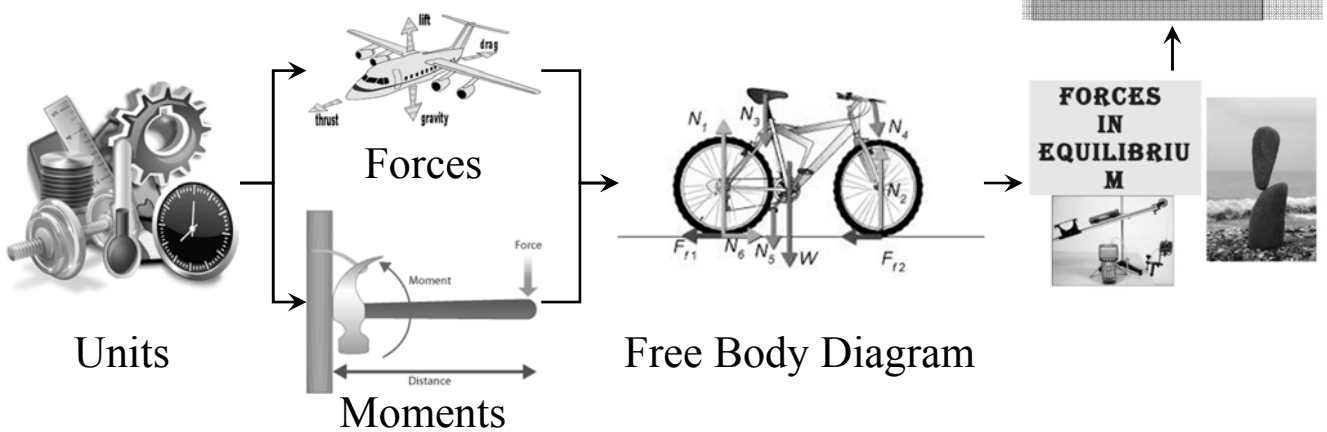


2차 모멘트 (2nd Moments of Inertia)

금오공대 기계시스템공학과
 오충석 (ocs@kumoh.ac.kr)

- (권장) 학습 과정: 반복 학습
 - Practice makes perfect!



Contents

- 모멘트
- 2차 모멘트의 예
- 2차 면적 모멘트
- 2차 면적 모멘트 계산
- 평행 축 정리

모멘트 (Moments)

- 모멘트란 무엇인가?
 - 어떤 종류의 물리적 효과가 하나의 물리 량 뿐만 아니라 그 물리량의 분포상태에 따라서 정해질 때 정의되는 양
 - 대부분 (위치)ⁿ × (물리량) 형태로 주어짐
 - $n = 1$: (무게, 질량, 길이, 면적에 관한) 1차 모멘트
 - 역학에서 정의되는 모멘트
$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad [\text{m} \cdot \text{N}]$$
 - 힘에 관한 1차 모멘트

2차 모멘트의 예

- 정수압 (Hydrostatic Pressure)을 받는 댐

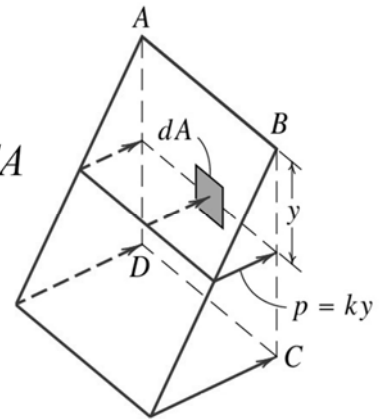
- 면적 분포 하중 (= 압력) \propto 수심 (y)
- 모멘트 (힘의 강도)
 \propto 회전축 (AB)에서 힘의 작용 선까지의 거리

$$p \propto y \rightarrow p = k_1 y$$

$$dF = p dA$$

$$dM_{AB} = y \times dF = y \times p dA = k_1 y^2 dA$$

$$\therefore M_{AB} = \int k_1 y^2 dA = k_1 \int y^2 dA$$



- 전단응력 (Shear Stress)을 받는 원형 축

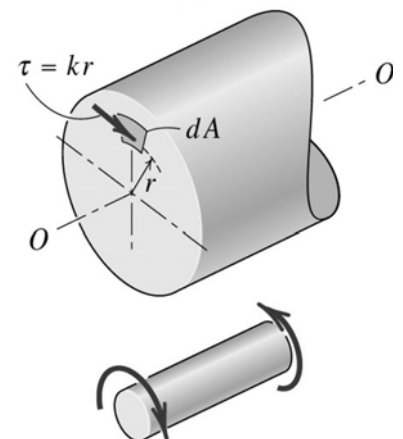
- 전단응력 \propto 축 중심에서의 반경 (r)
: 고체역학(추후 학습)
- 모멘트 (힘의 강도)
 \propto 중심축 (OO)에서 힘의 작용 선까지의 거리

$$\tau \propto r \rightarrow \tau = k_2 r$$

$$dV = \tau dA$$

$$dM_{OO} = r \times dV = r \times \tau dA = k_2 r^2 dA$$

$$\therefore M_{OO} = \int k_2 r^2 dA = k_2 \int r^2 dA$$



2차 면적 모멘트

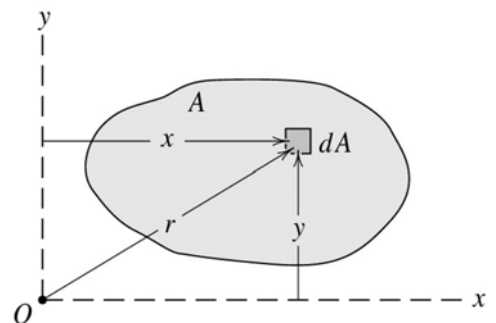
- Second Moments of Area (2차 면적 모멘트) / Area Moments of Inertia (면적 관성 모멘트)
 - 순수 수학적인 양
 - 물리적으로 큰 의미 없음
 - 항상 양수 [L⁴]
 - 앞의 두 가지 예처럼 $M_{AB} = k_1 \int y^2 dA$, $M_{OO} = k_2 \int r^2 dA$ 와 같은 형태의 식이 자주 등장
 - $\int \text{거리}^2 dA$ 형태를 면적관성모멘트로 정의
 - 역학에서 흔히 사용되는 모멘트(거리×힘)와는 다르지만 넓은 의미로는 모두 모멘트임 ($n=2$)

■ 정의 식

- x 및 y 축에 대한 직각 면적관성 모멘트

$$I_{xx} = I_x = \int y^2 dA$$

$$I_{yy} = I_y = \int x^2 dA$$



- z 축 (중심 축)에 대한 극 면적관성 모멘트

$$I_{zz} = I_z = \int r^2 dA = \int (x^2 + y^2) dA \equiv J$$

$$J = I_x + I_y$$

첨자 및 좌표 주의

- Attention Please! $I_{\textcircled{xx}} = \int \textcircled{y^2} dA$, $I_{\textcircled{yy}} = \int \textcircled{x^2} dA$, $I_{\textcircled{zz}} = J = \int \textcircled{r^2} dA$

면적관성모멘트 계산

■ 직사각형 (Rectangle)

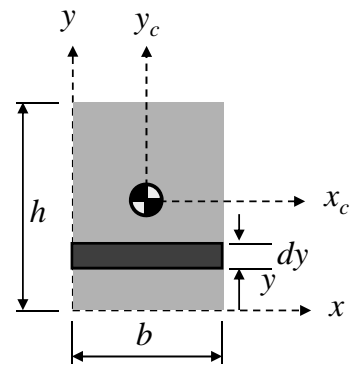
$$I_x = \int y^2 dA = \int y^2 (b dy)$$

$$= b \int_0^h y^2 dy = b \frac{y^3}{3} \Big|_0^h = \frac{bh^3}{3}$$

$$I_{xc} = \int y^2 dA = \int y^2 (b dy)$$

$$= b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 dy = b \frac{y^3}{3} \Big|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = \frac{bh^3}{12}$$

$$I_y = \int x^2 dA = \frac{hb^3}{3}, \quad I_{yc} = \frac{hb^3}{12}$$



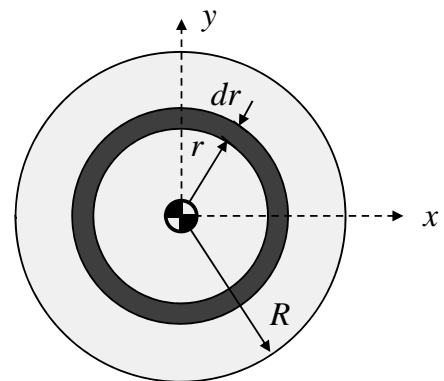
■ 원 (Circle)

$$J = \int r^2 dA = \int r^2 \times (2\pi r dr) = 2\pi \int_0^R r^3 dr$$

$$= \frac{\pi R^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32}$$

$$J = I_x + I_y = 2I_x = 2I_y = \frac{\pi R^4}{2}$$

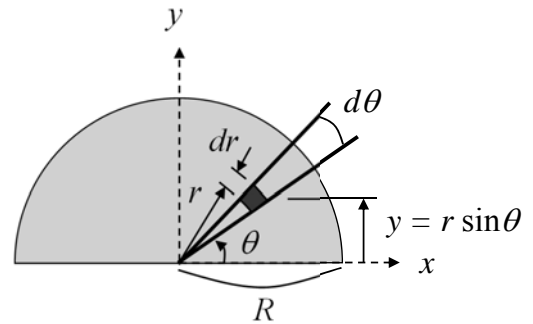
$$I_x = I_y = \frac{\pi R^4}{4}$$



■ 반원 (Semi-Circle)

$$\begin{aligned}
 I_x &= \int y^2 dA = \int (r \sin \theta)^2 (r d\theta dr) = \int_0^\pi \int_0^R r^3 \sin^2 \theta dr d\theta \\
 &= \int_0^\pi \left(\frac{R^4}{4} \sin^2 \theta \right) d\theta = \frac{R^4}{4} \int_0^\pi \frac{1 - \cos 2\theta}{2} d\theta \\
 &= \frac{R^4}{4} \left(\frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4} \right) \Big|_0^\pi = \frac{\pi R^4}{8}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_y &= \int x^2 dA = \int (r \cos \theta)^2 (r d\theta dr) \\
 &= \int_0^\pi \int_0^R r^3 \cos^2 \theta dr d\theta = \frac{\pi R^4}{8}
 \end{aligned}$$



■ 평행 축 정리 (Parallel Axis Theorem)

- d_x, d_y : 기준 축 (x, y)과 도심 축 (x_c, y_c) 사이 거리

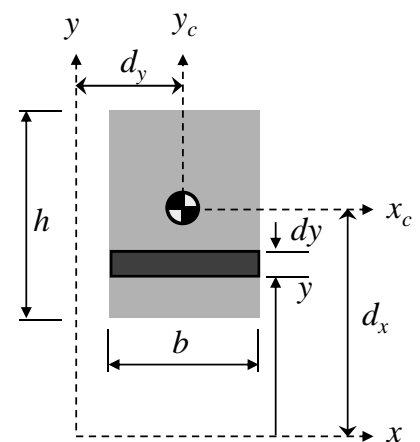
$$I_{x_c} = \int y^2 dA = \frac{bh^3}{12}$$

$$I_x = \int y^2 dA = \int y^2 (b dy)$$

$$= b \int_{d_x-h/2}^{d_x+h/2} y^2 dy = b \frac{y^3}{3} \Big|_{d_x-h/2}^{d_x+h/2}$$

$$= \frac{b}{3} \left[(d_x + h/2)^3 - (d_x - h/2)^3 \right]$$

$$= \frac{b}{3} \left[6d_x^2 \times \frac{h}{2} + 2 \left(\frac{h}{2} \right)^3 \right] = bhd_x^2 + \frac{bh^3}{12} = \boxed{Ad_x^2 + I_{x_c}}$$



■ T형 단면의 면적관성 모멘트

y 방향 도심은 137.5 mm이므로

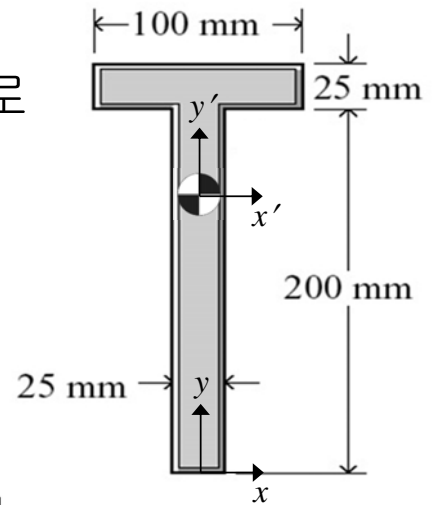
$$I_{x'x'} = \frac{100 \times 25^3}{12} + (100 \times 25) \times 75^2$$

$$+ \frac{25 \times 200^3}{12} + (25 \times 200) \times 37.5^2$$

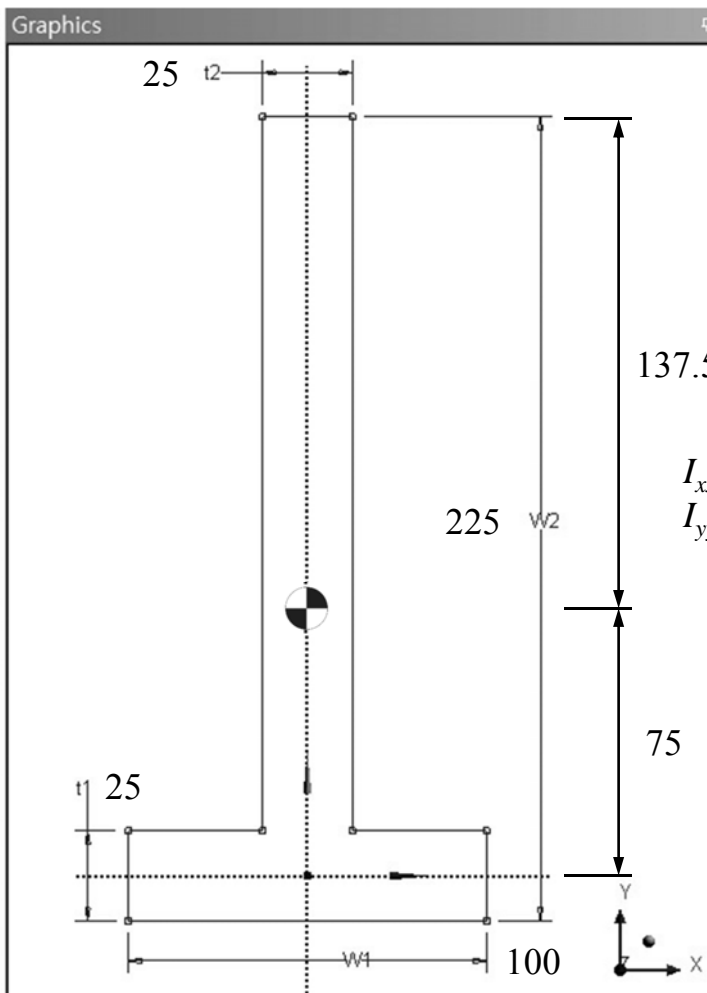
$$= 37,890,625 \text{ mm}^4 = 3.7891 \times 10^7 \text{ mm}^4$$

$$I_{yy} = \frac{25 \times 100^3}{12} + \frac{200 \times 25^3}{12} = 2,343,750 \text{ mm}^4$$

$$= 2.3438 \times 10^6 \text{ mm}^4$$



Tree Outline	
A: Static Structural	
Sketching Modeling	
Details View	
Details of T1	
Sketch	T1
Show Constraints?	No
Dimensions: 4	
W1	100 mm
W2	225 mm
t1	25 mm
t2	25 mm
Edges: 8	
Line	Ln9
Line	Ln10
Line	Ln11
Line	Ln12
Line	Ln13
Line	Ln14
Line	Ln15
Line	Ln16
Physical Properties: 10	
A	7500 mm ²
I _{xx}	3.7891e+007 mm ⁴
I _{yy}	2.3438e+006 mm ⁴
I _w	3.6967e+009 mm ⁶
J	1.5616e+006 mm ⁴
CGx	0 mm
CGy	75 mm
SHx	0 mm
SHy	14.512 mm



ANSYS
Workbench

$$I_{xx} = 3.7891 \times 10^7$$

$$I_{yy} = 2.3438 \times 10^6$$