3장. 벡터 (Vectors)

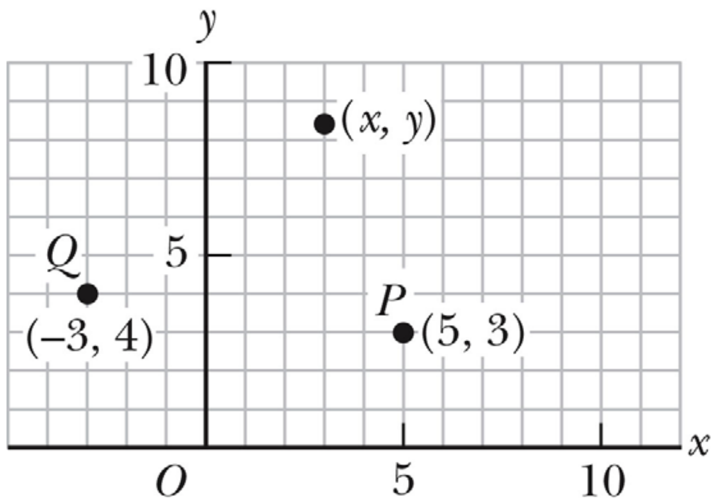
3.1 좌표계

3.2 벡터양과 스칼라양

3.3 벡터의 성질

3.4 벡터의 성분과 단위 벡터

3.1 좌표계 (Coordinate Systems)



직교 좌표계: 평면의 한 점을 (x, y)로 표시

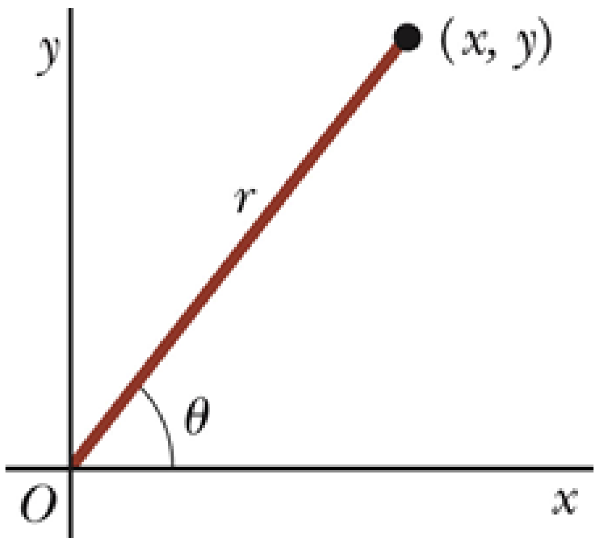
평면 극좌표계: 평면의 한 점을 (r, θ)로 표시

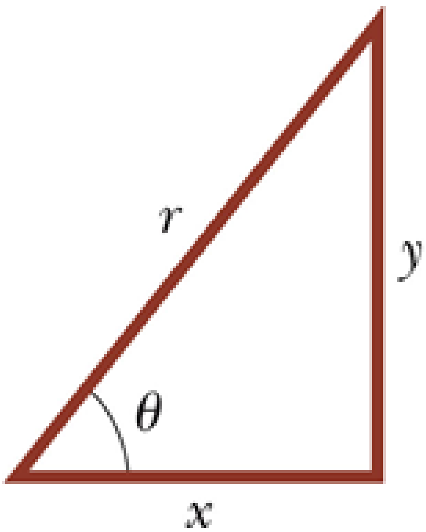
$$x = r\cos\theta$$

$$y = r\sin\theta$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$





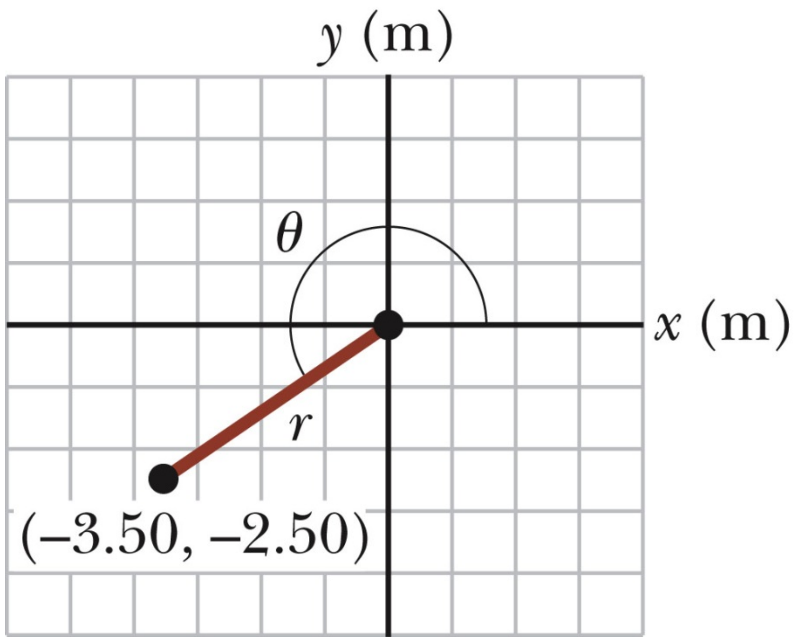
$$\sin\theta = \frac{y}{r}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$

☆ 예제 3.1 극좌표

$(x, y) = (-3.50, -2.50)m$ 의 극좌표 (r, θ)?



Sol

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-3.5)^2 + (-2.5)^2} = 4.3m$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{-2.5m}{-3.5m} = 0.714$$

$$\theta = 36°$$

θ =36°는 1사분면의 각, 실제 θ 는 3-사분면 이므로

답 작성시에는 θ =-36° (3-사분면)

or θ =36°+180°=216°

3.2 벡터량과 스칼라량 (Vector and Scalar Quantities)

• 스칼라와 벡터

스칼라량(scalar quantity): 적절한 물리적 단위는 갖지만, 방향성이 없는 하나의 단순한 수치로 완전하게 정의할 수 있다.

예: 길이, 부피, 질량, 속력, 시간 간격, 온도 등

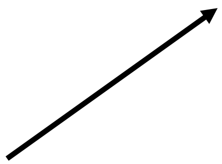
벡터량(vector quantity): 스칼라량과 같이 적절한 물리적 단위를 가지며, 크기와 방향을 동시에 갖는 양으로 정의한다.

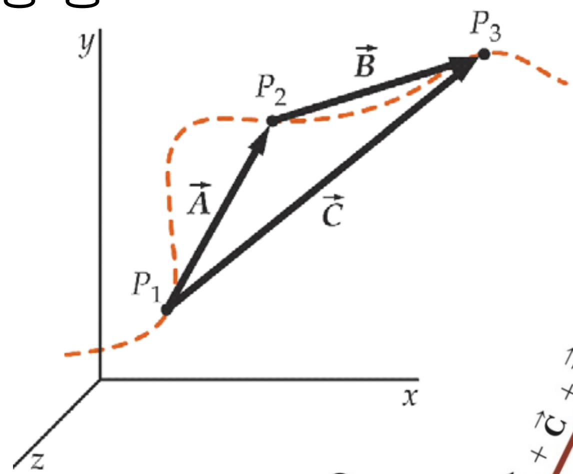
예: 속도, 변위, 가속도, 힘, 운동량 등

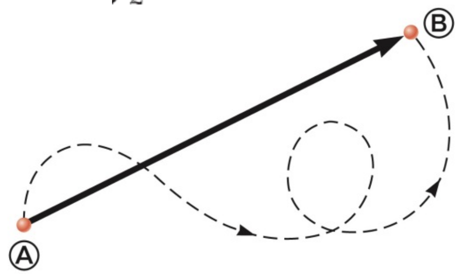
벡터의 표시 : $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\vec{A}$, $\vec{B}$

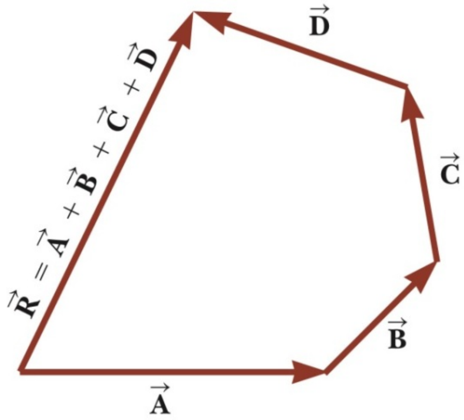
벡터의 크기 표시: A, B

벡터의 그림 표시:









3.3 벡터의 성질
(Some Properties of Vectors)

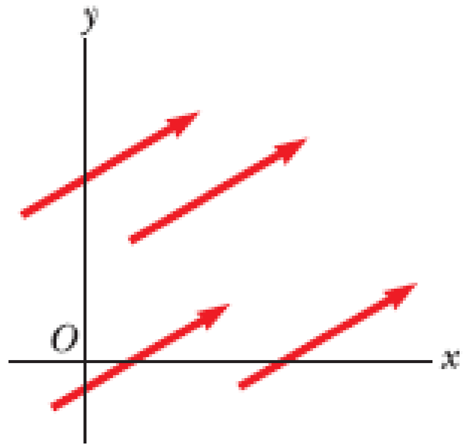


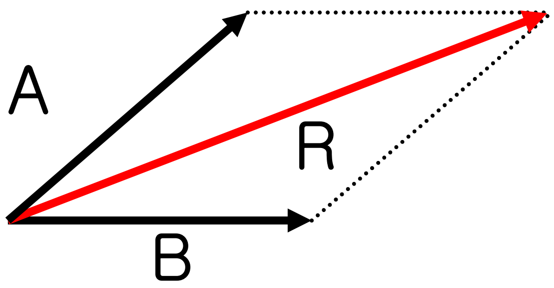
그림 3.5 네 벡터는 크기가 같고 방향이 일치하므로 모두 동등하다.

▶ 벡터의 동등성(Equality of Two Vectors)

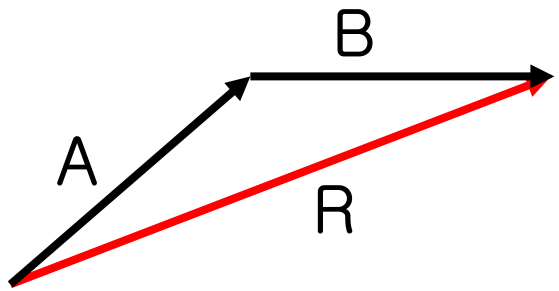
두 벡터 A와 B가 동등하다는 것은 크기가 같고 방향이 같음을 의미한다

▶ 벡터의 덧셈 (Adding Vectors)

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{R}$$



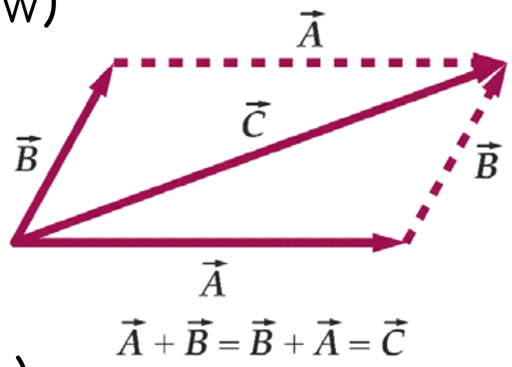
• 평행사변형 법칙

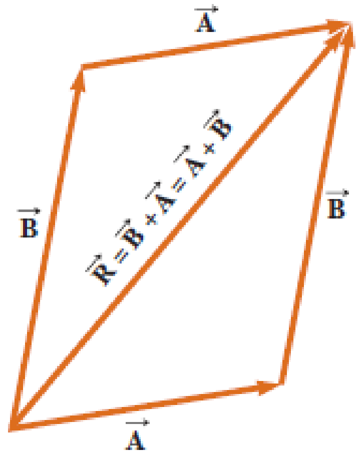


• 머리 꼬리 붙이기

o 교환법칙 (Commutative Law)

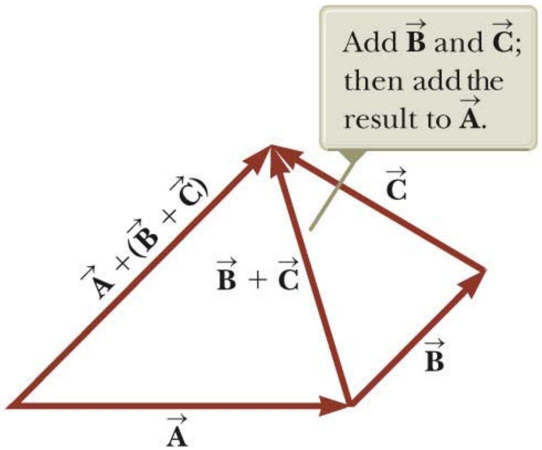
$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$$

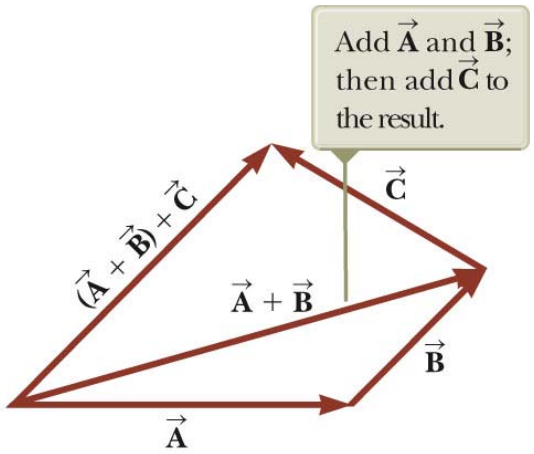




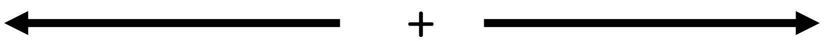
o 결합법칙 (Associative Law)

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$$





♦ 영벡터 – 크기가 영인 벡터

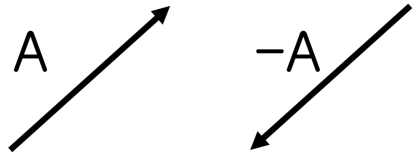


$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = 0$$

▶ 음의 덧셈 (Negative of a Vector)

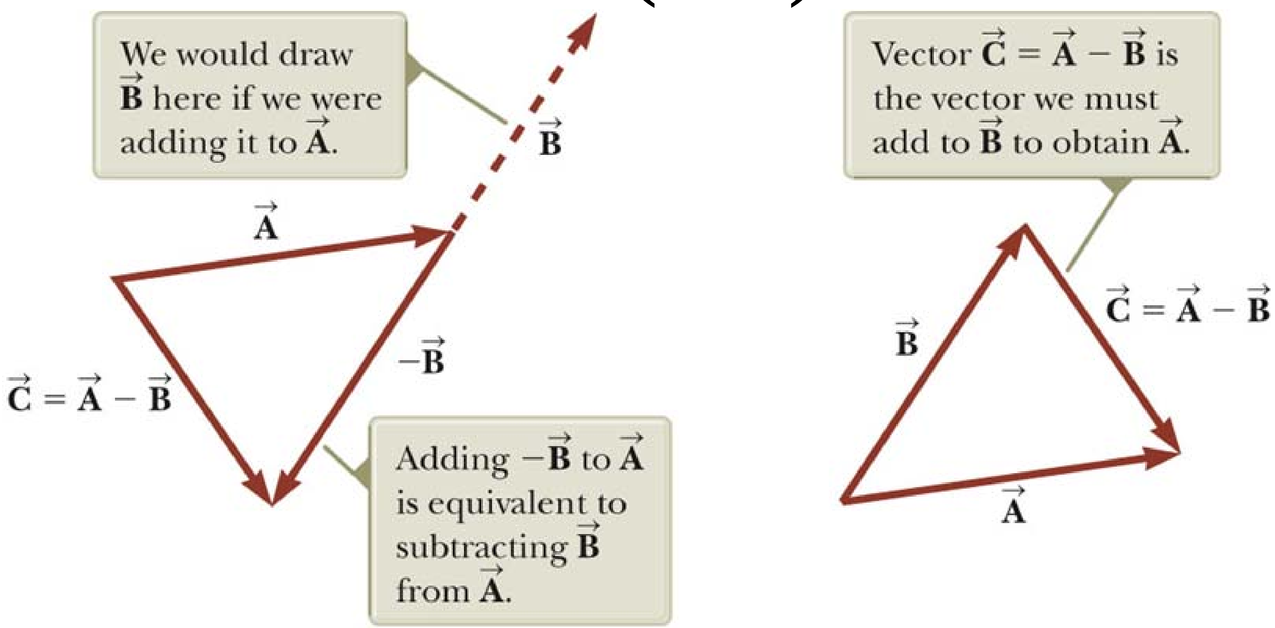
벡터 A에 더했을 때 그 합이 영이 되는 벡터
벡터 A와 −A는 크기는 같지만 서로 반대방향을 가리킨다

$$\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = 0$$



▶ 벡터의 뺄셈(Subtracting Vectors)

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B})$$



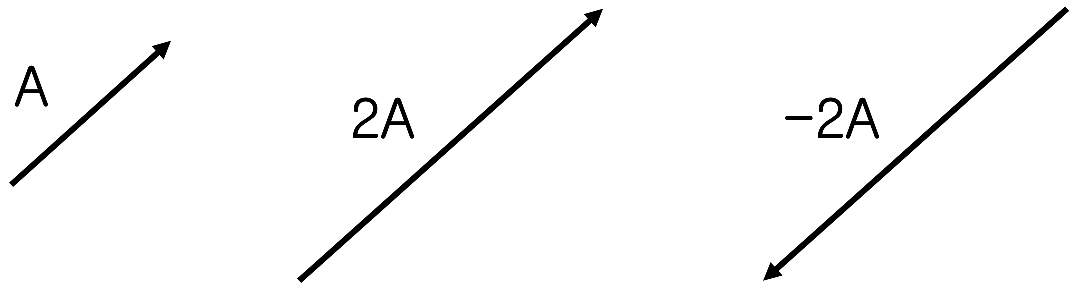
▶ 벡터와 스칼라의 곱 (Multiplying a Vector by a Scalar)

$$m\mathbf{A} = \mathbf{B}$$ (예: $\mathbf{A} + \mathbf{A} = 2\mathbf{A}$)

▷B의 크기: $B = |m| \cdot |\mathbf{A}|$

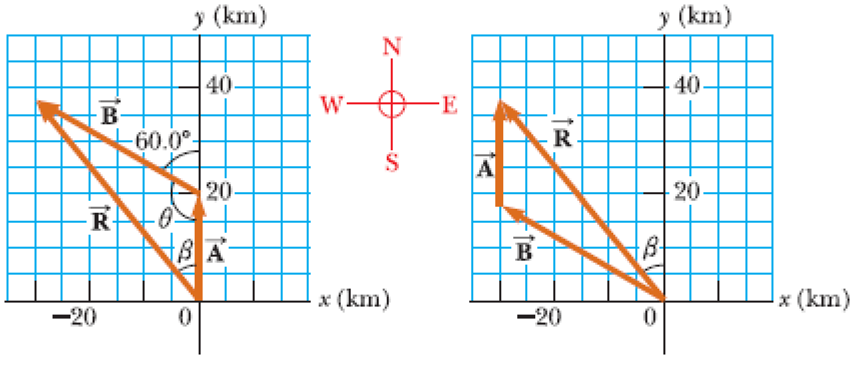
▷B의 방향: m>0 이면 A의 방향과 같다.

m<0 이면 A의 반대 방향



예제 3.2 휴가 여행

자동차가 북쪽으로 20.0 km 간 후에, 다시 북서쪽 60°의 방향으로 35.0 km를 더 갔다. 자동차의 합성 변위의 크기와 방향을 구하라.



(a) (b)

$$R = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta}$$

Θ=180°−60°=120°이므로

$$R = \sqrt{(20.0)^2 + (35.0)^2 - 2(20.0)(35.0)\cos 120^\circ}\ \text{km}$$

$$= 48.2\,\text{km}$$

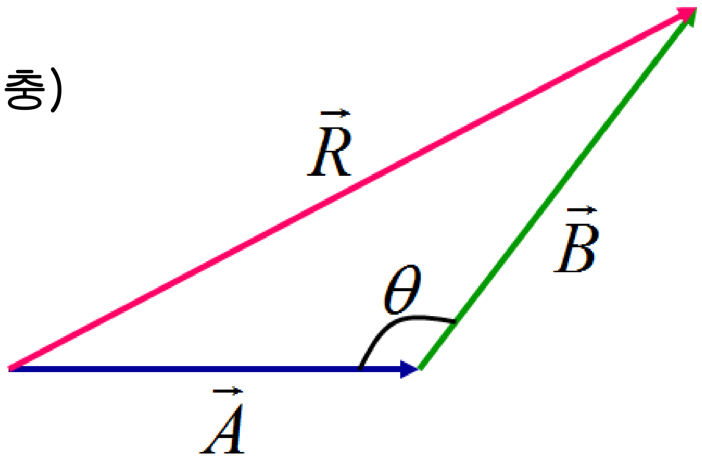
북쪽으로부터 측정한 R의 방향을 구하기 위하여 사인 법칙을 이용하면

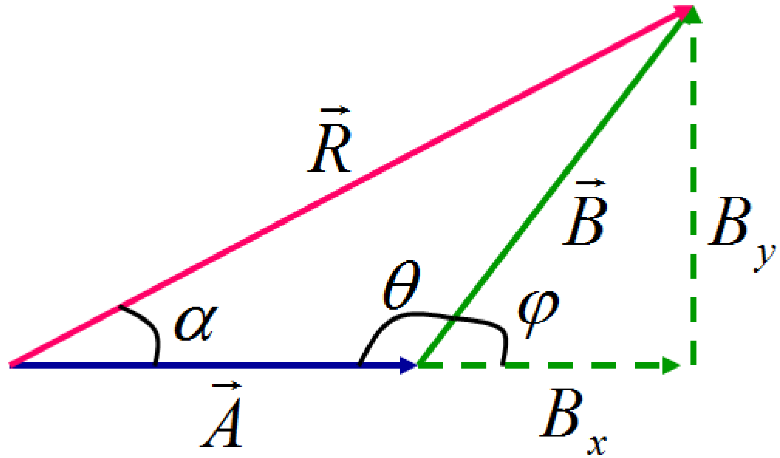
$$\frac{\sin\beta}{B} = \frac{\sin\theta}{R}$$

$$\sin\beta = \frac{B}{R}\sin\theta = \frac{35.0\,\text{km}}{48.2\,\text{km}}\sin 120^\circ = 0.629$$

$$\beta = 38.9^\circ$$

보충)





Sol $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$

$$R_x = A + B_x = A + B\cos\varphi \qquad R_y = B_y = B\sin\varphi$$

크기 $$R^2 = R_x^2 + R_y^2 = (A + B\cos\varphi)^2 + (B\sin\varphi)^2$$

$$= A^2 + 2AB\cos\varphi + B^2\cos^2\varphi + B^2\sin^2\varphi \qquad cf)\ \sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$$

$$= A^2 + 2AB\cos(180° - \theta) + B^2 \qquad cf)\ \cos(180° - \theta) = -\cos\theta$$

$$= A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta$$

방향 $$\sin\alpha = \frac{R_y}{R} = \frac{B_y}{R} = \frac{B\sin\varphi}{R} = \frac{B}{R}\sin(180° - \theta) \qquad cf)\ \sin(180° - \theta) = \sin\theta$$

$$= \frac{B}{R}\sin\theta$$

3.4 벡터의 성분과 단위 벡터 (Components of a Vector and Unit Vectors)

벡터 덧셈의 그래프에 의한 방법은 정밀도가 요구되거나 3차원 문제를 다루는 경우에 있어서는 부적합

⬇

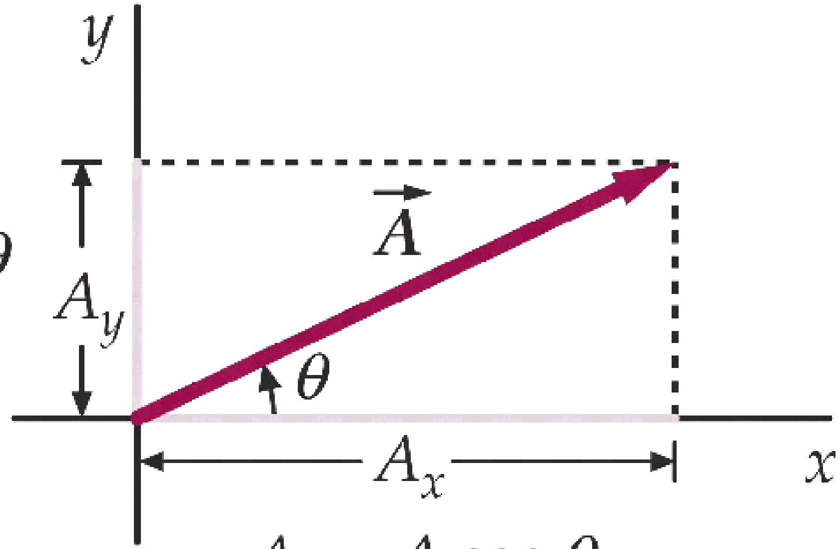
좌표계와 연관된 성분의 개념을 도입하여 대수적인 방법으로 해결 가능.

o Vector의 성분 분해 (2차원)

$$\mathbf{A} = \mathbf{A_x} + \mathbf{A_y}$$

$$A_x = A\cos\theta \qquad A_y = A\sin\theta$$

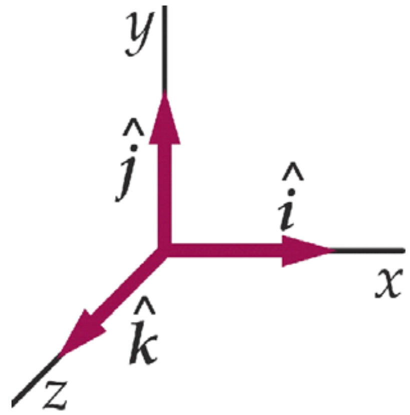
$$A_y = A\sin\theta$$



$$A_x = A\cos\theta$$

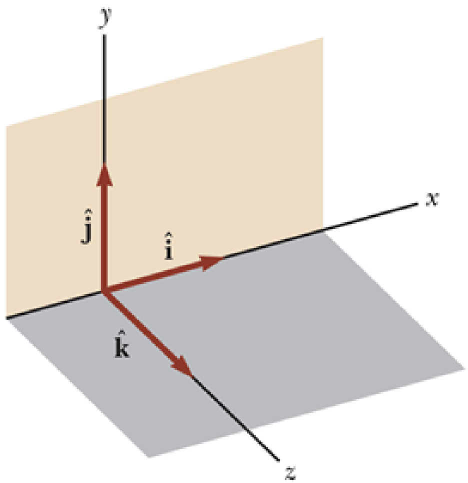
$$A = \sqrt{A_x^{\ 2} + A_y^{\ 2}} \qquad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{A_y}{A_x}\right)$$

▶ 단위벡터 (Unit Vectors)



단위 벡터: 차원이 없고 크기가 1인 벡터
주어진 방향을 표시하기 위해 사용

$$\hat{x} = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} \qquad |\hat{\mathbf{i}}| = |\hat{\mathbf{j}}| = |\hat{\mathbf{k}}| = 1$$

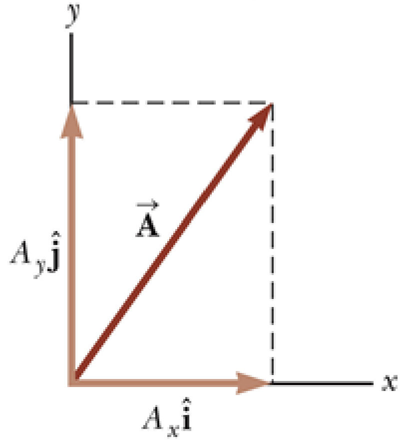


벡터를 좌표 성분 벡터의 합으로 표현 가능!

$$\mathbf{A_x} = A_x\hat{\mathbf{i}} \quad (A_x = A\cos\theta)$$

$$\mathbf{A_y} = A_y\hat{\mathbf{j}} \quad (A_y = A\sin\theta)$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{A_x} + \mathbf{A_y} = A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}}$$



o Vector 성분의 합 (2차원)

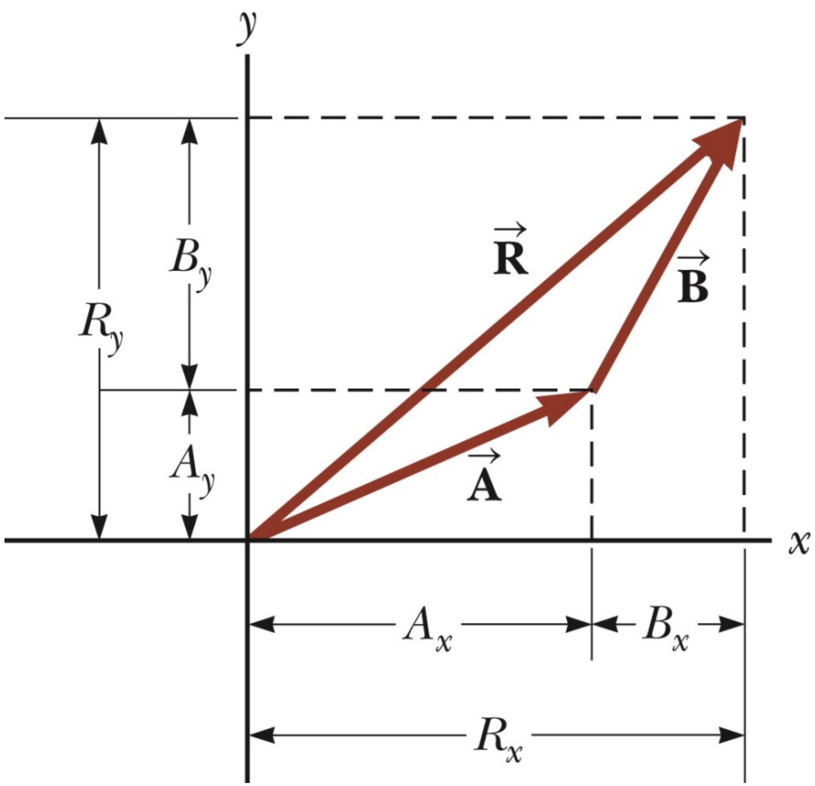
$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$$

$$R_x = A_x + B_x \qquad R_y = A_y + B_y$$

$$\left|\vec{R}\right| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$

$$= \sqrt{(A_x + B_x)^2 + (A_y + B_y)^2}$$

$$\tan\theta = \frac{R_y}{R_x} = \frac{\left|A_y + B_y\right|}{\left|A_x + B_x\right|}$$



$$\mathbf{R} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$$

$$= (\mathbf{A_x} + \mathbf{A_y}) + (\mathbf{B_x} + \mathbf{B_y})$$ ⇦ 성분으로 분해

$$= (A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}}) + (B_x\hat{\mathbf{i}} + B_y\hat{\mathbf{j}})$$ ⇦ 성분으로 표시

$$= (A_x\hat{\mathbf{i}} + B_x\hat{\mathbf{i}}) + (A_y\hat{\mathbf{j}} + B_y\hat{\mathbf{j}})$$ ⇦ 교환, 결합법칙

$$= (A_x + A_y)\hat{\mathbf{i}} + (B_x + B_y)\hat{\mathbf{j}}$$ ⇦ 덧셈의 정의

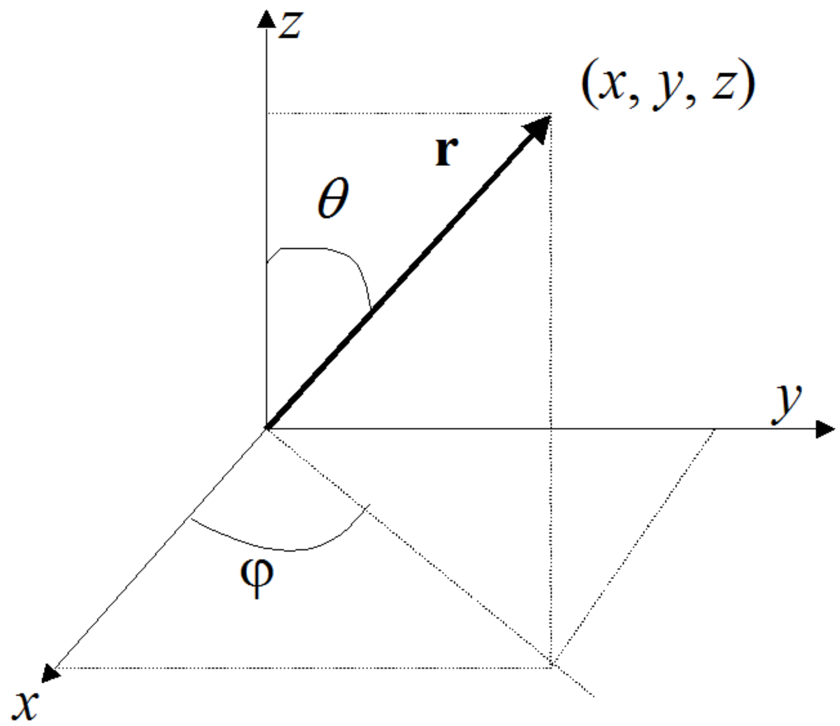
cf) 3차원에서의 Vector의 성분 분해 :

$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$$

$$x = r\sin\theta\cos\phi$$

$$y = r\sin\theta\sin\phi$$

$$z = r\cos\theta$$



3차원으로 표현하는 경우,

$$\mathbf{A}+\mathbf{B} = (\mathbf{A_x}+\mathbf{A_y}+\mathbf{A_z}) + (\mathbf{B_x}+\mathbf{B_y}+\mathbf{B_z})$$
$$= (A_x+B_x)\hat{\mathbf{i}} + (A_y+B_y)\hat{\mathbf{j}} + (A_z+B_z)\hat{\mathbf{k}}$$

$$\mathbf{A}-\mathbf{B} = (A_x-B_x)\hat{\mathbf{i}} + (A_y-B_y)\hat{\mathbf{j}} + (A_z-B_z)\hat{\mathbf{k}}$$

☆ **예제 3.3** 두 벡터의 덧셈

$$\vec{A} = (2\hat{i} + 2\hat{j})m \quad \vec{B} = (2\hat{i} - 4\hat{j})m \quad \Rightarrow \quad \vec{R} = \vec{A} + \vec{B} = ?$$

cf) $\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k} \quad \Rightarrow \quad A_x = 2m \quad A_y = 2m \quad A_z = 0m$

Sol

$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} = (2+2)\hat{i} + (2-4)\hat{j} = 4\hat{i} - 2\hat{j}$$

$$R_x = 4m \qquad R_y = -2m$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = \sqrt{20} = 4.5m$$

$$\tan\theta = \frac{R_y}{R_x} = \frac{-2m}{4m} = -0.5$$

$\theta = \tan^{-1}(-0.5) = -27°$ (4-사분면)

$\therefore \quad \theta = 360° - 27° = 333°$ or 27° 4-사분면

예제 3.4 도보 여행

첫째 날: 승용차로부터 남동쪽으로 25.0 km를 감
둘째 날: 동북쪽으로 60.0°방향으로 40.0 km를 걸음. 산림 감시원 망루 발견

(A) 첫째 날과 둘째 날의 도보 여행가의 변위를 구하라.

$$A_x = A\cos(-45.0°) = (25.0\,\text{km})(0.707) = 17.7\,\text{km}$$

$$A_y = A\sin(-45.0°) = (25.0\,\text{km})(-0.707) = -17.7\,\text{km}$$

$$B_x = B\cos 60.0° = (40.0\,\text{km})(0.500) = 20.0\,\text{km}$$

$$B_y = B\sin 60.0° = (40.0\,\text{km})(0.866) = 34.6\,\text{km}$$

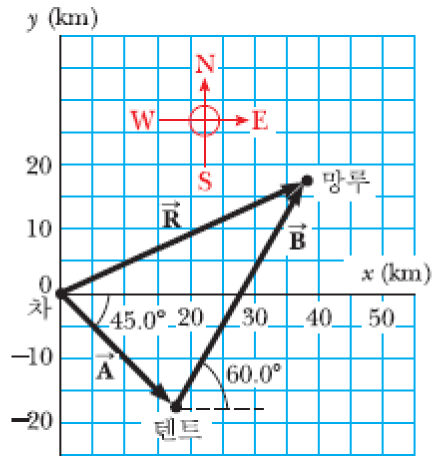


그림 3.17 도보 여행가의 전체 변위는 $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$ 이다.

(B) 도보 여행가의 합 변위 벡터 R의 성분을 구하라.
단위 벡터로 R을 나타내라.

$$R_x = A_x + B_x = 17.7\,\text{km} + 20.0\,\text{km} = 37.7\,\text{km}$$

$$R_y = A_y + B_y = -17.7\,\text{km} + 34.6\,\text{km} = 16.9\,\text{km}$$

$$\vec{R} = (37.7\hat{i} + 16.9\hat{j})\,\text{km}$$