원위의 점을 선으로 잇고, x축과의 각이 30도 일때, 원 위의 점 높이값(y)이다.

$\cos 30'$ 는 원점과 원위의 점을 선으로 잇고, x축과의 각이 30도 일때, 원 위의 점 가로값(x)이다.

$\tan 30'$ 는 원점과 원위의 점을 선으로 잇고, x축과의 각이 30도 일때, 원 위의 점 높이값(y) / 가로값(x)이다.(분자/분모)

삼각비: 직각삼각형에서 두 변의 비를 각각 말하는 것으로 사인은 높이/빗변, 코사인은 밑변/빗변, 탄젠트는 높이/밑변의 비의 값을 의미한다.

[더 나아가기]

1. 피타고라스 정리의 유래

피타고라스는 학생들을 '피타고라스 학도'라는 정식 학생과 청강생으로 나누었고, '그리스인 중 가장 현명하고 가장 용감한 자'라는 존칭을 받은 피타고라스는 흰 까운에 별 모양의 5각형 무늬를 새긴 황금 관을 쓰고 위풍당당하게 교단에 섰다고 한다.

그리고 학도들은 배운 내용에 관해서는 일체 비밀을 지켰으며 특히 정식 학도들은 간소한 생활, 엄격한 교리, 극기, 절제, 순결, 순종의 미덕증진을 목적으로 단체 행동을 하며 전심전력을 다하였다.

이들은 피타고라스의 수업을 완전히 이해했을 뿐만 아니라 나름대로 새로운 정리를 만들어 내곤 하였다. 이 학회에 들어오는 사람은 자신이 가지고 있는 모든 재산을 학회에 헌납했다.

영혼의 불멸을 논하는 일종의 종교 단체로서 의식을 거행하고, 그 제자들의 발견은 모두 피타고라스의 것으로 하고 그 발견을 외부에 누설하지 못하게 했다. 그리하여 이 교단은 세력을 갖게 되었고, 각 방면에서 선망과 동시에 질시의 표적이 되어 드디어 정치적 반대파로부터 불의의 공격을 받게 되었다.

피타고라스당의 사람들은 이 사실을 알고 부녀자들을 배에 태워 시실리 방면으로 미리 피난시키고, 피타고라스를 호위하면서 메소포타미아쪽으로 도망을 갔으나 피타고라스는 메타폰툼에서 체포되어 살해되고 말았다.

그리스 7현 중의 한 사람인 그의 최후는 아르키메데스처럼 비장한 것이었다. 이 때에 피타고라스의 학교는 불태워졌으며, 그의 학파는 그리스의 여기저기에 흩어져서 약 200년간 활동하였다.

피타고라스는 만물의 원리를 수(數)에 두고, 세계를 수적 관계 또는 비례에 기초를 둔 음악적인 일대 조화로 보았다.

그리고 수에서의 조화의 관계에 의한 영혼의 정화(淨化)를 인생의 최대 목적으로 삼았고 오르페우스교적 신비주의에 의하여 영혼의 불멸과 윤회를 믿고 엄격한 금욕생활을 하였다.

당대의 철학자 소크라테스, 플라톤 등에 많은 영향을 끼쳤으며, 수학에서는 직각삼각형에 관한 '피타고라스의 정리'가 유명하며, 천문학에서는 천동설을 주장하였다고 한다.

2. 피타고라스학파

"육체는 무덤"이라는 교의를 가지고, 철저한 금욕주의 생활을 하며 불사전생을 교의로 삼고 채식만을 지킨 피타고라스 교단의 생활은 실로 엄격하였다고 전해진다.

이 교단은 콩을 이용해 숫자를 계산했는데 이 때문에 콩을 먹는 것조차 금했다. 피타고라스학파의 규칙인데 참으로 희한한 규칙으로 범인으로서의 이해가 되지 않는 것도 포함되어 있으나 그 당시의 사회적, 종교적 상황을 고려하여 생각해볼 때 이해되어야 할 것으로 생각된다.

1. 콩을 먹어서는 안 된다.
2. 떨어진 물건은 주워 올리지 말라.
3. 흰 수놓 새에게 손을 대지 말라.
4. 빵을 뜯지 말라.
5. 빗장쇠를 타고 넘지 말라.
6. 쇠 고챙이로 불을 일으키지 말라.
7. 통째로 음식을 먹지 말라.
8. 꽃 장식을 들지 말라.
9. 말 위에 앉지 말라.
10. 마음을 즐이지 말라.
11. 큰 길을 걷지 말라.
12. 제비에게 집의 처마를 빌려 주지 말라.
13. 단지에서 불을 꺼낼 때 재에 형태를 남기지 말라.
14. 불 옆에서 거울을 보지 말라.
15. 침대에서 일어날 때는 몸의 자국이 남지 않도록 시트를 펴라.

3. 벨라 바르토크(Bartok, Bela 1881~1945 헝가리 작곡가. 나지센트미클로슈 출생.)

20세기 초, 서양 작곡가들은 후기 낭만주의의 대형화된 관현악과 기능 구성에 한계를 느끼고 새로운 음악적 표현을 모색하기 위해 다양한 음악 양식을 발전시킨다.

이러한 흐름은 크게 세 가지 방향으로 진행됐는데,
첫째는 민족적 어법을 사용한 음악,
둘째는 과거의 양식을 새롭게 표현한 신고전주의 음악,
그리고 제 2 빈 악파에 의해 주도된 무조 음악이다.

그 중 바르토크가 택했던 길은 민족주의 음악이다.

어떻게 보면 민속적인 소재를 음악에 도입하는 일은 별로 새로운 것도 없다.
20세기 이전에도 슈베르트와 브람스의 헝가리풍 음악이나 리스트의 '헝가리안 랩소디' 등, 이국 민요를 서양 음악에 도입한 예는 얼마든지 있기 때문이다.
그러나 엄밀하게 보면 그 음악에 나타난 민요 선율은 토착민들이 부르던 원래의 소박한 민요라고 할 수 없다. 그것은 서양 음계와 화음을 붙여 세련되게 포장해놓은 가공된 민요인 것이다.

그러나 바르토크의 경우는 다르다.

그는 헝가리로부터 슬로바키아, 루마니아 등지의 벽지 농촌을 누비며 14,000곡 이상의 풍부한 민요들을 채집하고 연구해, 다듬어지지 않은 소박한 민요 속에 숨어 있는 음악적 아이디어를 그 자신의 음악과 결합시켰다.

그는 민속 음악의 특징을 전통적인 구성에 억지로 짜맞추는 대신, 민요 속에 담긴 특유의 표현으로 조성 음악을 변형시킴으로써 20세기 음악이 나아갈 새로운 길을 제시했던 것이다.

그러나 바르토크 역시 초기에는 선배 작곡가들과 전통적인 작곡 기법으로부터 출발했다. 주로 드뷔시의 영향이 나타나는 그의 '랩소디'와 오케스트라를 위한 '모음곡' 등의 작품에서 인상주의 색채와 형식을 발견할 수 있다.

바르토크의 독창적이고 성숙한 양식은 1908년 작곡한 피아노를 위한 '바가텔'로부터 시작된다. 그후 1911년 작품인 피아노를 위한 '알레그로 바르바로'에서는 세계 두드러대는 열광적인 리듬과 모티프의 반복 기법을 통해 피아노를 마치 타악기처럼 다루는 그의 독특한 악기법을 보여준다.

1917년에 작곡된 현악 4중주 2번과 '중국의 이상한 관리'는 바르토크의 양식이 민족적인 방향으로 전환하기 위해 거쳐야 했던 과도기적 작품으로서, 각각 쇤베르크와 스트라빈스키의 영향을 보여준다.

그는 여기서 쇤베르크가 이루어놓은 표현주의적 반음계와 대위법, 그리고 스트라빈스키식 격렬한 리듬과 화성적 불협화를 거쳐 민족적 어법으로 향하고 있다.

1930년대에 이르러, 불협화적 화음과 울동적이며 거친 민속적 리듬이 드러나는 바르토크의 전형적인 작품들이 탄생한다. 루마니아 민요를 토대로 한 성악과 오케스트라를 위한 합창곡 '칸타타 프로파나'(1930), 역동적이고 정력적인 현악 4중주 5번(1934), 피아노 연습곡 '미크로코스모스'(1926~1937), 관현악을 위한 협주곡(1944) 등은 바르토크 음악의 특징을 잘 나타내는 전형적인 작품들이다.

그러나 무엇보다도 이 시기의 대표작은 1936년 작곡된 '현악기, 타악기, 첼레스타를 위한 음악'으로, 시각 예술에 주로 사용됐던 '황금 분할'의 원리와 거울 형식 등의 독특한 기법을 적용함으로써 음악 형식의 통일성을 이루고자 했다.

바르토크는 동부 유럽의 민요에서 유래한 선율선과 색다른 악센트로 이루어진 역동적인 리듬을, 바흐의 대위법적 텍스처와 베토벤의 동기 발전 수법, 그리고 드뷔시의 음향적 색채 속에 용해시킬 수 있었던 작곡가였다. 바르토크만큼 20세기의 민속 양식과 예술 양식의 결합을 완전하게 실현한 작곡가도 없을 것이다

- 출처: 이준형 음악 평론가

요약

음계의 탄생

- 피타고라스 8음계(진폭에 따른 진동수(//음정)),
현의 길이 음정 : 조화수열,
- 평균률 12음계(진동수에 따른 등비수열) ...
음정에따른 주파수(진동수): 등비수열

작곡과 연주 - 수열과 경우의 수

바르토크의 작곡 - 피보나찌수열
경우의 수를 응용한 피아노 연주가
캐논 변주곡, 바하의 대위법

화음 - 진동수의 정수 비례 도미솔 4:5:6 (무리수는 불협화음)

현악기의 제작 - 피아노, 챔발로(로그함수), 기타, ...

소리의 가공 (분석 합성 증폭) - 새로운소리

스피커, 전위음악, (삼각함수, 푸리에 급수전개)

음악치료 - 같은 진동을 가진 현은 따라서 진동한다.

같은 진동수를 가진 물체는 동시에 진동한다.

출처 및 참고문헌 :

<http://www.mathland.pe.kr/>

http://chaos.inje.ac.kr/Alife/aporia_pythagoras.htm

<http://www.mathlove.com/>

http://csone.kaist.ac.kr/~chopin/music/writings_music/xenakis/rationalism.txt

http://www.konkuk.ac.kr/HOME/Math/projectB/students/수학과지/hana2/hana2_5.htm

출처:

http://navercast.naver.com/contents.nhn?rid=22&contents_id=16616

글 조가현 | 기자

자료제공 수학동아 <http://math.dongascience.com>

사진: 위키미디어, 동아일보

일러스트 소슬랑

참고자료

드미트리 티모츠크(미국 프린스턴대 음악과 교수)의 논문, 앤서니 애슈턴의 <하모노그래프>

소리가 그린 도형

프랑스의 수학자 *[질 리사주](#)는 소리를 도형으로 나타낼 수 있는 실험 장치를 고안했다.

리사주가 고안한 실험 장치는 두 소리굽쇠에서 발생하는 진동의 모양을 거울 반사를 이용해 검은 스크린에 나타내도록 설계되어 있다. 이렇게 두 소리굽쇠의 진동을 도형으로 표현한 것을 '[리사주 도형](#)'이라고 한다.

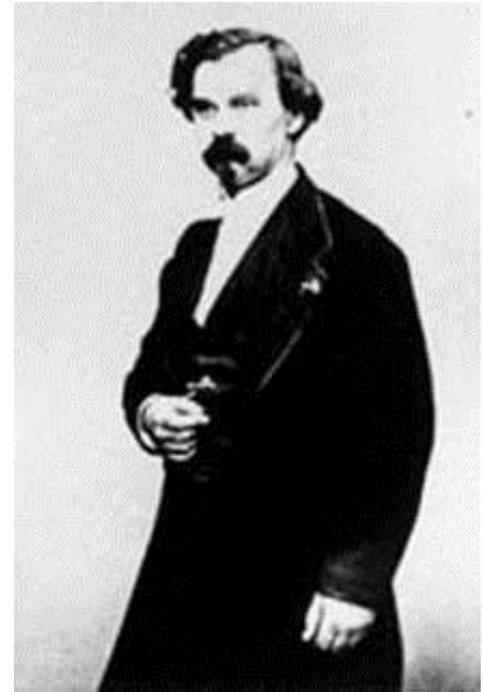
*[\(주\) Jules Antoine Lissajous](#) , 리사주 곡선(Courbe de Lissajous)

[주] 리사주 곡선(Courbe de Lissajous)은 x, y 좌표가 위상이 다른 사인 곡선인 곡선이다. 나다니엘 보디치(Nathaniel Bowditch)의 이름을 따서 보디치곡선(Bowditch) 이라고도 한다.

Lissajous Curve

$$C(t)=(x(t), y(t)), \quad x = A\sin(at+\delta), \quad y = B\sin(bt),$$

(A, B, a, b, δ 는 상수)

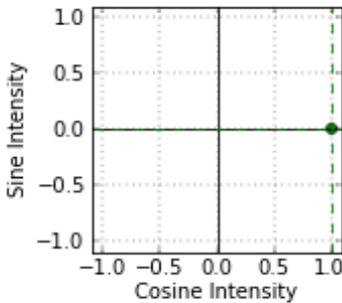
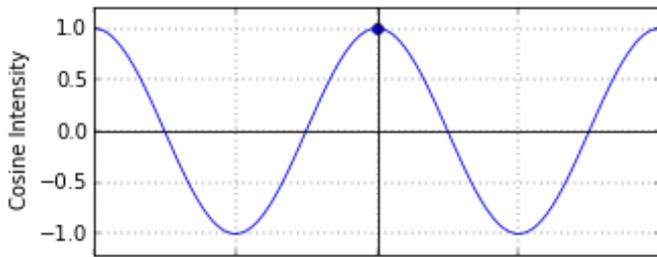
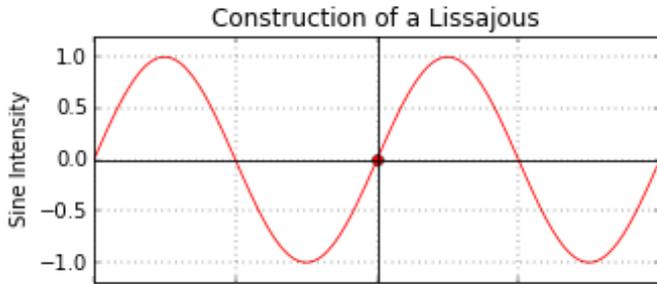


Jules Antoine Lissajous



Nathaniel Bowditch

1815년 미국의 수학자 나다니엘 보디치(Nathaniel Bowditch)가 처음으로 연구했으며, 1857~58년 프랑스의 수학자 쥘 장투안 리사주(Jules Antoine Lissajous , 1822-1880) 가 독립적으로 이 곡선들을 연구했다.



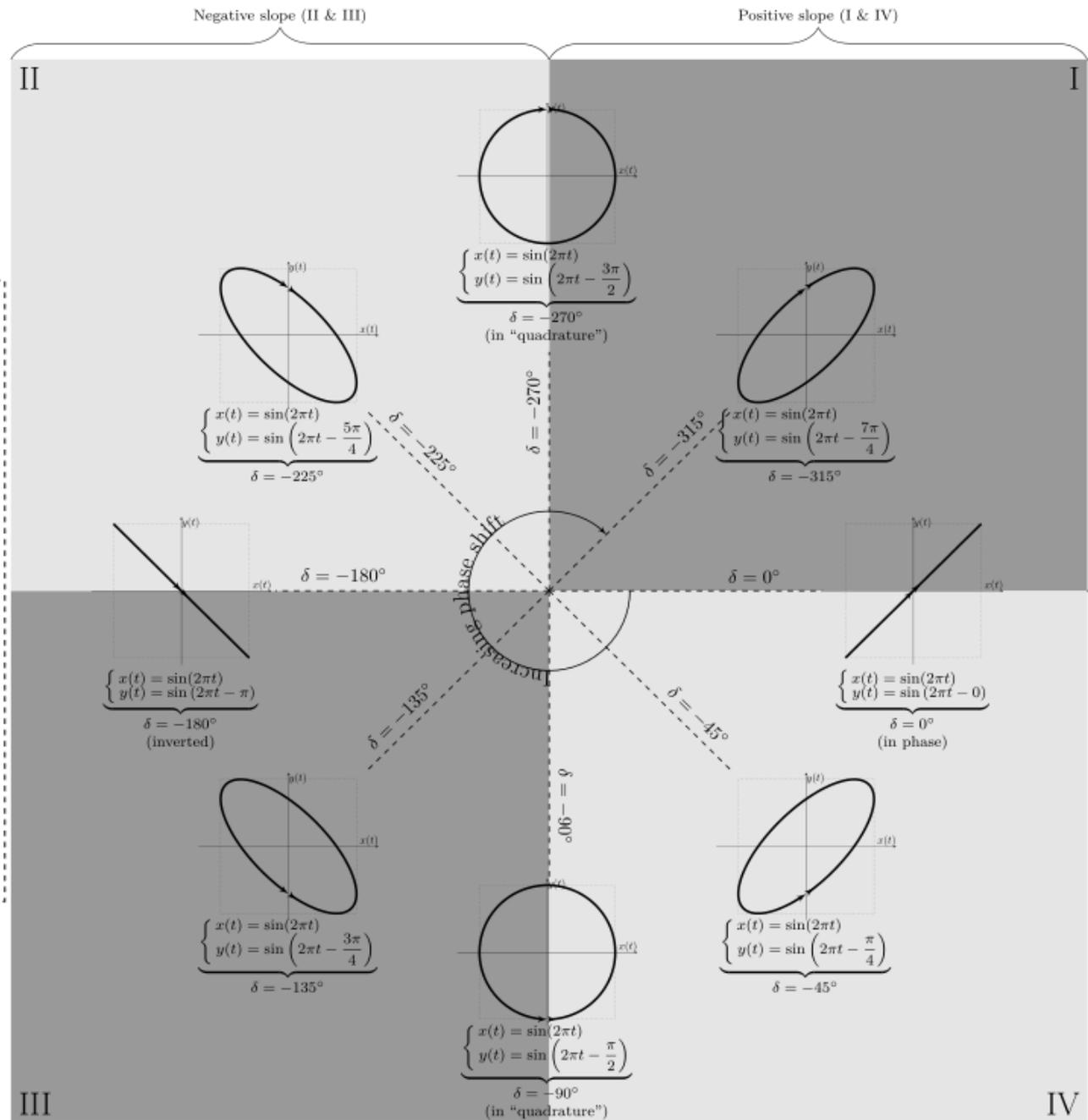
리사주 곡선의 예
 $C(t) = (x(t), y(t))$,
 $x(t) = \sin(t + \pi/2)$,
 $= \cos t$,
 $y(t) = \sin t$

리사주 곡선의 예를 들면

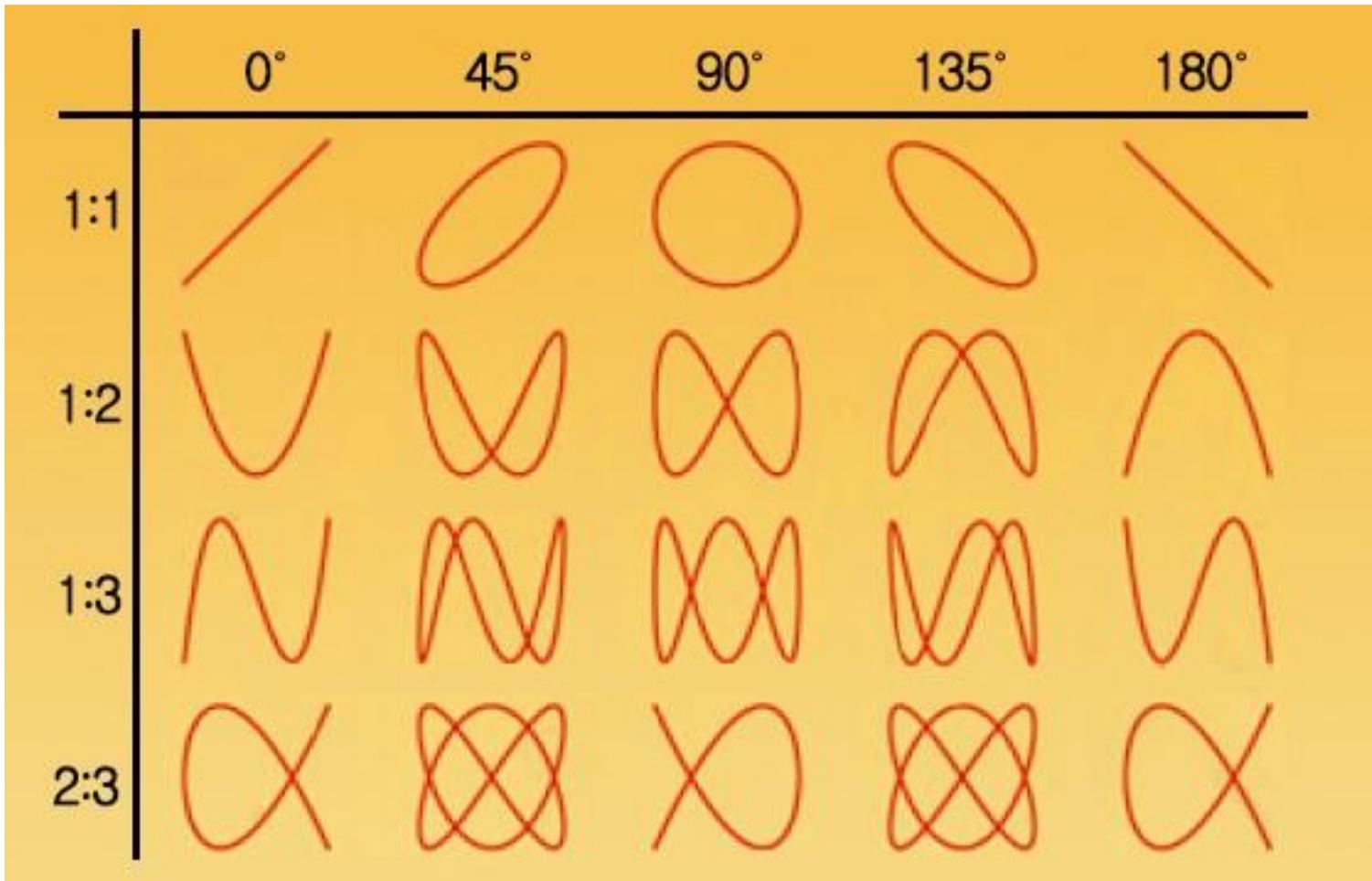
| 진동수의 비(a:b) | 주기의 차이(δ) | 그래프의 모양 |
|-------------|--------------------|-----------------------|
| 1 : 1 | 같다 | $y = x$ 직선 |
| | 90° | $x^2 + y^2 = 1$ 원 |
| 1 : 2 | 같다 | 아래로 볼록한 포물선 |
| | 90° | 무한대 기호 모양(∞) |
| ... | ... | ... |

두 소리굽쇠의 진동수를 각각 a 와 b 라고 하고 진동수의 주기 차이를 δ , 시간을 t 라고 하면 리사주 도형을 함수식 $x = A \sin(at)$, $y = B \sin(bt + \delta)$ 로 표현할 수 있다.

LTI Lissajous figures are ovals with eccentricity and direction of rotation determined by phase shift δ .



소리 굽쇠의 주기의 차이



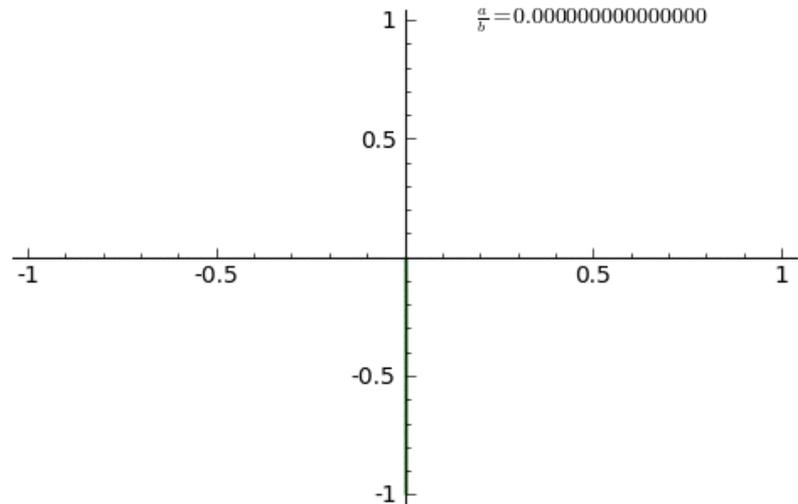
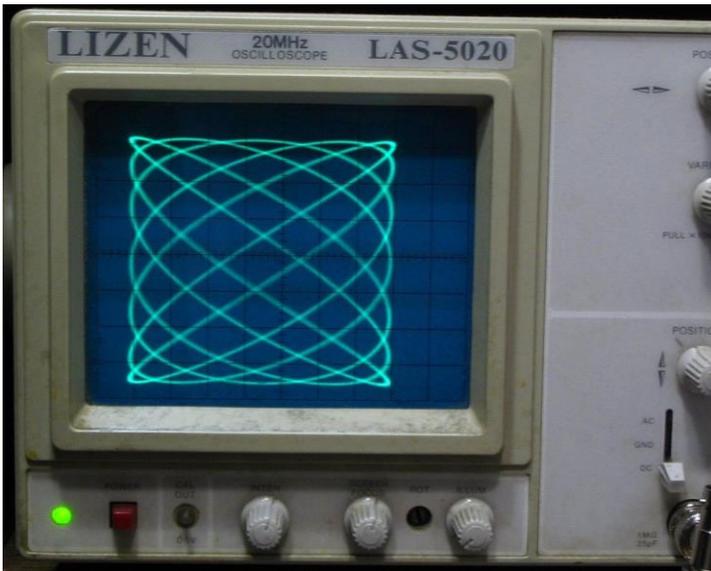
소리 굽쇠의 진동수의 비

(참고) 진동수의 비가 1:1이고 서로의 주기가 같으면(0) $y=x$ 직선 그래프

<http://youtu.be/CMzKEqID0qk>

곡선이 서로 일치하지 않고 진동수도 다르면, 복잡하게 얽힌 도형이 된다. 전자공학에서 이 곡선들은 오실로스코프(oscilloscope) 화면 위에 나타내지며, 모르는 전기신호의 특성을 확인하기 위해 쓰일 수 있다.

오실로스코프에 나타난 리사주.



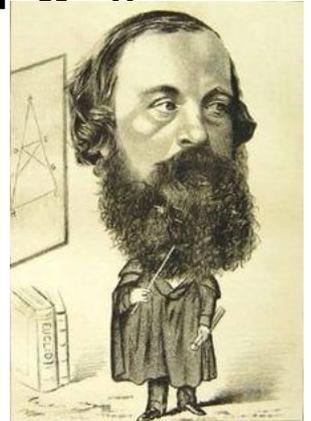
이를 위해서는 두 곡선 가운데 하나는 이미 특성이 알려진 신호여야 한다. 일반적으로 이 곡선들은 서로 직각을 이루는 1쌍의 단조화운동의 성질을 분석하기 위해 사용된다.

하모노그래프 장치

스코틀랜드의 수학자 위그 블랙번*(Hugh Blackburn) 은. '하모노그래프 장치'를 고안

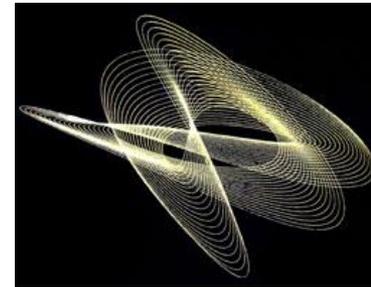
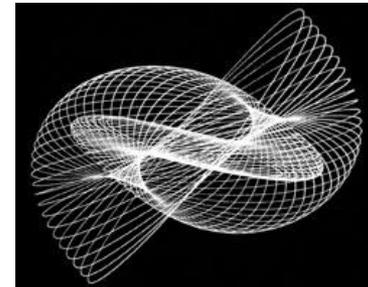
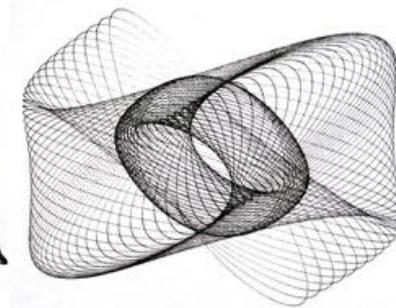
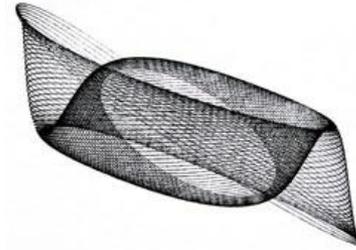
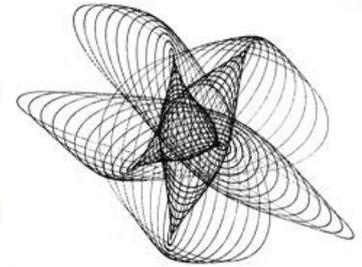
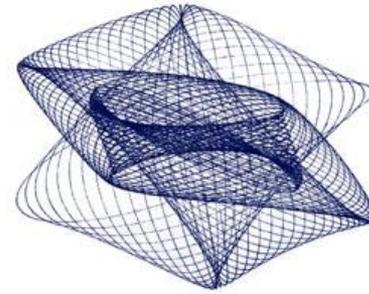
(*주)음계를 도형으로 나타낸 리사주의 연구를 한 단계 더 발전시킨 사람

이 하모노그래프 장치에는 각각의 단진자에는 펜과 종이가 연결되어 있어, 소리의 진동수에 따라 단진자가 움직이는 대로 도형을 그린다.



단진자의 진동수는 길이의 제곱근에 반비례 하고 한 옥타브를 높이려면 단진자 길이를 4분의 1로 줄이면 된다.

또한 여러 음정이 동시에 어우러질 때는 진동수의 비를 곱하면 된다. 예를 들어 한 옥타브와 장 3도를 합친 화음이라면, 2:1과 5:4을 곱하면 되므로 $10:4=5:2$ 의 진동수를 갖는다.



<http://youtu.be/HJYvc-ISrf8>

단진자가 2개인 하모노그래프 장치의 구조

1. 책상 구멍 밑으로 서로 수직이 되도록 움직이는 두 개의 단진자를 설치한다. 그 중 하나는 가능한 낮은 지점에 추를 단다. 다른 하나는 어떤 음을 표현하고 싶느냐에 따라 원하는 비율을 갖도록 길이를 조정해 단다.

2. 책상 위에는 두 개의 단진자 축이 있는데, 한 단진자의 축에는 종이를 끼우고 나머지 단진자 축에는 펜을 단다. 단진자를 진동시키면 종이 위에 하모노그래프가 그려진다.

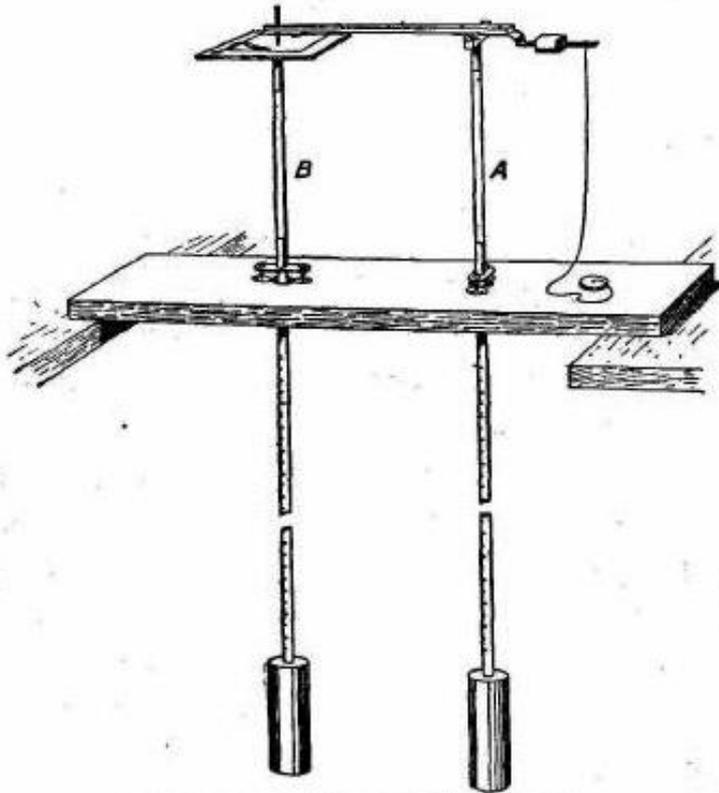


FIG. 168.—Simple Rectilinear Harmonograph.

블랙번은 이를 통해 음정이 한 옥타브 즉,
진동수의 비가 2 : 1일 때 가장 간단하면서도
아름다운 도형이 그려진다는 것을 알아냈다.

두 원운동이
반대방향회전 => 삼각형 구조의 원 형태
같은 방향회전 => 하트

진동수비가 2 : 1 을 조금 벗어나면
뱅글뱅글 돌아가는 소용돌이가 생겨났다.

하모노그래프 장치에서

진동수의 비에 따라 단진자의 길이를 조절해 작동하면, **리사주 도형** 과 같은 도형이 생긴다.

즉 진동수가 1 : 1 로 음정이 같으면
그 진동의 주기에 따라
직선, 타원, 원이 그려진다.

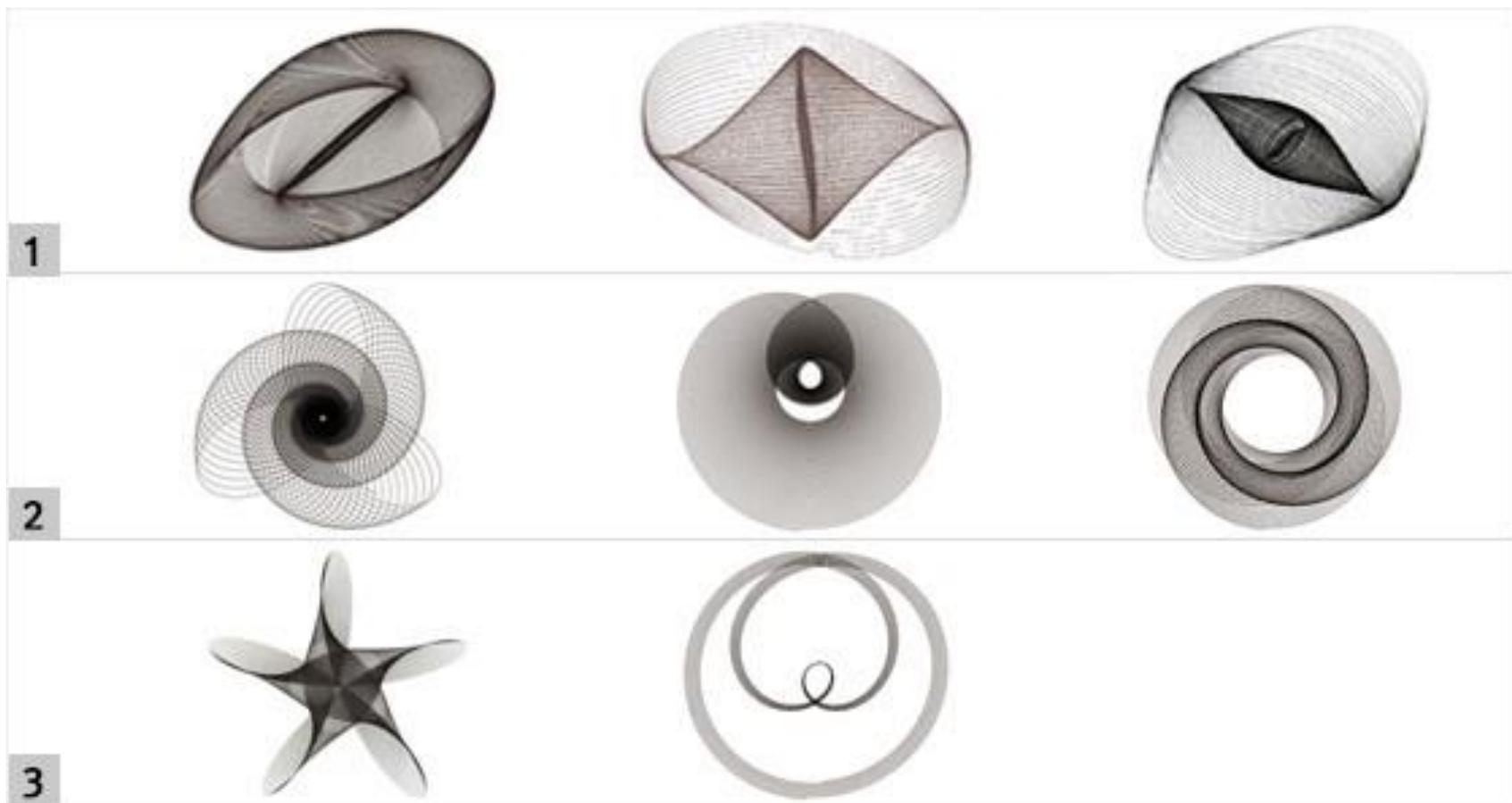
더 나아가
하모노그래프 장치는
맥놀이 현상 까지 표현할 수 있다.

맥놀이 현상 이란?

피아노에서 흰 건반과 바로 옆의 검은 건반을 동시에 치면, 피아노 소리가 작았다가 커졌다를 반복하는 현상이 일어난다. 그 이유는 두 진동이 포개져 진폭이 주기적으로 변하기 때문이다. 이를 '맥놀이 현상'이라고 말한다.

맥놀이 현상은 진동수가 큰 고음으로 갈수록 커진다

1) 단진자 두 개의 길이를 비슷하게 한 뒤, 하모노그래프 장치를 작동하면 맥놀이 현상이 그려진다. 진폭이 주기적으로 변하는 과정에서 원과, 타원, 직선이 반복적으로 변화하면서 그려진다.



2) 단진자가 3개인 하모노그래프 장치에서 진동수의 비가 2:1인 옥타브를 나타낸 것이다. 두 원운동의 방향에 따라 다른 모양이 그려진다.
 3) 5도 음정 차이를 나타낸 하모노그래프.

[음악 상식] 옥타브란 ?

도에서 높은 도처럼 8단계 차이나는 '음정'을 말한다.

그리고 2도란

도와 레, 레와 미처럼 두 음 사이가 2단계 차이가 나는 두 음을 말한다.

마찬가지로 3 도일 때는 3단계, 4도일 때는 4 단계 차이가 난다.

2, 3, 6, 7도는 반음이 있는지 없는지에 따라

장음정과 단음정으로 나뉜다.

단음정은 반음이 있을 때를 말하고, 없다면 장음정이라고 한다.

대수학을 통해 도형으로 표현된 음악!

수학자들은 음계를 기하학 공간에 표현하기 위해 대수학 이론을 이용했다. 그 결과 온음과 반음을 포함해 기본이 되는 12개의 음은 *군(Group)을 이루고 있다는 사실이 밝혀졌다.

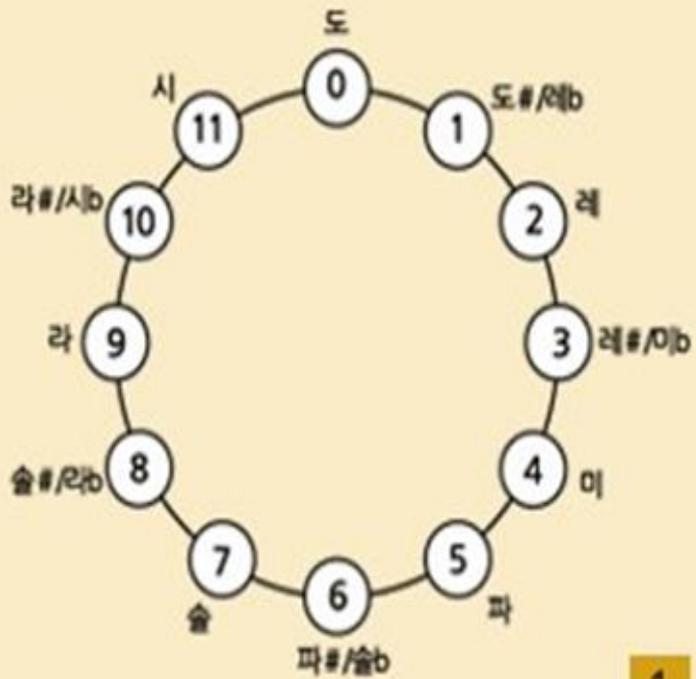
이에 따라 12음계 군을 도형으로 표현하면
중간 중간 **끊어진 원**이 된다.

여기에 옥타브가 같은 음까지 추가하면
끊어진 부분이 메워져 **연속된 원**이 그려진다.

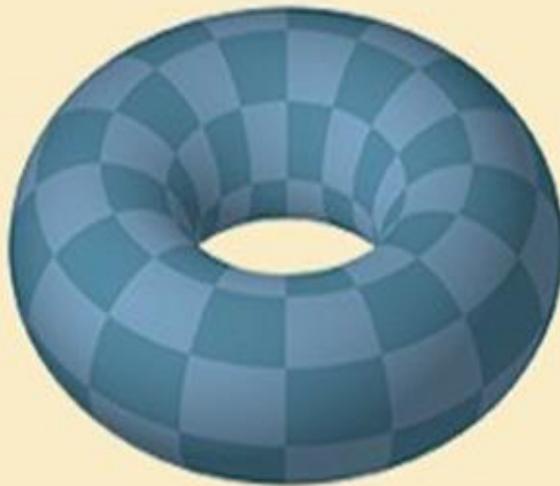
만약 양손으로 피아노를 치기 위해, 높은음자리표와 낮은음자리표에 주어
진 두 화음까지 포함하면

가운데가 뺀 **도넛 모양의 유향면** 이 된다.

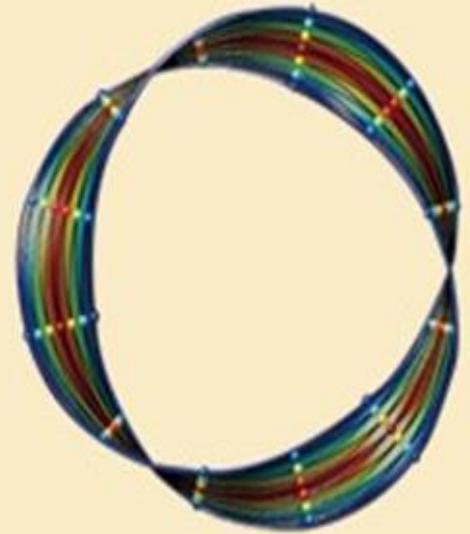
[주] 군(Group) : 어떤 집합에서 임의의 두 원소가 덧셈이나 곱셈과 같이, 주어진 연산에 의해 닫혀 있는 집합을 말한다.



1



2



3

- 1) 12음계를 표현한 끊어진 원이다.
 12음계는 *군을 이루고, 옥타브까지 고려하면 연결된 원이 그려진다.
 (* 음정의 진동수는 등비수열을 이루고 이를 원소로 이루어진 집합에 곱의 연산이 주어진 대수적 군(group))
- 2) 12음계가 만들어낸 화음을 나타낸 유허환면이다.
- 3) 뫼비우스 띠에서 파란 선은 세 입 매듭을, 붉은 선은 3온음을 나타낸다.

화음의 기하학

- 화음을 뫼비우스띠 처럼 꼬이고 자신위로 접히는 오비폴드(orbifold)라는 공간의 점으로 표현한다.
- 서양음악의 경우 듣기 좋은 형태의 화음들은 오비폴드의 중심근처에 자리 잡으며 듣기 좋은 선율들은 가까이에 위치한 화음들을 연결하는 경로라는 것을 알아냈다.

21세기에 들어 이론 음악가들은

화음을 기하학적으로 표현하는 연구 를 시작했다.

2006년 미국의 음악가 ***드미트리 티모츠코** 프린스턴대 교수는 악보 위의 화음들이 기하학적으로 연속한 공간 위의 점들로 표시된다는 것을 알아냈다. 또한 대부분의 곡에서 화음의 변화는 그 공간의 중심 근처에서 일어난다는 것도 밝혀냈다.

*Professor Dmitri Tymoczko of the Princeton University Department of Music
2010년 브리지스에서는 새로운 음악에 대한 야간 공개 공연이 있었다. 프린스턴 대학 음대의 드미트리 티모츠코 교수가 수학적 주제에 영감을 받은 음악 연주회를 이끌었고, 페르난도 벤투라, 클리프 캘렌더, 에이드리언 차일즈, 노엄 엘키스 같은 작곡가들을 소개하였다. 이러한 새로운 작업들은 수학적 연관성에 대한 설명과 함께 콘서트 형태로 진행되었다. (Bridges 홈페이지 참조)

음악을 기하학 형태로 만든다.

3 명의 교수 ,
플로리다 주립대학 **클리프톤 칼랜더** 박사와
예일대학의 **이안 퀸** 박사와
프린스턴 대학의 **드미트리 티모츠코** 박사는
음악을 분석해 그 수학적 본질에 음악을 축소하는 방법을 개발했다.

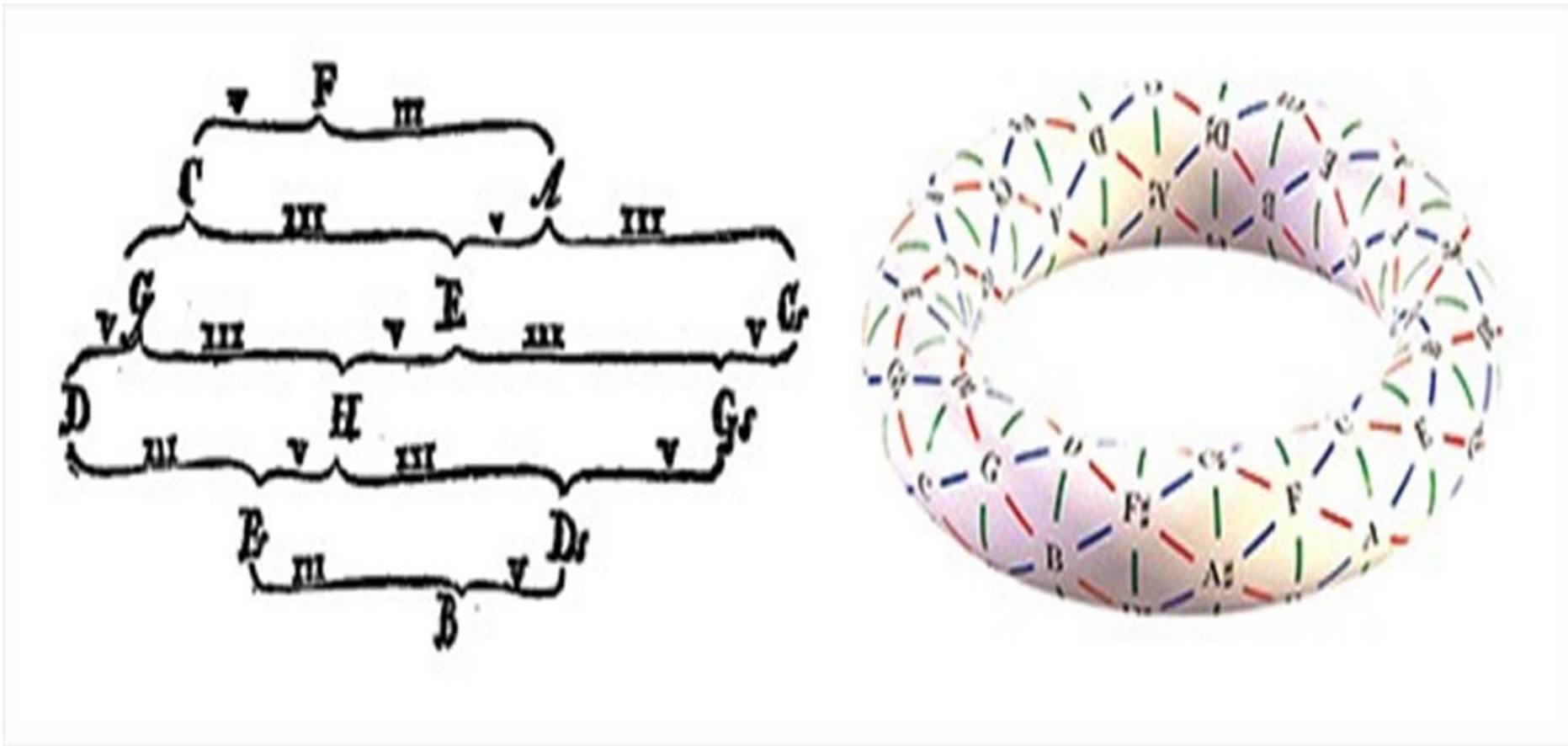
티모츠코박사 :

『이 기하학적 공간을 만든 목적은 결국 , 여러분이 음악을 더 잘 이해하도록 돕는 것입니다. 음악을 개념화하는 강력한 도구로 전에는 하지 못했던 많은 것들을 할 수 있게 해줍니다』

실질적 적용이 예상되는 곳은 음악을 가르치는 분야와 장난감과 악기의 개발 분야입니다

음악이론에 기하학을 최초로 도입한 사람은 수학자 오일러다. 그는 화음의 변화를 '윤환면'(torus)으로 표현했다.

19세기 휴고 리만은 오일러의 이론을 발전시켜, 단3도와 장3도, 완전5도 관계를 쉽게 표현할 수 있는 그래프를 고안했다. 이를 네오-리만 이론이라고 한다.



네오-리만 이론을 3차원으로 표현한 것이다.

원환체에 삼각형 구조로 음계들이 적혀있다.

음악의 녹음과 재생

아날로그의 음악이 0과1 만을 사용한 디지털로 변환되어 디스크에 저장된다.

데이터 저장 과정에서

일정하고 짧은 시간 간격으로 음파를 측정하여 원음을 샘플링하는 신호처리과정과

데이터를 덮는 반사막과 보호막의 압축과정에 **편미분 방정식을 이용한 유체 역학이 이용된다.**

먼지나 스크레치등으로 생기는 0과 1의 훼손을 오류 정정 부호로 복구한다.

재생과정에서 레이저가 디스크의 중앙 부분에서 가장자리로 읽어 나갈 때 데이터의 판독 속도를 일정하게 유지하기 위해 **삼각법과 미적분의 도움**을 받아 모터는 CD를 점점 느리게 돌린다.

음성 인식

음성 인식시스템

- 악센트, 억양, 멈춤(pause), ...

조건부 확률과 관련된 가장 일반적인 기법

마르코프(Markov) 수학 모형

입력된 기준의 소리를 훈련시켜 주어진 입력과 가장 합치하는 소리를 찾는다.

리모컨이나 키보드, 마우스 대신 아이폰, TV 등의 기계에 음성으로 명령한다.(예: 아이폰의 시리Siri)