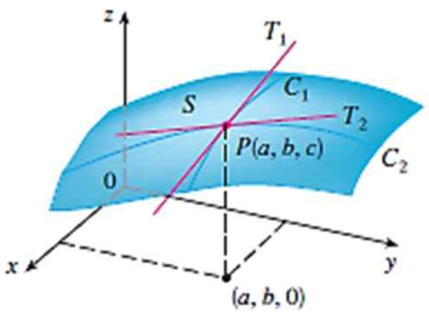
14.7 방향도함수와 그래디언트

$z = f(x, y)$ 의 편미분계수 정의 복습

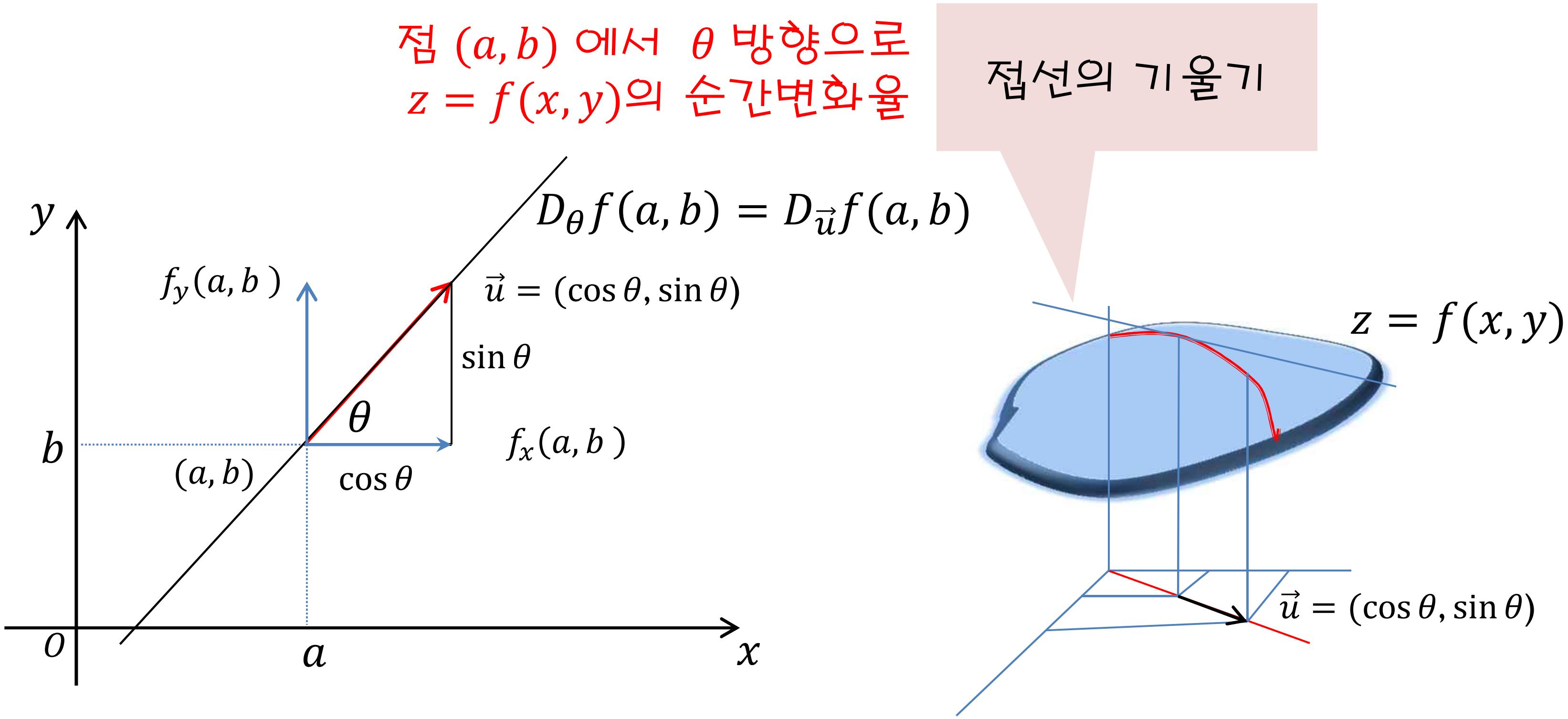
x 방향의 $z = f(x, y)$ 의 순간변화율

$$f_x(a, b) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x, b) - f(a, b)}{\Delta x}$$



$$f_y(a, b) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(a, b + \Delta y) - f(a, b)}{\Delta y}$$

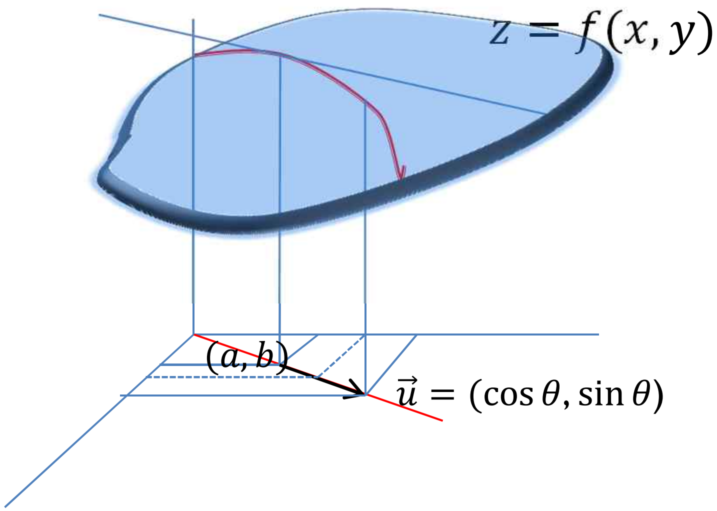
y 방향의 $z = f(x, y)$ 의 순간변화율



$D_\theta f(a,b)$: 점 (a,b)에서 θ 방향의 방향도함수

$D_{\vec{u}} f(a,b)$: 점 (a,b)에서 벡터 $\vec{u}$ 방향의 방향도함수

$D_\theta f(a,b)$: 점 (a,b)에서 θ 방향의 $z=f(x,y)$ 방향도함수



(a,b)
$\rightarrow\ (a+s\cos\theta, b+s\sin\theta)$

$$D_\theta f(a,b)=\lim_{s\to 0}\frac{f(a+s\cos\theta, b+s\sin\theta)-f(a,b)}{s}$$

$$g(s)=f(a+s\cos\theta\,, b+s\sin\theta)$$

$$\Rightarrow$$

$$g(0)=f(a,b)$$

$$g'(0)=\lim_{s\to 0}\frac{g(s)-g(0)}{s-0}=D_\theta f(a,b)$$

$$g(s) = f(x, y) \qquad \begin{aligned} x &= a + s\cos\theta \\ y &= b + s\sin\theta \end{aligned}$$

$$\frac{dx}{ds} = \cos\theta \quad \frac{dy}{ds} = \sin\theta$$

$$\Downarrow$$

연쇄법칙

$$g'(0) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{ds} = f_x(a, b)\cos\theta + f_y(a, b)\sin\theta$$

점 (a, b)에서 θ 방향의 방향도함수

$$D_\theta f(a, b) = f_x(a, b)\cos\theta + f_y(a, b)\sin\theta$$

Example

점 (1,2) 에서 x축과 각 $\frac{\pi}{3}$ 로 주어진 xy-평면 위에 있는 직선 방향으로 함수 $f(x,y)=x^2y^3$ 의 방향도함수를 구하여라.

$$f_x = 2xy^3 \qquad f_y = 3x^2y^2$$

$$f_x(1,2) = 16, \qquad f_y(1,2) = 12$$

따라서

$$\begin{aligned} D_{\frac{\pi}{3}} f(1,2) &= f_x(1,2)\cos\frac{\pi}{3} + f_y(1,2)\sin\frac{\pi}{3} \\ &= 16 \cdot \frac{1}{2} + 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= 8 + 6\sqrt{3} \end{aligned}$$

점 (x, y)에서 θ 방향의 $z = f(x, y)$ 방향도함수

$$D_\theta f(x, y) = f_x(x, y)\cos\theta + f_y(x, y)\sin\theta$$

$$= f_x \cos\theta + f_y \sin\theta$$

$$= \left(f_x, f_y\right) \cdot (\cos\theta, \sin\theta)$$

$$= \left(f_x, f_y\right) \cdot \vec{u}$$

$$= D_{\vec{u}} f(x, y)$$

$$D_{\vec{u}} f(x, y) = \left(f_x(x, y), f_y(x, y)\right) \cdot \vec{u}$$

$\boxed{\text{점 } (x, y)\text{에서 벡터 } \vec{u} \text{ 방향의 } z = f(x, y) \text{ 방향도함수}}$

$$D_{\vec{u}} f(x, y) = \left(f_x(x, y), f_y(x, y)\right) \cdot \vec{u}$$

여기서

$$\left(f_x(x, y), f_y(x, y)\right) = \nabla f(x, y)$$

로 표시하고 $z = f(x, y)$ 의 그래디언트(Gradient) 라 한다.

$$D_{\vec{u}} f(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot \vec{u}$$

$z = f(x, y)$ 의 그래디언트(Gradient)

벡터 $\vec{u}$ 방향의 방향도함수 $D_{\vec{u}} f(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot \vec{u}$

벡터 ∇f 와 $\vec{u}$ 의 교각을 α 라 하면

$$D_{\vec{u}} f = \nabla f \cdot \vec{u} = |\nabla f|\,|\vec{u}|\cos\alpha \leq |\nabla f|$$

$z = f(x, y)$의 점 (x, y) 에서 방향도함수의 최댓값은 그래디언트의 크기이고,

$\vec{u}$ 의 방향은 ∇f 와 같다.

$$\boxed{\vec{u} = \frac{\nabla f}{|\nabla f|}}$$

$$\nabla f(a,b) = \left(f_x(a,b), f_y(a,b)\right)$$

$$D_{\vec{u}} f(a,b) \text{ 의 최댓값} = |\nabla f(a,b)| = \sqrt{f_x(a,b)^2 + f_y(a,b)^2}$$

$$\vec{u} = \frac{\nabla f(a,b)}{|\nabla f(a,b)|}$$

Example

점 (2,3) 에서 함수 $f(x,y) = x^2y^3$ 의 방향도함수의 최댓값을 구하고,
최대방향도함수가 일어나는 방향을 구하여라.

$$\nabla f(x,y) = (f_x(x,y), f_y(x,y)) = (3xy^3, 3x^2y^2)$$

$$\nabla f(2,3) = (108, 108)$$

$$|\nabla f(2,3)| = \sqrt{108^2 + 108^2} = 108\sqrt{2}$$

방향도함수의 최댓값은 $|\nabla f(2,3)| = 108\sqrt{2}$

방향

$$\vec{u} = \frac{\nabla f(2,3)}{|\nabla f(2,3)|} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$$

$$\vec{u} = (\cos\theta, \sin\theta) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$$

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

Example

점 (4,3) 에서 함수 $f(x,y)=\tan^{-1}\frac{y}{x}$ 의 각 θ 방향의 방향도함수 $D_\theta f(x,y)$ 를 구하고, 그 값이 최댓값을 가질 때, $\cos\theta$ 와 $\sin\theta$ 의 값을 구하여라.

$f(x,y)=\tan^{-1}\frac{y}{x}$ 이므로

$$f_x=-\frac{y}{x^2+y^2},\quad f_y=\frac{x}{x^2+y^2}.$$

따라서

$$f_x(4,3)=-\frac{3}{25},\quad f_y(4,3)=\frac{4}{25}.$$

$$\begin{aligned} D_\theta f(4,3) &= f_x(4,3)\cos\theta+f_y(4,3)\sin\theta \\ &= -\frac{3}{25}\cos\theta+\frac{4}{25}\sin\theta. \end{aligned}$$

$$\nabla f(4,3)=(f_x(3,4),f_y(3,4))=(-\frac{3}{25},\frac{4}{25})$$

방향도함수의 최대값을 갖는 방향은

$$\tan\theta=-\frac{4}{3}\quad \text{2사분면.}$$

따라서

$$\cos\theta=-\frac{3}{5},\quad \sin\theta=\frac{4}{5}.$$

n 변수함수 $z = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 의 그래디언트와 방향도함수

그래디언트

$$\nabla f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$$

단위벡터 $\vec{u}$ 방향의 방향도함수

$$D_{\vec{u}} f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \nabla f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \cdot \vec{u}$$

Example

$f(x,y,z)=\ln(z+\sin(y^2-x))$ 일 때, $\nabla f(1,-1,1)$ 을 구하여라.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{-\cos(y^2-x)}{z+\sin(y^2-x)} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{2y\cos(y^2-x)}{z+\sin(y^2-x)} \qquad \frac{\partial f}{\partial z}=\frac{1}{z+\sin(y^2-x)}$$

$$\begin{aligned}\nabla f(x,y,z)&=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)\\&=\left(\frac{-\cos(y^2-x)}{z+\sin(y^2-x)},\frac{2y\cos(y^2-x)}{z+\sin(y^2-x)},\frac{1}{z+\sin(y^2-x)}\right)\end{aligned}$$

$$\nabla f(1,-1,1)=(-1,-2,1)$$

Example

점 (1,1,0) 에서 벡터 $\vec{A} = (2, -3, 6)$ 방향으로의 함수 $f(x, y, z) = x^3 - xy^2 - z$ 의 방향도함수를 구하여라.

$$\nabla f(x, y, z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = (3x^2 - y^2, -2xy, -1)$$

$$\nabla f(1, 1, 0) = (2, -2, -1)$$

벡터 $\overrightarrow{A}$가 단위벡터가 아니고, $|\overrightarrow{A}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2} = 7$

$$\overrightarrow{u} = \frac{\overrightarrow{A}}{|\overrightarrow{A}|} = \left(\frac{2}{7}, -\frac{3}{7}, \frac{6}{7}\right)$$

$$\begin{aligned} D_{\overrightarrow{u}} f(1, -1, 0) &= \nabla f(1, -1, 0) \cdot \overrightarrow{u} \\ &= 2 \cdot \frac{2}{7} + 2 \cdot \frac{3}{7} - 1 \cdot \frac{6}{7} \\ &= \frac{4}{7} \end{aligned}$$

Example

점 (1,1) 에서 함수 $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ 의 방향도함수의 값이 어느 방향에서 0이 되는가?

(풀이)

$$f_x(x,y) = \frac{2x(x^2+y^2) - 2x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_x(1,1) = 1$$

$$f_y(x,y) = \frac{-2y(x^2+y^2) - 2y(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-4y^3}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_y(1,1) = -1$$

따라서, $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ 라하면

$$D_{\mathbf{u}} f(1,1) = (1,-1) \circ (u_1, u_2) = u_1 - u_2$$

이므로 $D_{\mathbf{u}} f(1,1) = 0$ 이되는 방향은 $u_1 = u_2$ 인경우이고, 따라서

$$\mathbf{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Example

점 $P_0(1,2)$ 에서의 점 $P_1(2,3)$ 으로 향하는 방향으로의 2변수 함수 $f(x,y)$ 의 방향도함수는 $2\sqrt{2}$ 이고 $P_2(1,0)$ 으로 향하는 방향으로의 $f(x,y)$ 의 방향도함수가 -3 일때, $P_3(4,6)$ 으로 향하는 방향으로의 $f(x,y)$ 의 방향도함수를 구하라.

(풀이) 우선 $\overrightarrow{P_0P_1} = (1,1)$, $\overrightarrow{P_0P_2} = (0,-2)$, $\overrightarrow{P_0P_3} = (3,4)$ 이므로, 각각의 방향벡터는 다음과 같다.

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\overrightarrow{P_0P_1}}{|\overrightarrow{P_0P_1}|} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}),\ \ \mathbf{u}_2 = \frac{\overrightarrow{P_0P_2}}{|\overrightarrow{P_0P_2}|} = (0,-1),\ \ \mathbf{u}_3 = \frac{\overrightarrow{P_0P_3}}{|\overrightarrow{P_0P_3}|} = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5}).$$

여기서

$$D_{\mathbf{u}_1}(1,2) = \nabla f(1,2) \circ \mathbf{u}_1 = (f_x(1,2), f_y(1,2)) \circ (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = 2\sqrt{2} \qquad (1)$$

$$D_{\mathbf{u}_2}(1,2) = \nabla f(1,2) \circ \mathbf{u}_2 = (f_x(1,2), f_y(1,2)) \circ (0,-1) = -3 \qquad (2)$$

이므로 식 (1), (2) 로부터

$$f_x(1,2) + f_y(1,2) = 4 \qquad (3)$$

$$-f_y(1,2) = -3 \qquad (4)$$

따라서

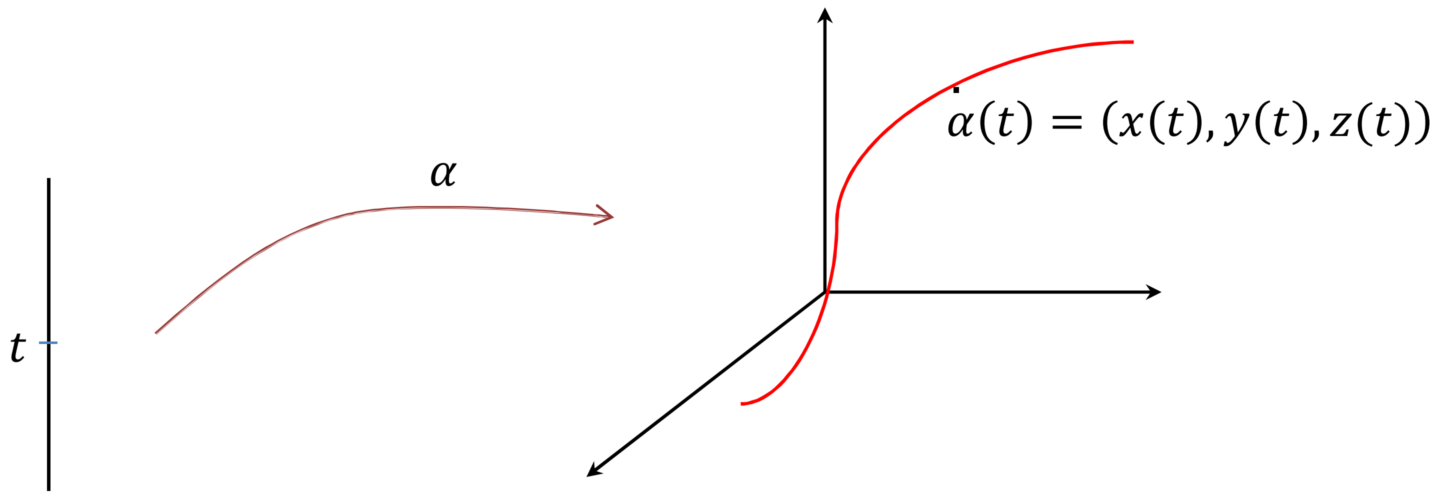
$$f_x(1,2) = 1, \quad f_y(1,2) = 3$$

이고

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}_3} &= \nabla f(1,2) \circ \mathbf{u}_3 \\ &= (f_x(1,2), f_y(1,2)) \circ \mathbf{u}_3 \\ &= (1,3) \circ (\frac{3}{5}, \frac{4}{5}) = 3. \end{aligned}$$

14.8 공간곡선의 호의 길이, 접선과 법평면

공간곡선



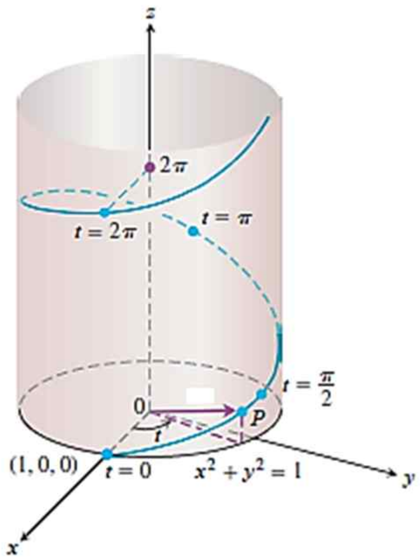
공간곡선 $x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t)$

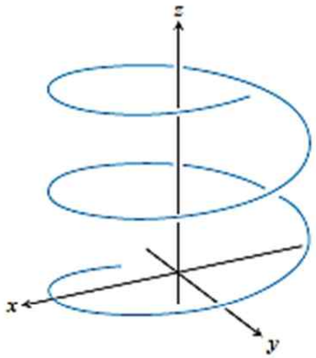
Example

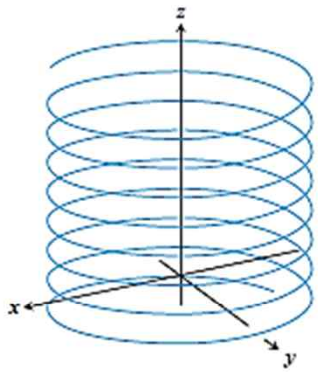
시각 t에 점의 위치가 $P(x, y, z)$:

$$x = a\cos 2\pi t, \quad y = a\sin 2\pi t, \quad z = bt$$

에 있을 때, 점 P의 궤적을 그려라. 단 $a, b > 0$ 이다.



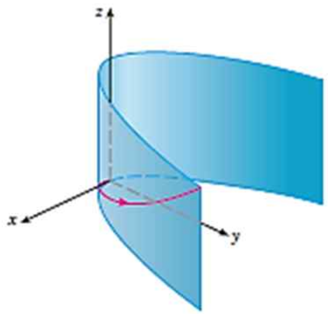




$$\alpha(t) = (a\cos 2\pi t\,, a\sin 2\pi t\,, bt\,)$$

Example

$\alpha(t) = (t, t^2, t^3)$ 의 그래프를 그려라.



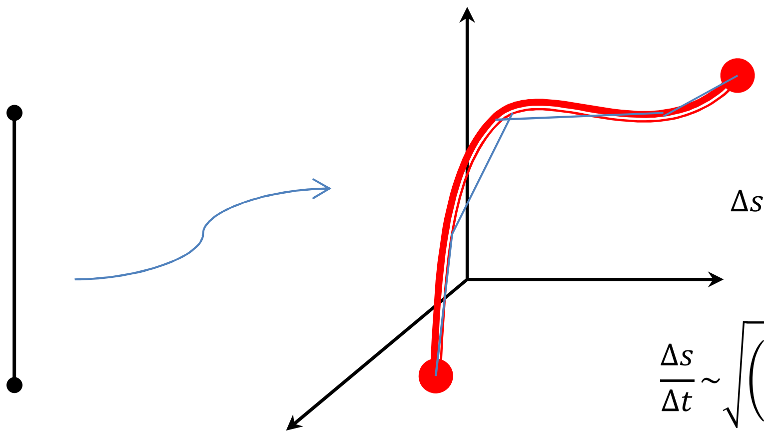
Example

$\alpha(t) = (t\cos 2\pi t\,, t\sin 2\pi t\ \,, t)$ 의 그래프를 그려라.

Example

$\alpha(u) = (e^{u}\cos u\,, e^{u}\sin u\ \,, e^{u})$ 의 그래프를 그려라.

공간곡선의 호의 길이



$$\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

$$\alpha(t+\Delta t) = (x(t+\Delta t), y(t+\Delta t), z(t+\Delta t))$$

$$\Delta s \sim \sqrt{\big(x(t+\Delta t)-x(t)\big)^2 + \big(y(t+\Delta t)-y(t)\big)^2 + \big(z(t+\Delta t)-z(t)\big)^2}$$

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} \sim \sqrt{\left(\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{y(t+\Delta t)-y(t)}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{z(t+\Delta t)-z(t)}{\Delta t}\right)^2}$$

$\Delta t \to 0$

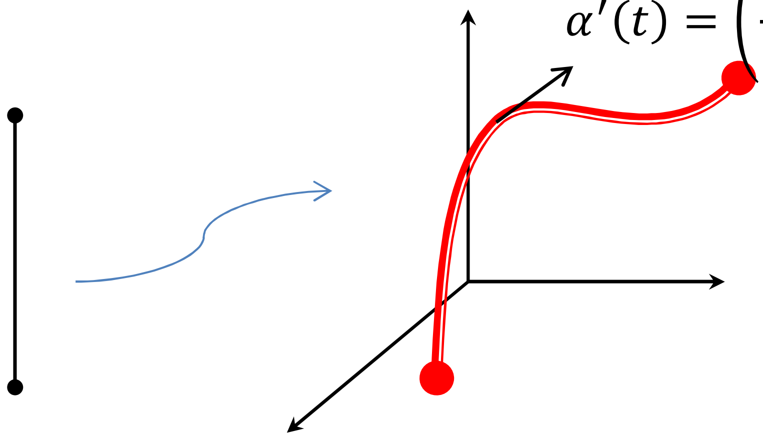
$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$$

$$s = \int_a^b ds = \int_a^b \frac{ds}{dt}\, dt$$

$$= \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt = \int_a^b |\alpha'(t)| dt$$

접선벡터

$$\alpha'(t) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$$

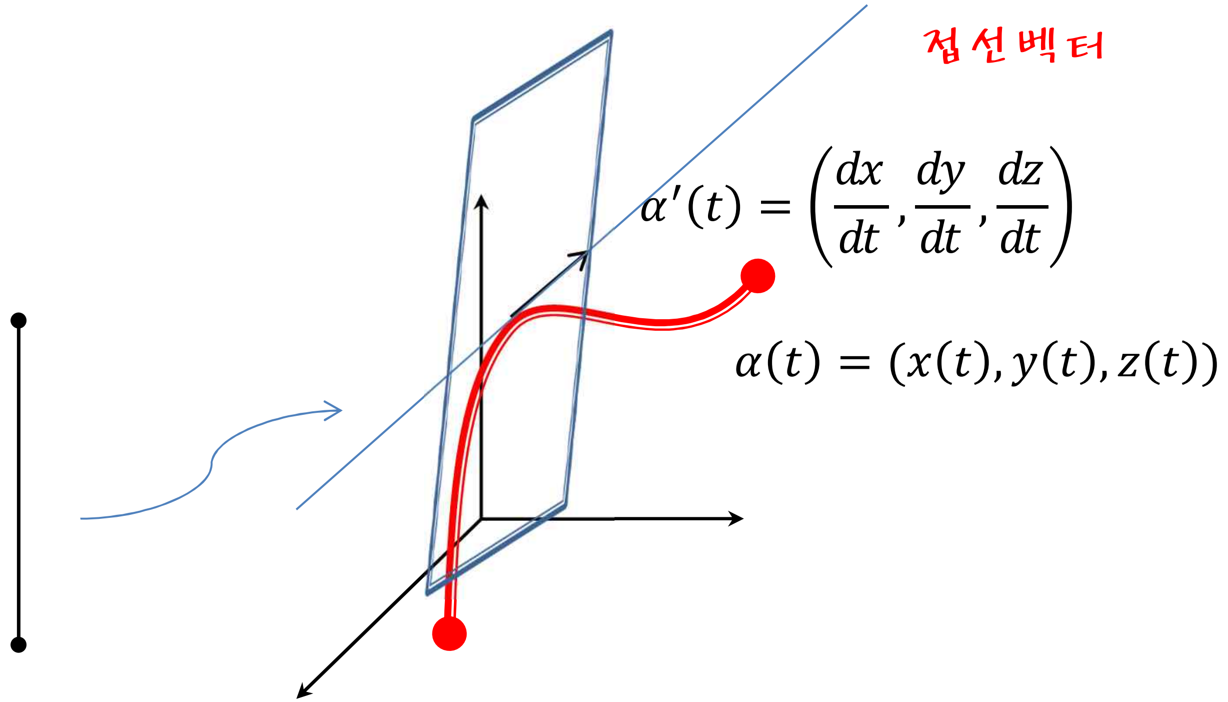


Example

원나선 $\alpha(t) = (a\cos 2\pi t\,, a\sin 2\pi t\,, bt\,)$ 의 $0 \le t \le 1$ 에서 호의 길이를 구하여라.

$$
\begin{aligned}
s &= \int_0^1 \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt \\
&= \int_0^1 \sqrt{(-2a\pi \sin 2\pi t)^2 + (2a\pi \cos 2\pi t)^2 + b^2 dt} \\
&= \int_0^1 \sqrt{4a^2\pi^2 + b^2} dt \\
&= \sqrt{4a^2\pi^2 + b^2}
\end{aligned}
$$

접선과 법평면의 방정식



접선벡터
$\alpha'(t) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$
$\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$

접선의 방정식

$$\frac{x - x(t)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y - y(t)}{\frac{dy}{dt}} = \frac{z - z(t)}{\frac{dz}{dt}}$$

법평면의 방정식

$$\frac{dx}{dt}\big(x - x(t)\big) + \frac{dy}{dt}\big(y - y(t)\big) + \frac{dz}{dt}\big(z - z(t)\big) = 0$$

Example

$t = 2$ 에서, 곡선 $x = t, y = t^2, z = t^3$ 의 접선과 법평면의 방정식을 각각 구하여라.

$$\alpha(t) = (t, t^2, t^3) \Longrightarrow \alpha(2) = (2, 4, 8)$$

$$\alpha'(t) = (1, 2t, 3t^2) \Longrightarrow \alpha'(2) = (1, 4, 12)$$

접선의 방정식

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-4}{4} = \frac{z-8}{12}$$

법평면의 방정식

$$(x-2) + 4(y-4) + 12(z-8) = 0$$

Example

나선 $\alpha(u) = (e^u \cos u\,, e^u \sin u\ , e^u)$ 위의 각점에서 접선과 z 축과의 교각은 항상 일정함을 증명하여라.

$$\alpha'(u) = (e^u \cos u - e^u \sin u, e^u \sin u + e^u \cos u, e^u)$$

이고 z 축 방향의 단위벡터는 $\mathrm{e}_3 = (0,0,1)$ 이므로, 두벡터의 내적을 구하면

$$\alpha'(u) \cdot \mathrm{e}_3 = (e^u \cos u - e^u \sin u, e^u \sin u + e^u \cos u, e^u) \cdot (0,0,1) = e^u$$

점에서의 접선과 z 축과의 교각을 θ 라하면

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{\alpha'(u)\cdot \mathrm{e}_3}{|\alpha'(u)|\ |\mathrm{e}_3|} \\ &= \frac{e^u}{\sqrt{e^{2u}(\cos u - \sin u)^2 + e^{2u}(\sin u + \cos u)^2 + e^{2u}}} \\ &= \frac{e^u}{e^u\sqrt{(\cos u - \sin u)^2 + (\sin u + \cos u)^2 + 1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\end{aligned}$$

따라서 $\cos\theta$ 는 일정하다. 즉, 각 점에서의 접선과 z 축과의 교각은 항상 일정.