*Python*과 함께 배우는 신호 해석

제 *14* 강. 연속시간 푸리에 급수 *(2)*

*(*제 5 장. 연속시간 주기 신호의 주파수 해석: 연속시간 푸리에 급수*)*

박섭형

한림대학교 전자공학과

배울 내용

- 연속시간 복소 주기 함수 공간과 내적
- 연속시간 복소 주기 함수 공간의 직교 정규 기저 함수
- 연속시간 주기 신호의 주파수 분석: 연속시간 푸리에 급수 (CFS: continuous Fourier series)분석과 합성
- 구형파와 삼각파의 푸리에 급수 분석과 합성 예
- 연속시간 푸리에 급수의 특성과 주요 성질
- Python을 이용한 연속시간 주기 신호의 푸리에 급수 분석 및 합성
- 시비율이 다른 주기 함수의 푸리에 급수 계수 비교

연속시간 푸리에 급수의 중첩 특성

- 연속시간 푸리에 급수는 선형 변환이며, 중첩 특성을 가진다.

$$\mathcal{F}\{\tilde{x}(t)\} = c_k = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} \tilde{x}(t)\, e^{-j\frac{2\pi}{T_0}kt}\, dt, \tag{5.27}$$

$$\mathcal{F}\{\tilde{y}(t)\} = d_k = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} \tilde{y}(t)\, e^{-j\frac{2\pi}{T_0}kt}\, dt. \tag{5.28}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\{a\tilde{x}(t) + b\tilde{y}(t)\} &= \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} \{a\tilde{x}(t) + b\tilde{y}(t)\}\, e^{-j\frac{2\pi}{T_0}kt}\, dt \\
&= a\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} \tilde{x}(t)\, e^{-j\frac{2\pi}{T_0}kt}\, dt + b\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} \tilde{y}(t)\, e^{-j\frac{2\pi}{T_0}kt}\, dt \\
&= ac_k + bd_k. \qquad (5.29)
\end{aligned}$$

즉,

$$a\tilde{x}(t) + b\tilde{y}(t) \Leftrightarrow a\mathcal{F}\{\tilde{x}(t)\} + b\mathcal{F}\{\tilde{y}(t)\} = ac_k + bd_k. \tag{5.30}$$

연속시간 푸리에 급수의 시간 지연 특성

기본 주기가 T_0 인 연속시간 주기 신호 $\tilde{x}(t)$ 의 푸리에 급수 계수를 c_k 라 하자

$$\mathcal{F}\{\tilde{x}(t-t_0)\} = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} \tilde{x}(t-t_0)\, e^{-j\frac{2\pi}{T_0}kt}\, dt, \tag{5.31}$$

여기에서 $\tau = t - t_0$ 라 두면, $t = \tau + t_0$, $dt = d\tau$ 이므로 위 식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{\tilde{x}(t-t_0)\} &= \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} \tilde{x}(\tau)\, e^{-j\frac{2\pi}{T_0}k(\tau+t_0)}\, dt \\ &= \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} \tilde{x}(\tau)\, e^{-j\frac{2\pi}{T_0}k\tau}\, e^{-j\frac{2\pi}{T_0}kt_0}\, dt \qquad (5.32) \\ &= e^{-j\frac{2\pi}{T_0}kt_0}\, c_k.\end{aligned}$$

켤레 복소수 신호의 푸리에 급수

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{\tilde{x}^*(t)\} &= \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} \tilde{x}^*(t)e^{-j\frac{2\pi}{T_0}kt}dt \\ &= \left(\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} \tilde{x}(t)e^{j\frac{2\pi}{T_0}kt}dt\right)^* \\ &= (c_{-k})^*\end{aligned} \tag{5.33}$$

실수 신호의 푸리에 급수의 켤레 대칭성

연속시간 주기 신호 $\tilde{x}$가 실수 신호이면, $c_k^* = c_{-k}$를 만족한다.

$$
\begin{aligned}
c_k^* &= \left(\frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \tilde{x}(t) e^{-j\frac{2\pi}{T_0}kt} dt \right)^* \\
&= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \tilde{x}^*(t) e^{j\frac{2\pi}{T_0}kt} dt \\
&= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \tilde{x}(t) e^{j\frac{2\pi}{T_0}kt} dt \\
&= c_{-k}
\end{aligned}
\tag{5.34}
$$

반전 신호의 푸리에 급수

연속시간 주기 신호 $\tilde{x}$의 시간 반전된 신호 $\tilde{x}(-t)$ 의 푸리에 급수는 다음과 같다.

$$\mathcal{F}\{\tilde{x}(-t)\} = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} \tilde{x}(-t)\, e^{-j\frac{2\pi}{T_0}kt}\, dt. \tag{5.35}$$

여기에서 $\tau = -t$라 두면, $t = -\tau$, $dt = -d\tau$ 이므로 위 식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{\tilde{x}(-t)\} &= \frac{1}{T_0}\int_0^{-T_0} \tilde{x}(\tau)\, e^{-j\frac{2\pi}{T_0}k(-\tau)}(-d\tau) \\ &= \frac{1}{T_0}\int_{-T_0}^{0} \tilde{x}(\tau)\, e^{-j\frac{2\pi}{T_0}(-k)\tau}\, d\tau \qquad (5.36) \\ &= c_{-k}. \end{aligned}$$

연속시간 푸리에 급수의 주요 성질 요약

선형성	$\mathcal{F}\{a\tilde{x}(t) + b\tilde{x}(t)\} = ac_k + bd_k$
시간 지연	$\mathcal{F}\{\tilde{x}(t - t_0)\} = e^{-j\frac{2\pi}{T_0}kt_0}\, c_k$
주기적 콘볼루션	$\mathcal{F}\left\{\int_{<T_0>} \tilde{x}(\tau)\tilde{y}(t-\tau)\,d\tau\right\} = c_k d_k$
곱셈	$\mathcal{F}\{\tilde{x}(t)\tilde{y}(t)\} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l d_{k-l}$
신호의 미분	$\mathcal{F}\left\{d\frac{\tilde{x}(t)}{dt}\right\} = jk\frac{2\pi}{T_0}c_k$
시간 반전	$\mathcal{F}\{\tilde{x}(-t)\} = c_{-k}$
신호의 공액	$\mathcal{F}\{\tilde{x}^*(t)\} = c^*(-k)$
실수 신호	$c_k^* = c_{-k}$
파스발의 정리	$\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} \lvert\tilde{x}(t)\rvert^2\,dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lvert c_k\rvert^2$

이산 푸리에 변환과 연속 푸리에 급수 비교

이산 푸리에 변환	연속 푸리에 급수
이산시간 주기 신호, $\tilde{x}[n] = \tilde{x}[n+N]$	연속시간 주기 신호, $\tilde{x}(t) = \tilde{x}(t+T_0)]$
이산 푸리에 변환 $$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}nk},$$ $$k = 0, 1, \cdots, N-1.$$ 역 이산 푸리에 변환 $$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{+j\frac{2\pi}{N}kn},$$ $$n = 0, 1, \cdots, N-1.$$	푸리에 급수 분석 $$a_k = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \tilde{x}(t) e^{-j\frac{2\pi}{T_0}kt} dt,$$ $$k = 0, \pm 1, \pm 2 \cdots, \pm\infty.$$ 푸리에 급수 합성 $$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j\frac{2\pi}{T_0}kt}.$$

Python 실습: 구형파의 분석 및 합성

다음은 주기가 1이고, 시비율(duty cycle)이 0.5인 구형파의 푸리에 급수 분석과 합성을 실행하는 Python 스크립트이다.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

SMALL = 1.e-5
dt = 1 / 1000.
t = np.arange(0, 1., dt)
T0 = 1.
f0 = 1/T0
w0 = 2 * np.pi * f0
xt = 1. * (t < 0.5)
```

Python 실습: 구형파의 분석 및 합성


```python
Nmax = 31 # Maximum number of harmonics
# Calculation of harmonics
a = np.zeros(2*Nmax+1).astype('complex')
magResponse = np.zeros(2*Nmax+1).astype('float')
phaseResponse = np.zeros(2*Nmax+1).astype('float')

krange = np.arange(-Nmax, Nmax+1)
for k in krange:
  x1 = xt * np.exp(-1j * w0 * t * k)
  a[k-Nmax-1] = dt * f0 * sum(x1)

# Synthesis
xN  = np.zeros(len(t)).astype('complex')
for k in krange:
    xN = xN + a[k-Nmax-1] * np.exp(1j*w0*k*t)
```

Python 실습: 구형파의 분석 및 합성

```
magResponse = np.abs(a)
phaseResponse = np.angle(a)

phaseResponse = phaseResponse * (magResponse > SMALL)
phaseResponse = phaseResponse - np.pi \
                * ( phaseResponse > np.pi/2)
phaseResponse = phaseResponse + np.pi \
                * ( phaseResponse < -np.pi/2)

ax_org = plt.subplot(411)
plt.plot(t,xt)
ax_org.set_ylim(-0.1, 1.1)
```

Python 실습: 구형파의 분석 및 합성


```
ax_mag = plt.subplot(412)
ax_mag.stem(krange, magResponse)
ax_mag.set_xlim(-Nmax, Nmax)

ax_phase = plt.subplot(413)
ax_phase.stem(krange, phaseResponse)
ax_phase.set_xlim(-Nmax, Nmax)
ax_phase.set_yticks([-np.pi/2, 0, np.pi/2])
ax_phase.set_yticklabels(["$-\\frac{\pi}{2}$", \
                          "0", "$\\frac{\pi}{2}$"])

plt.subplot(414)
plt.plot(t,xN.real)
plt.show()
```

Python 실습: 구형파의 분석 및 합성

이 스크립트를 실행하면 다음 그래프를 볼 수 있다.

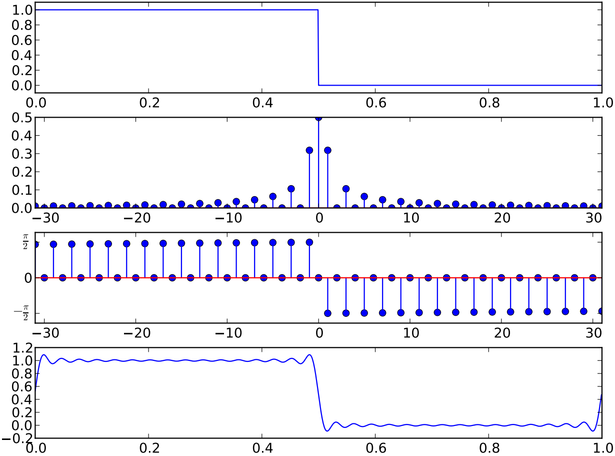


그림 *5.1:* 수치 해석 방법으로 분석한 사각파의 푸리에 급수. 위로부터 원래 신호, 크기 스펙트럼, 위상 스펙트럼, $N = 31$로 복원한 신호.

Python 실습: 구형파의 분석 및 합성

연습 문제 *5.1*

앞의 *Python* 스크립트에서 줄번호 *31* ∼ *35* 사이를 주석 처리하고 스크립트를 실행해 보자. 크기 스펙트럼에는 큰 차이가 없지만 위상 스펙트럼이 무질서하게 나오는 것처럼 보일 것이다. 그 이유가 무엇인지 생각해 보자.

Python 실습: 삼각파의 분석 및 합성

앞의 Python 스크립트 중에서 10 번째 줄을 다음과 같이 수정하면 삼각파의 신호에 대해서도 분석과 합성을 할 수 있다.

```
xt = 2 * t * (t <= 0.5) + (2- 2*t) * (t>0.5)
```

Python 실습: 삼각파의 분석 및 합성

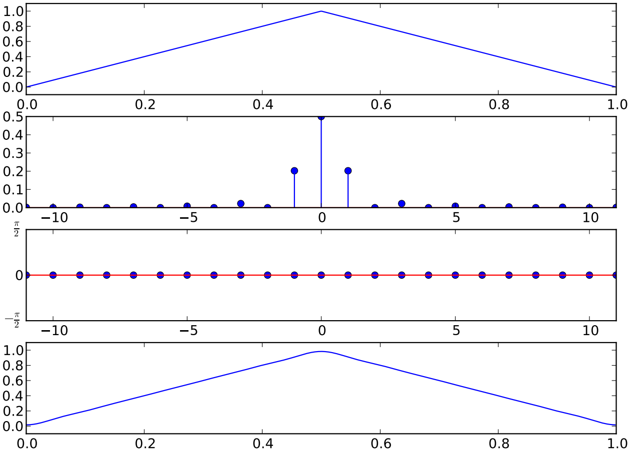


그림 *5.2:* 수치 해석 방법으로 분석한 삼각파의 푸리에 급수. 위로부터 원래 신호, 크기 스펙트럼, 위상 스펙트럼, $N = 31$로 복원한 신호.

시비율이 다른 주기 함수의 푸리에 급수 계수 비교

구형파에서 펄스의 폭이 τ 이고 주기가 T_0 인 구형파 $\tilde{x}(t)$ 가 $\left[-\frac{T_0}{2}, \frac{T_0}{2}\right)$ 구간에서 다음과 같이 표시된다.

$$\tilde{x}_1(t) = \begin{cases} 0, & -\frac{T_0}{2} \le t < -\frac{\tau}{2} \\ 1, & -\frac{\tau}{2} \le t < \frac{\tau}{2} \\ 0, & \frac{\tau}{2} \le t < -\frac{T}{2} \end{cases}. \tag{5.37}$$

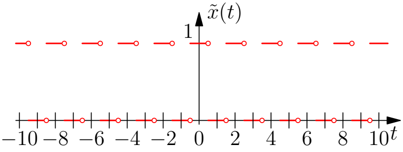
그리고 $\tilde{x}(t)$ 의 푸리에 급수 계수 a_k 가 다음과 같이 주어진다.

$$a_k = \frac{\sin \frac{\pi k \tau}{T_0}}{\pi k}. \tag{5.38}$$

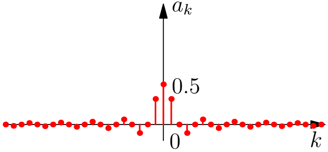
$\tau = 1$ 일 때, $T_0 = 2, 5, 10$ 인 세 경우에 대해서 한 주기 동안 $\tilde{x}(t)$ 와 a_k 의 그래프를 그려서 비교해 보자. 푸리에 급수 계수 a_k 에서 k는 $-\infty < k < \infty$ 의 범위에 존재한다. 즉, 구형파에 존재하는 주파수 성분의 개수가 무한대이다. 위의 그래프는 이 가운데 일부만 나타낸 것이다. 세 경우의 그래프에서 $T_0 a_k$ 의 차이를 유심히 비교해 보자. $T_0 a_k$ 의 그래프에서 가로 축은 k가 아닌 $f = \frac{k}{T_0}$ 인 것에 유의하라.

시비율이 다른 주기 함수의 푸리에 급수 계수 비교

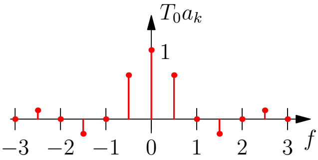
(1) $T_0 = 2$ 일 때, $a_k = \dfrac{\sin\frac{\pi k}{2}}{\pi k}$



(a) $\tilde{x}(t)$ 의 그래프.



(b) a_k 의 그래프.

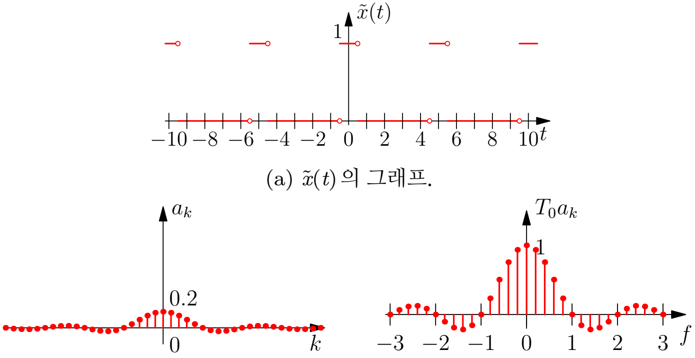


(c) $T_0 a_k$ 의 그래프.

그림 *5.3:* $T_0 = 2$ 일 때, $\tilde{x}(t)$, a_k 와 $T_0 a_k$ 의 그래프. 단, $f = \frac{k}{T_0}$ 이다.

시비율이 다른 주기 함수의 푸리에 급수 계수 비교

(2) $T_0 = 5$ 일 때, $a_k = \dfrac{\sin\frac{\pi k}{5}}{\pi k}$



(a) $\tilde{x}(t)$ 의 그래프.

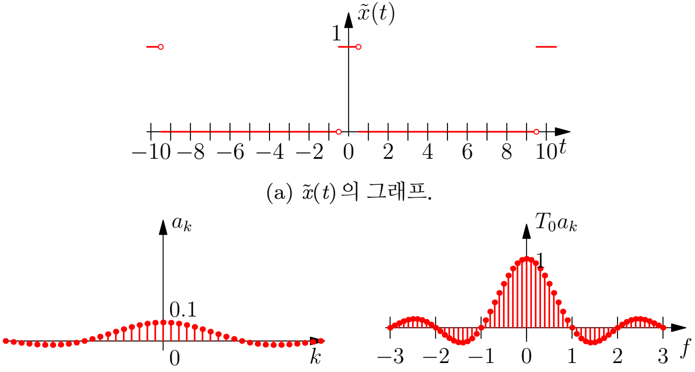
(b) a_k 의 그래프.

(c) $T_0 a_k$ 의 그래프.

그림 *5.4:* $T_0 = 5$ 일 때, $\tilde{x}(t)$, a_k 와 $T_0 a_k$ 의 그래프. 단, $f = T_0 k$ 이다.

시비율이 다른 주기 함수의 푸리에 급수 계수 비교

(3) $T_0 = 10$일 때, $a_k = \dfrac{\sin \frac{\pi k}{10}}{\pi k}$



(a) $\tilde{x}(t)$의 그래프.

(b) a_k의 그래프.

(c) $T_0 a_k$의 그래프.

그림 5.5: $T_0 = 10$일 때, $\tilde{x}(t)$, a_k와 $T_0 a_k$의 그래프. 단, $f = T_0 k$이다.

시비율이 다른 주기 함수의 푸리에 급수 계수 비교

- 구형파의 펄스의 폭은 변화시키지 않은 채 주기를 점점 크게 하면 기본 주파수 f_0 의 크기가 감소하며 시비율은 작아진다.
- 세 경우의 기본 주기가 각각 2, 5, 10이고, 기본 주파수는 각각 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{10}$ Hz 이다.
- 주기가 점점 커지면서 주기 구형파의 푸리에 급수 계수에 주기 T_0를 곱해서 얻은 신호의 전체적인 모양에는 변화가 없고 푸리에 급수의 계수는 점점 연속 주파수 신호에 근접해 가는 것을 볼 수 있다.
- 그림 5.3의 (c), 그림 5.4의 (c), 그리고 5.5의 (c) 에서 고조파 번호 k는 주파수 영역에서 kf_0 에 해당하기 때문에 주기 T_0 가 증가하면서 주파수 영역에서의 샘플 사이의 간격은 각각 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{10}$ Hz가 된다. 그렇지만 세 그래프에서 모두 k가 증가하면서 처음으로 크기가 0이 되는 곳의 주파수는 각각 $\frac{1}{2} \cdot 2 = 1$, $\frac{1}{5} \cdot 5 = 1$, $\frac{1}{10} \cdot 10 = 1$ Hz가 된다.
- 극단적으로 $T_0 \to \infty$가 되면서 선 스펙트럼의 주파수 간격이 0으로 접근하게 되어 연속 스펙트럼으로 변하게 될 것이라는 것을 짐작할 수 있다.
- 뒤에서 살펴 보겠지만 연속 비주기 함수의 푸리에 변환 결과는 주파수 영역에서 연속 스펙트럼이 된다.