7.4 충분통계량과 완비통계량

7.4.1 충분통계량

$X_1, X_2, \cdots, X_n$을 $f(x;\theta)$로부터의 확률표본이라 할 때, 모수 θ의 추론에 사용되는 통계량 $Y = u(X_1, X_2, \cdots, X_n)$는 n개의 표본이 가지고 있는 θ에 대한 모든 정보와 동일한 정보력을 가지되(sufficiency), 가능한 한 단순한 형태(minimal type)를 취하는 것이 바람직 할 것이다.

예를 들어, $B(1, \theta)$로부터의 n개의 확률표본 $X_1, X_2, \cdots, X_n$에 기초하여 모수 θ를 추정하고자 할 때, θ에 대한 모든 정보는 n개의 표본이 가지고 있다. 그러나 n개의 표본 대신 $(X_{(1)}, X_{(2),} \cdots, X_{(n)})$ 또는 $\sum X_i$의 정보만으로도 모수 θ에 대한 동일한 추론이 가능하다. 이는 통계량 $(X_{(1)}, X_{(2),} \cdots, X_{(n)})$ 또는 $\sum X_i$이 가지고 있는 모수 θ에 대한 정보력의 충분성(sufficiency)에 기인한다고 말할 수 있으며, 그 가운데 보다 단순한 형태인 $\sum X_i$가 많이 사용된다고 할 수 있다.

정의 6 충분통계량

$X_1, X_2, \cdots, X_n$을 $f(x;\theta)$로부터의 확률표본이라 하자. 어떤 통계량 $Y = u(X_1, X_2, \cdots, X_n)$에 대해, $Y = y$일 때 $X = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$의 조건부 분포 즉, $X|Y = y$의 분포가 θ에 의존하지 않을 때, Y를 θ에 대한 충분통계량(Sufficient Statistic 또는 $S.S.$)이라 한다.

정의 7 충분통계량

$X_1, X_2, \cdots, X_n$이 $f(x;\theta)$로부터의 확률표본일 때, $Y = u(X_1, X_2, \cdots, X_n)$이 θ에 대한 충분통계량이기 위한 필요충분조건은 임의의 통계량 T에 대해 $Y = y$일 때 T의 조건부 분포가 θ에 의존하지 않는 것이다.

예제 1 $X_1, X_2, \cdots, X_n$이 $B(1, \theta)$로부터의 확률표본일 때, $Y = \sum X_i$는 모수 θ에 대한 충분통계량임을 보여라.

풀이 $X = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$이라 할 때, $X|Y = y$의 조건부 $p.d.f.$는

$$
\begin{aligned}
&P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \cdots, X_n = x_n \mid Y = y) \\
&\quad = \frac{P\{X_1 = x_1, X_2 = x_2, \cdots, X_n = x_n,\ Y = y\}}{P(Y = y)}, \quad Y \sim B(n,\ \theta) \\
&\quad = \frac{\theta^{\sum x_i}(1-\theta)^{n-\sum x_i}}{\binom{n}{y}\theta^y(1-\theta)^{n-y}}, \quad \sum x_i = y \\
&\quad = \frac{1}{\binom{n}{y}}
\end{aligned}
$$

으로 주어지며, 이는 θ에 의존하지 않으므로 $Y = \sum X_i$는 θ에 대한 충분통계량이 된다. ■

Remarks 1. 가능도함수 $L(\theta)$에 기초한 모수 θ에 대한 추론(예를 들어, MLE에 기초한 추론)은 충분통계량의 $p.d.f.$에 기초한 추론 결과와 동등하다.

2. [정의 6]을 이용하여 충분통계량임을 보이기 위해서는 Y의 분포가 요구되며, 이는 매우 번거로운 일이다. 또한, [정의 6]이 충분통계량을 찾는 도구로 사용되지는 않는다.

Neyman-Fisher에 의한 다음의 정리는 충분통계량 임을 보이거나 찾는 편리한 도구로 이용된다.

정리 1 분해정리 : Factorization Theorem

$X_1, X_2, \cdots, X_n$을 $f(x;\theta)$로부터의 확률표본이라 하자. 통계량 $Y = u(X_1, X_2, \cdots, X_n)$가 θ에 대한 충분통계량이기 위한 필요충분조건은 결합확률밀도함수가 다음의 형태

$$f(x_1;\theta)f(x_2;\theta)\cdots f(x_n;\theta) = g\left[u(X_1, X_2, \cdots, X_n);\theta\right]h(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

로 분해되는 경우이다.

예제 2 $X_1, X_2, \cdots, X_n$을 $B(1, \theta)$로부터의 확률표본이라 할 때, $Y = \sum X_i$가 θ에 대한 충분통계량임을 보여라.

풀이 결합확률밀도함수가

$$\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta) = \prod_{i=1}^{n} \theta^{x_i}(1-\theta)^{1-x_i}$$
$$= \theta^{\sum x_i}(1-\theta)^{n-\sum x_i}$$
$$= g(\textstyle\sum x_i;\theta)h(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

이므로, 분해정리에 의해, $Y = \sum X_i$는 θ에 대한 충분통계량이다. ■

예제 3 $X_1, X_2, \cdots, X_n$을 다음 분포로부터의 확률표본이라 하자.

$$f(x;\theta) = \begin{cases} e^{-(x-\theta)}, & x \geq \theta \ (-\infty < \theta < \infty) \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

이때, $Y = X_{(1)}$이 θ에 대한 충분통계량임을 보여라.

풀이 결합확률밀도함수가

$$\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta) = \prod_{i=1}^{n} e^{-(x_i-\theta)} \cdot I_{(\theta,\infty)}(x_i)$$
$$= e^{n\theta - \sum x_i} \cdot I_{(\theta,\infty)}(x_{(1)})$$
$$= e^{n\theta} \cdot I_{(\theta,\infty)}(x_{(1)}) e^{-\sum x_i}$$
$$= g(x_{(1)};\theta)h(x_1, \cdots, x_n)$$

이므로, 분해정리에 의해, $Y = X_{(1)}$은 θ에 대한 충분통계량이다. ■

[정리 1]은 모수 θ가 다차원인 경우에 다음과 같이 확장될 수 있다. 즉, 모수 $\theta=(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k)$에 대해 통계량 $(Y_1, Y_2, \cdots, Y_l)'=[u_1(X_1, X_2, \cdots, X_n), \cdots, u_l(X_1, X_2, \cdots, X_n)]$이 모수 θ에 대한 결합충분통계량(joint sufficient statistic 또는 $joint\ S.S.$)이 되기 위한 필요충분조건은 결합확률밀도함수가

$$\prod_{i=1}^{n} f(x_i\,;\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k)$$
$$= g[u_1(x_1, x_2, \cdots, x_n), \cdots, u_l(x_1, x_2, \cdots, x_n)\,;\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k]\,h(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

으로 표현되는 경우이다.

예제 4 $X_1, X_2, \cdots, X_n$이 다음의 분포

$$f(x\,;\theta_1, \theta_2) = \begin{cases} \dfrac{1}{\theta_2}\exp\left(-\dfrac{\mathrm{x}-\theta_1}{\theta_2}\right), & \mathrm{x} > \theta_1\ (-\infty < \theta_1 < \infty,\ \theta_2 > 0) \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

로부터의 확률표본일 때, $Y=(X_{(1)}, \sum_{i=1}^{n} X_i)$가 $\theta=(\theta_1, \theta_2)$에 대한 결합충분통계량이 됨을 보여라.

풀이 결합확률밀도함수가

$$\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta_1, \theta_2) = \left(\frac{1}{\theta_2}\right)^n \exp\left[-\frac{\sum(x_i-\theta_1)}{\theta_2}\right]\cdot\prod_{i=1}^{n} I_{(x_i>\theta_1)}$$
$$= \left(\frac{1}{\theta_2}\right)^n \exp\left[-\frac{\sum x_i - n\theta_1}{\theta_2}\right]\cdot I_{(x_{(1)}>\theta_1)}$$
$$= g\left(x_{(1)}, \sum x_i;\theta_1, \theta_2\right)h(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

이므로, 분해정리에 의해, $Y=\left(X_{(1)}, \sum X_i\right)$는 $\theta=(\theta_1, \theta_2)$에 대한 결합충분

통계량이다. ■

예제 5 $X_1, X_2, \cdots, X_n$을 $U(\theta - \frac{1}{2}, \theta + \frac{1}{2})$로부터의 확률표본이라 할 때, $Y = (X_{(1)}, X_{(n)})$이 θ에 대한 결합충분통계량임을 보여라.

풀이 결합확률밀도함수가

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta) &= \prod_{i=1}^{n} I_{\left(\theta - \frac{1}{2},\, \theta + \frac{1}{2}\right)}(x_i) \\ &= I_{\left(\theta - \frac{1}{2} < x_{(1)}\right)} I_{\left(\theta + \frac{1}{2} > x_{(n)}\right)} \\ &= g(x_{(1)}, x_{(n)};\theta) h(x_1, x_2, \cdots, x_n)\end{aligned}$$

이므로, 분해정리에 의해, $Y = (X_{(1)}, X_{(n)})$는 θ에 대한 결합충분통계량이다. ■

Remarks 1. 충분통계량의 일대일 함수는 역시 충분통계량이 된다.

2. 최대가능도추정량이 유일한(unique) 경우에는 반드시 충분통계량의 함수로 주어진다.

7.4.1 연습문제

1 $X_1, X_2, \cdots, X_n$이 $U(0, \theta)$로부터의 확률표본일 때

$$Y = X_{(n)}$$

이 θ에 대한 충분통계량임을 보여라.

❷ $X_1, X_2, \cdots, X_n$이 $\Gamma(\alpha, \beta)$로부터의 확률표본일 때

$$Y = \left(\prod_{i=1}^{n} X_i,\ \sum_{i=1}^{n} X_i\right)$$

가 $\theta = (\alpha, \beta)$에 대한 결합충분통계량임을 보여라.

❸ $X_1, X_2, \cdots, X_n$이 $Uniform(\theta_1, \theta_2)$로부터의 확률표본일 때

$$Y = \left(X_{(1)},\ X_{(n)}\right)$$

이 $\theta = (\theta_1, \theta_2)$에 대한 결합충분통계량임을 보여라.

❹ $X_1, X_2, \cdots, X_n$이 $N(\mu, \sigma^2)$으로부터의 확률표본일 때

$$Y = \left(\sum X_i,\ \sum X_i^2\right)$$

이 $\theta = (\mu, \sigma^2)$에 대한 결합충분통계량임을 보여라.

❺ $X_1, X_2, \cdots, X_n$이 임의의 분포 $f(x;\theta)$로부터의 확률표본일 때, 순서통계량

$$Y = \left(X_{(1)}, \cdots, X_{(n)}\right)$$

은 항상 모수 θ에 대한 결합충분통계량이 됨을 보여라.

7.4.2 지수족과 완비충분통계량

이 절에서는 통계량의 분포모임(또는 분포족: family of distributions)이 가지는 성질인 완비성에 대해 소개하고, 분포모임의 일종인 지수족과 그의 특징에 대해 알아본다.

정의 8 완비성

통계량 Y가 분포모임 $\{g(y;\theta);\theta\in\Theta\}$의 한 원소를 확률밀도함수로 가진다고 하자. 모든 $\theta\in\Theta$에 대해 다음의 조건

$$E_\theta[\varphi(Y)]\overset{\theta}{=}0,\quad \varphi:\theta\text{에 무관한 함수}$$

이 모든 y에 대해

$$\varphi(y)\overset{y}{=}0\ \ (\text{또는 모든 }\theta\text{에 대해 }P_\theta\{\varphi(Y)=0)\}=1)$$

임을 의미할 때, 위 분포족이 완비성(completeness)을 가진다고 한다.

표기법 이 절에서 사용되는 표기 "$\overset{\theta}{=}$"는 모든 $\theta(\theta\in\Omega)$에 대해 등호가 성립함을 나타내는 것으로 한다.

Remarks 1. 통계량 Y의 분포족이 완비성을 만족할 때, Y를 완비통계량(Complete Statistic)이라 한다.

2. 완비성은 완비통계량의 함수로 이루어지는 불편추정량은 유일(unique)하게 존재한다는 사실을 보이는 도구로 이용된다.(7.5절의 [정리 5] 참고.)

정의 9 완비충분통계량

$X_1, X_2, \cdots, X_n$이 $f(x;\theta),\ \theta\in\Theta$로부터의 확률표본이라 하자. 통계량 $Y=u(X_1, X_2, \cdots, X_n)$가 θ에 대한 충분통계량이며 동시에 완비통계량일 때, 통계량 Y를 θ에 대한 완비충분통계량(Complete Sufficient Statistic 또는 $C.S.S.$)이라 한다.

예제 1 $X_1, X_2, \cdots, X_n$을 모수공간이 $\Theta=\{\theta; 0<\theta<1\}$인 $B(1,\theta)$로부터의 확률표본이라 할 때, $Y=\sum X_i$가 θ에 대한 완비통계량임을 보여라.

풀이 $Y=\sum X_i \sim B(n,\theta)$이므로 모든 $\theta(0<\theta<1)$에 대해

$$E_\theta[\varphi(Y)] \overset{\theta}{=} 0, \quad \varphi : \theta\text{에 무관한 함수}$$

$$\Rightarrow \sum_{y=0}^{n} \varphi(y)\binom{n}{y}\theta^y(1-\theta)^{n-y} \overset{\theta}{=} 0$$

$$\Rightarrow \sum_{y=0}^{n} \varphi(y)\binom{n}{y}\left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)^y \overset{\theta}{=} 0$$

$$\Rightarrow \sum_{y=0}^{n} \varphi(y)\binom{n}{y}\lambda^y \overset{\lambda}{=} 0, \quad \lambda=\frac{\theta}{1-\theta}(>0)$$

이다. 위 사실은 모든 y에 대해

$$\varphi(y) \overset{y}{=} 0, \quad y=0,1,\cdots,n$$

임을 의미하므로, Y의 분포모임 $\{B(n,\theta); 0<\theta<1\}$은 완비성을 만족하며, 따라서 $Y=\sum X_i$는 θ에 대한 완비통계량이다. ■

예제 2 $X_1, X_2, \cdots, X_n$이 모수공간이 $\Theta=\{\mu; 0<\mu<\infty\}$인 $Poisson(\mu)$로부터의 확률표본일 때, $Y=\sum X_i$가 μ에 대한 완비통계량임을 보여라.

풀이 $Y=\sum X_i \sim Poisson(n\mu)$이므로, 모든 $\mu(\mu>0)$에 대해

$$E_\mu[\varphi(Y)] \overset{\mu}{=} 0, \quad \varphi: \mu\text{에 무관한 함수}$$

$$\Rightarrow \sum_{y=0}^{\infty} \varphi(y) \frac{e^{-n\mu}(n\mu)^y}{y!} \overset{\mu}{=} 0$$

$$\Rightarrow \sum_{y=0}^{\infty} \varphi(y) \left(\frac{\mu^y}{y!}\right) \overset{\mu}{=} 0$$

이면 모든 y에 대해

$$\varphi(y) \overset{y}{=} 0, \quad y = 0, 1, \cdots$$

이므로 $Y = \sum X_i$는 θ에 대한 완비통계량이다. ■

Remark 위의 (예제 1)과 (예제 2)에서 통계량 Y는 모수에 대해 완비통계량이며 동시에 충분통계량이므로 완비충분통계량이라 말할 수 있다.

특히 통계량 Y의 분포모임이 다음 [정의 5]에서 소개되는 지수족(Exponential Family)에 속하는 경우에는 모수 θ에 대한 완비충분통계량을 손쉽게 구할 수 있다.

정의 10 지수족

분포모임 $\{f(x;\theta);\theta \in \Theta\}$이 지수족(exponential family)에 속한다는 것은 다음의 조건 (i)과 (ii)를 만족하는 경우이다.

(i) $f(x;\theta) = \exp\left\{\sum_{j=1}^{k} c_j(\theta) T_j(x) + d(\theta) + S(x)\right\} I_A(x)$

(ii) $A = \{x \mid f(x;\theta) > 0\}$가 θ에 의존하지 않는다.

여기서 θ는 스칼라(scalar) 또는 벡터(vector)일 수 있다.

정리 2 지수족과 완비충분통계량

(A) $\{f(x;\theta);\theta\in\Theta\}$가 지수족에 속하면 $Y=[T_1(X), T_2(X), \cdots, T_k(X)]$는 θ에 대한 완비충분통계량($C.S.S.$)이 된다.

(B) $X_1, X_2, \cdots, X_n$이 지수족에 속하는 $f(x;\theta)$로부터의 확률표본일 때, $Y=\left[\sum_{i=1}^{n} T_1(X_i), \sum_{i=1}^{n} T_2(X_i), \cdots, \sum_{i=1}^{n} T_k(X_i)\right]$는 θ에 대한 완비충분통계량이 된다.

증명 위 정리는 충분성과 완비성을 차례로 보임으로서 쉽게 증명된다.

예제 3 $X_1, X_2, \cdots, X_n$이 $Poisson(\theta)$로부터의 확률표본일 때, θ에 대한 완비충분통계량을 구하여라.

풀이 확률밀도함수가

$$\begin{aligned} f(x;\theta) &= \frac{e^{-\theta}\theta^x}{x!} \\ &= \exp(x\ln\theta-\theta-\ln x!)\cdot I_{\{0,1,\cdots\}}(x) \end{aligned}$$

으로 지수족에 포함되므로 [정리 2]에 의해 $Y=\sum X_i$가 θ에 대한 완비충분통계량이다. ■

예제 4 $X_1, X_2, \cdots, X_n$이 $N(\mu, \sigma^2)$으로부터의 확률표본일 때, $\theta=(\mu, \sigma^2)$에 대한 완비충분통계량을 구하여라.

풀이 확률밀도함수가

$$\begin{aligned} f(x;\mu,\sigma^2) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\exp\left[-\frac{(\mathrm{x}-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] \\ &= \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}x^2+\frac{\mu}{\sigma^2}x-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}-\frac{1}{2}\ln(2\pi\sigma^2)\right]\cdot I_{(-\infty,\infty)}(x) \end{aligned}$$

으로 지수족에 포함되므로, [정리 2]에 의해 $Y=\left(\sum X_i^2, \sum X_i\right)$가 $\theta=\left(\mu, \sigma^2\right)$에 대한 완비충분통계량이다. ■

위의 예제에서 살펴본 포아송분포와 정규분포 외에도 지수족에 포함되는 분포로는 이항분포, 기하분포, 음이항분포, 감마분포, 이변량정규분포 등이 있으며, 지수족에 포함되지 않는 대표적인 분포로는 균일분포($U(0, \theta)$)와 와이블 분포($Weibull(\lambda, \alpha)$)가 있다.

예제 5 $X_1, X_2, \cdots, X_n$이 $U(0, \theta)$로부터의 확률표본일 때

(a) 분포모임 $\{U(0, \theta); \theta>0\}$이 지수족에 속하지 않음을 보여라.

(b) $Y=X_{(n)}$이 θ에 대한 완비충분통계량임을 보여라.

풀이 (a) $U(0, \theta)$의 확률밀도함수

$$f(x;\theta)=\frac{1}{\theta} I_{(0,\,\theta)}(x)$$

로부터, $A=\{x \mid 0<x<\theta\}$가 모수 θ에 의존하므로 지수족이라 할 수 없다.

(b) $Y=X_{(n)}$의 확률밀도함수는

$$f_Y(y)=n[F(y)]^{n-1} f(y)=\begin{cases}\dfrac{n y^{n-1}}{\theta^n}, & 0<y<\theta \\ 0, & otherwise\end{cases}$$

이다. 모든 θ에 대해

$$E[\varphi(Y)] \overset{\theta}{=} 0, \quad \varphi: \theta\text{에 무관한 함수}$$

$$\Rightarrow \int_0^\theta \varphi(y) \frac{n y^{n-1}}{\theta^n} dy \overset{\theta}{=} 0$$

$$\Rightarrow \int_0^\theta \varphi(y) y^{n-1} \overset{\theta}{=} 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{d\theta} \int_0^\theta \varphi(y) y^{n-1} \overset{\theta}{=} 0$$

$$\Rightarrow \varphi(\theta)\theta^{n-1} \overset{\theta}{=} 0$$

$$\Rightarrow \varphi(\theta) \overset{\theta}{=} 0$$

이다. 위 사실은 모든 $y(0<y<\theta)$에 대해

$$\varphi(y) \overset{y}{=} 0$$

임을 의미한다. 따라서 $Y=X_{(n)}$은 완비통계량이며, 또한 충분통계량이므로 (7.4.1 연습문제 1번) 완비충분통계량이다. ■

예제 6 $X_1, X_2, \cdots, X_n$이 다음의 분포

$$f(x;\theta) = \begin{cases} e^{-(x-\theta)}, & x > \theta \quad (-\infty < \theta < \infty) \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

로부터의 확률표본일 때, $Y=X_{(1)}$이 θ에 대한 완비충분통계량임을 보여라.

풀이 분해정리를 이용하여 $Y=X_{(1)}$이 θ에 대한 충분통계량임을 보인 바 있다. 완비성을 보이기 위해 Y의 확률밀도함수를 구하면

$$f(y;\theta) = n[1-F(y)]^{n-1}f(y)$$
$$= \begin{cases} ne^{-n(y-\theta)}, & \theta < y < \infty \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

이다. 모든 θ에 대해

$$E_\theta[\varphi(Y)] \overset{\theta}{=} 0, \quad \varphi : \theta\text{에 무관한 함수}$$

$$\models\Rightarrow \int_\theta^\infty \varphi(y) n e^{-n(y-\theta)} dy \overset{\theta}{=} 0$$

$$\models\Rightarrow \int_\theta^\infty \varphi(y) e^{-ny} dy \overset{\theta}{=} 0$$

$$\models\Rightarrow \frac{d}{d\theta}\int_\theta^\infty \varphi(y) e^{-ny} dy \overset{\theta}{=} 0$$

$$\models\Rightarrow \varphi(\theta) e^{-n\theta} \overset{\theta}{=} 0$$

$$\models\Rightarrow \varphi(\theta) \overset{\theta}{=} 0$$

이다. 위 사실은 모든 $y(\theta < y < \infty)$에 대해

$$\varphi(y) \overset{y}{=} 0$$

임을 의미한다. 따라서 $Y = X_{(1)}$은 θ에 대한 완비충분통계량이다. ■

다음의 (예제 7)은 분포모임이 완비성을 만족하지 않음을 보이는 방법을 보여준다. Z의 분포모임이 완비성을 만족하지 않음을 보이기 위해서는 모든 θ에 대해 $E\varphi(Z) = 0$이라는 사실이 모든 z에 대해 $\varphi(z) = 0$이 됨을 의미하지는 않음을 보이

면 된다. 이는 모든 θ에 대해 $E\varphi(Z)=0$이 되는 영(0) 아닌 함수 $\varphi(z)$가 존재함을 보이는 것으로 충분하다. 즉, 0에 대한 영(0)아닌 불편추정량(U.E.)을 찾기만 하면 되는 것이다.

예제 7 $Z \sim U(0, \theta)$일 때, 분포족 $\{U(0, \theta); 1 < \theta < \infty\}$이 완비성을 만족하지 않음을 보여라.

풀이 다음 함수

$$\varphi(z)=\begin{cases} \dfrac{1}{2}-z, & 0<z<1 \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

를 생각하면, 모든 $\theta(1<\theta<\infty)$에 대해 $E\varphi(Z)=0$을 만족하나 $z=1/2$에서만 $\varphi(z)=0$이 됨을 알 수 있다. 즉, $\varphi(z)$가 0에 대한 영(0) 아닌 불편추정량이므로, 위 분포족은 완비성을 만족하지 않는다. ■

Remark (예제 7)에서 알 수 있듯이 완비성은 모수 공간에 따라 달라질 수 있음에 유의하기 바란다(연습문제 2번과 비교해 볼 것).

7.4.2 연습문제

1. $X \sim \mathcal{E}\left(\frac{1}{\theta}\right)$일 때, 분포족 $\left\{\mathcal{E}\left(\frac{1}{\theta}\right); 0<\theta<\infty\right\}$이 완비성을 만족하는 것을 보여라.

2. $Z \sim U(0, \theta)$일 때, 분포족 $\{U(0, \theta); 0 < \theta < \infty\}$이 완비성을 만족함을 보여라.

3. $X_1, X_2, \cdots, X_n$이 다음 각 분포로부터의 확률표본이라 할 때, 모수에 대한 완비충분통계량을 구하여라.

(a) 이항분포 $B(n,\ \theta)$

(b) 감마분포 $\Gamma(\alpha,\ \beta)$

(c) 기하분포 $G(p)$

(d) 이변량정규분포 $BVN\left(\mu_1,\ \mu_2,\ \sigma_1^2,\ \sigma_2^2,\ \rho\right)$

4 $f(x\,;\theta_1, \theta_2) = \dfrac{\theta_1}{\theta_2} x^{\theta_1 - 1} \exp\left(-\dfrac{1}{\theta_2} x^{\theta_1}\right)$일 때, 분포족 $\{f(x\,;\theta_1,\ \theta_2)\,;\theta_1 > 0,\ \theta_2 > 0\}$은 지수족에 속하지 않음을 보여라.