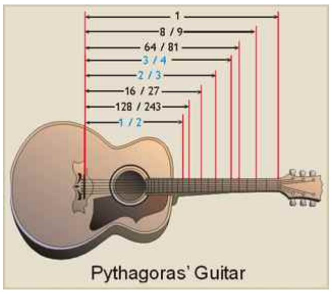
4. 제곱근과 실수

4.1. 이론적 배경

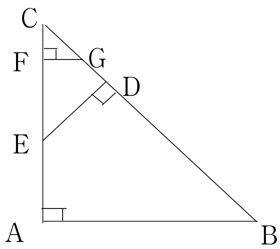
(1) 무리수

(가) 무리수의 발견

고대 그리스의 수학자 피타고라스(Pythagoras; 572?~492? B.C.)는 “수는 만물을 지배한다.”고 역설했다. 여기서 ‘수’는 자연수를 의미하는데, 피타고라스는 모든 양은 자연수 또는 자연수와 자연수의 비로 나타낼 수 있다고 생각했다. 예를 들어, 피타고라스는 음악에서 음정이 자연수의 비에 의존한다는 발견했는데, 실제로 현의 길이의 비가 2:1이면 8도 음정(1옥타브), 3:2이면 5도 음정, 4:3이면 4도 음정이 난다.



그러나 피타고라스가 증명한 피타고라스의 정리에 의해 직각을 낀 두 변의 길이가 모두 1인 직각삼각형의 빗변의 길이는 자연수나 자연수의 비로 표현되지 않는다. 즉, $\sqrt{2}$ 는 유리수가 아니다.
유리수가 아닌 무리수가 존재한다는 사실은 고대 그리스 사람들이 일반적으로 갖고 있었고 피타고라스 학파의 기하학 연구에 이용되었던 다음과 같은 직관적인 믿음을 뒤집어놓았다.
″임의로 주어진 두 선분에 대해 (그 길이가 매우 작을 수도 있는) 제3의 선분이 틀림없이 존재해서, 주어진 두 선분의 길이는 이 제3의 선분의 길이의 자연수 배가 된다. 즉, 임의의 두 선분의 길이는 같은 단위로 측정할 수 있다(commensurable).″
이런 생각이 틀렸음을 밝히기 위해서 두 선분을 직각이등변삼각형 ABC의 빗변 BC와 빗변이 아닌 한 변 AB로 선택하고, 길이가 d인 제3의 선분이 존재해서 자연수 배를 택함으로써 $\overline{BC}$ 와 $\overline{AB}$ 가 될 수 있다고 가정하자. 즉, 적당한 자연수 p와 q가 존재해서 $\overline{BC} = dp$와 $\overline{AB} = dq$가 성립한다고 가정하자.



이제 $\overline{BD} = \overline{AB}$ 가 되도록 변BC 위에 한 점 D 를 잡고, 점 D 를 지나면서 변BC 에 수직인 직선이 변 AB 와 만나는 점을 E 라고 하면 다음이 성립한다.
$\overline{AE} = \overline{ED} = \overline{DC}$,

$\overline{CD}=\overline{BC}-\overline{AB}=d(p-q)$, $\overline{EC}=\overline{AC}-\overline{AE}=\overline{AB}-(\overline{BC}-\overline{AB})=d(2q-p)$

그러므로 직각이등변삼각형 EDC의 빗변 EC와 빗변이 아닌 한 변 CD 역시 모두 d의 자연수배가 된다. 이 과정을 $\triangle EDC$에 다시 한 번 더 적용하면, $\overline{FC}$와 $\overline{CG}$ 모두 d의 자연수배가 된다. 위와 같은 과정을 계속 반복하면, 그 길이가 d의 자연수배이면서 작아지는 선분들(AC, EC, FC...)이 계속해서 생성된다. 그러나 이것은 불가능하다.

무리수의 발견과 같은 단위로 측정할 수 없는 길이의 발견은 피타고라스와 그 학파에게 큰 충격이었다. 피타고라스 학파는 $\sqrt{2}$를 '알로고스'(ἄλογος)라 불렀고, 이 사실을 얼마 동안 비밀로 유지하려고 노력했었다고 한다. 그리고 한 전설에 따르면, 피타고라스 학파의 일원이었던 히파수스(Hippasus)는 그 비밀을 외부에 발설한 불경죄로 바다에 수장되었다고 한다.

$\sqrt{2}$를 일컫는 '알로고스'(ἄλογος)는 '비가 없는'(without ratio) 또는 '비로 나타낼 수 없는'(irrational) 또는 '같은 단위로 측정할 수 없는'(incommensurable)을 뜻한다. 이 말을 번역해서 아랍 사람들과 헤브루 사람들은 무리수를 종종 '표현할 수 없는 수' (nonexpressible number)라 불렀다고 한다.

(나) 무리수의 연분수 표현

무리수는 순환하지 않는 무한 소수로 표현된다. 그리고 $\sqrt{2}$의 소수 전개에서 알 수 있듯이, 등장하는 숫자들 사이에서 어떠한 규칙도 찾아볼 수 없고 다음에 나타날 숫자를 예측할 수 없는 경우가 대부분이다.

그런데 '연분수'를 이용하면, 몇 가지 무리수를 매우 규칙적으로 그리고 예측 가능한 방법으로 나타낼 수 있다. 연분수는 분수들이 포개진 형태로 나타나는 분수이며, 특히 분자가 모두 1인 연분수를 단순 연분수라고 한다.

예를 들어, 분수 $\frac{57}{17}$을 다음과 같이 단순 연분수로 나타낼 수 있다.

$$\frac{57}{17}=3+\frac{6}{17}=3+\frac{1}{\frac{17}{6}}=3+\frac{1}{2+\frac{5}{6}}$$
$$=3+\frac{1}{2+\frac{1}{\frac{6}{5}}}=3+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{5}}}$$

단순 연분수에서는 분자가 모두 1이므로 이를 생략하고, $\frac{57}{17}$=[3; 2, 1, 5]와 같이 나타내기도 한다. 이를 '연분수 전개'라고 한다.

일반적으로, 유리수는 유한 연분수로 표현되고, 무리수는 무한 연분수로 표현된다.

이제 $\sqrt{2}$를 단순 연분수로 나타내어 보자. 이를 위해, $x=\sqrt{2}-1$이라 하면 다음을 얻는다.

$$x+1=\sqrt{2},\quad (x+1)^2=2,\quad x^2+2x=1,\quad x(x+2)=1,\quad x=\frac{1}{2+x},$$

$$x=\frac{1}{2+x}=\frac{1}{2+\frac{1}{2+x}}=\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+x}}}$$

$$=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+x}}}}=\cdots$$

이런 과정을 한없이 반복해서 무한 연분수를 얻는다. 그래서 $x=\sqrt{2}-1$을 대입하면 다음을 얻는다.

$$\sqrt{2}-1=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\ddots}}}} \quad \text{또는}$$

$$\sqrt{2}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\ddots}}}}$$

그러므로 $\sqrt{2}$의 연분수 전개는 다음과 같이 매우 규칙적이다.

$$\sqrt{2}=[1;\ 2,\ 2,\ 2,\ \cdots]$$

규칙적인 연분수 전개로 나타내어지는 무리수의 예를 몇 가지 들면 다음과 같다.

$$\sqrt{3}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\ddots}}}}}$$

$$=[1;\ 1,\ 2,\ 1,\ 2,\ \cdots]$$

$$\sqrt{5}=2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{\ddots}}}}}$$

$$=[2;\ 4,\ 4,\ 4,\ 4,\ \cdots]$$

$$e=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\ddots}}}}}}}$$

$$=[2;\ 1,\ 2,\ 1,\ 1,\ 4,\ 1,\ 1,\ 6,\ 1,\ 1,\ 8,\ 1,\ \cdots]$$

원주율 π의 연분수 전개에는 특별한 규칙이 없다.

$$\pi=3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{292+\ddots}}}}$$

(다) 무리수인 원주율 π

학생들이 최초로 접하는 무리수는 원주율 π이다. 그런데 π는 언제 무리수로 밝혀졌을까?

아르키메데스(Archimedes; 287?~212 B. C.)가 π의 값을 원하는 만큼 정확하게 계산할 수 있는 일반적인 방법을 고안한 이래, 수천에 걸쳐 π에 대한 더욱 정확한 근사값이 등장했다. 그러나 18세기 전반기까지도 π의 속성에 대해서는 알려진 바가 없었다.

1767년에 이르러서야 람베르트(Lambert, J.H.; 1728~1777)는 π가 무리수임을 증명할 수 있었다. 그는 0이 아닌 유리수 x에 대해서 $\tan x$는 유리수가 될 수 없음을 밝혔다. 그런데 $\tan\frac{\pi}{4}=1$이므로 $\frac{\pi}{4}$는 유리수가 될 수 없고, 이에 따라 π도 유리수가 될 수 없다. 즉, 무리수이다. 그리고 르장드르(A. M. Legendre, A.M.; 1752~1833)는 1794년 π^2도 무리수임을 밝혔다.

〔π의 정확한 근사값을 계산하는 이유〕

원주율 π는 무리수이기 때문에, 소수 전개로 참값을 얻을 수도 나타낼 수도 없다. 그렇지만 π에 대한 정확한 근사값을 구하려는 시도가 계속되고 있다. 왜?

더욱 정확한 π의 소수 전개를 구하는 데는 도전 이상의 의미가 있다. 그런 이유의 하나는 π의 '정규성'(normalcy)에 관한 통계적인 정보를 확보하는 것이다. 실수를 소수 전개했을 때, 0부터 9까지 열 개의 모든 숫자가 똑같은 빈도로 나타나면 그 실수를 '단순하게 정규적'(simply normal)이라 하고, 같은 길이를 가진 숫자들의 모든 열이 같은 빈도로 나타나면 그 수를 '정규적'(normal)이라 부른다. π가(또는 $\sqrt{2}$가) 정규적인지 또는 단순하게 정규적인지는 알려지지 않고 있다. 1949년 ENIAC부터 시작된 π에 대한 환상적인 계산은 이런 문제에 대한 통계적인 정보를 얻기 위해 실행되었다.

물론, π의 정규성과 비정규성에 관한 문제는 컴퓨터에 의해서 결코 풀릴 수 없다. 여기에서 계산만을 통해 풀 수 없고, 심오한 수학적 재능이 요구되는 이론적인 문제의 한 예를 갖게 된다.

π에 관한 정교한 계산은 π의 정규성과 비정규성에 관한 통계적인 증거 이외에 또 다른 용도가 있다. 새로운 모든 자동 계산기는, 실제로 사용되기 이전에, 적절하게 작동되는지를 점검해 봐야만 하고, 코딩하는 사람이나 프로그래머는 새로운 기계를 조작하는 훈련을 받아야만 한다. π에 대해 이미 시행된 광범위한 계산은 이렇게 요구되는 점검과 훈련을 수행하는 훌륭한 방법으로 자주 선택된다.

(라) 대수적 수와 초월수

계수가 정수인 다항방정식

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0$$

의 근이 될 수 있는 수를 '대수적 수'(alge- braic number)라 하고, 그렇지 않은 수를 '초월수'(transcendental number)라고 한다. 정의에 의해 모든 유리수와 유리수의 거듭제곱근이 대수적 수임을 쉽게 알 수 있다.

이와 같이 많은 무리수가 대수적 수이지만, [대수적 수 전체의 집합은 가부번이기 때문에(수학의 기초와 기본 개념 386쪽 참조)] 초월수인 무리수가 훨씬 더 많다.

1844년 리우빌(Liouville, J.; 1809~1882)은 초월수의 존재를 증명했고, 1882년에는 린데만(Lindemann, F.; 1852~1939)이 π가 초월수임을 보였다.

(마) 빛의 속도는 무리수?

많은 자연 현상을 유리수만으로, 실제로는 정수만으로 완벽하게 표현할 수 있다. 예를 들면, 전기는 더 이상 나눌 수 없는 기본이 되는 전하의 정수 배로 존재한다. 원소의 성질은 원자 번호와 관련이 있는데, 이는 각 원자 안에 있는 전자 수와 같고 이는 항상 정수이다. 동식물의 특징도 각각의 세포 내부에 존재하는 고유의 염색체 수에 따라 결정되는데, 염색체 수는 원자 번호와 마찬가지로 항상 정수이다.

그런데 모든 과학 이론에서 사용하는 수치 중에는 무리수의 개수가 늘어나고 있다고 한다. 그 하나가 빛의 속도인데, 소수점 아래 아홉째 자리까지 측정되었는데 그 자릿수의 배열에서 어떠한 규칙도 발견할 수 없었다. (빛의 속도를 아무리 정확하게 측정해도 그 측정값은 0.299792458×10^9 m/초이다.) 또, 원자 수준의 역동적 상태를 나타내는 미세 구조 상수가 있는데, 이 역시 소수점 아래 열째 자리까지 얻은 측정값의 자릿수 배열에서 어떠한 규칙도 발견할 수가 없었다. (미세 구조 상수는 단위가 없는 양으로 가장 정확한 측정값은 0.0072973503이다.)

물리학에서만 이런 상수가 수십 개가 있는데, 이것들의 자릿수는 대여섯에서 열한 자리까지의 숫자이지만, 역시 자릿수의 배열에서 어떠한 규칙도 발견할 수 없다.

(2) 실수 체계

17세기 말 뉴턴(Newton, I.; 1642~1727)과 라이프니츠(Leibniz, G.W.; 1646~1716)에 의해 발견된 미분적분학은 그 이전에 수학자들을 당혹스럽게 만들고 해결할 수 없는 것으로 생각되었던 많은 문제를 놀랍고도 성공적으로 해결하는데 거의 믿을 수 없을 정도의 힘을 갖고 있음을 입증했다.

18세기는 '미분방정식의 세기'라는 말이 있을 만큼 미분적분학의 응용에 몰두했던 시기였으며, 미분적분학으로부터 발생했거나 이와 관련된 수학 분야들로 이루어진 해석학은 크게 성장해서 수학을 구성하는 세 가지 큰 범주(기하학, 대수학, 해석학)의 하나가 되었다.

그렇지만 미분적분학의 기초는 발견될 때부터 불확실했으며, 19세기에도 해석학의 상부 구조는 계속 커졌지만 여전히 불확실한 기초에 근거하고 있었다. 대단히 큰 진전이 1821년에 이루어졌다. 이 해에 프랑스의 수학자 코시(Cauchy, A.L.; 1789~1857)는 받아들일 만한 극한 이론을 전개하고 그 다음에 극한 개념을 사용해서 연속성, 미분가능성, 정적분 등을 정의함으로써 해석학을 엄밀하게 전개하기 위한 토대를 마련했다. 미분적분학에 관한 고등학교 교과서에서 찾아볼 수 있는 정의들은 근본적으로 바로 이와 같은 것들이다.

해석학의 기초에 대한 더욱 깊은 이해는 1874년에 결정적으로 나타났다. 이 해에 독일의 수학자 바이어슈트라스(Weierstrass, K.T.; 1815~1897)가 그 이전에 고안했던 도함수를 갖지 않는 연속함수, 달리 표현하면 모든 점에서 접선이 존재하지 않는 연속 곡선의 예가 등장했다. 이 예는 해석학 연구에서 기하학적 직관의 이용에 치명적인 타격을 가했다. 당시까지 연속성과 미분가능성의 개념이 의존하고 있는 극한 이론은 실수 체계에 대한 간단하고 직관적인 기하학적 개념에 근거해서 설립되었었고, 실수 체계를 어느 정도 당연한 것으로 받아들였었다. 극한, 연속성, 미분가능성의 이론은 그 이전에 가정되었던 실수 체계의 성질보다 더욱 심오한 성질에 근거하고 있다는 사실이 분명해졌으며, 코시가 해석학에 대한 건전한 기초를 다지는 과정에서 진정으로 어려운 문제에는 접근하지 못했었다는 사실도 분명히 밝혀졌다.

실수 체계의 심오한 성질들에 대한 이해가 긴급히 요구되었다. 이에 따라 바이어슈트라스는 먼저 실수 체계를 엄밀하게 전개하고 그 다음에 해석학의 모든 기초적인 개념을 실수 체계로부터 유도하자는 계획을 주장했다. '해석학의 산술화'(arithmeti- zation of analysis)라 부르는 이 뛰어난 계획은 어렵고 복잡하다는 사실이 밝혀졌지만, 바이어슈트라스와 그의 추종자들에 의해 결국 성취되었다.

해석학의 산술화의 첫째 단계인 실수 체계의 엄밀한 전개는 두 가지 방법으로 이루어졌다. 하나는 공리적(axiomatic) 또는 공준적(postulational) 방법이고, 다른 하나는 정의적(definitional) 또는 발생적(genetical) 방법이다.

(가) 공리적 방법

공리적 방법은 실수들과 실수 위에서 시행되는 연산들을 기본적인 용어로 선택한 다음에 이 체계를 특성화시키는데 충분한 실수와 연산에 대한 몇 가지 기본적인 성질을 공리로 설정하여, 실수 체계의 존재를 공리적으로 인정하는 방법이다. 구체적인 내용은 다음과 같다.

집합 $\mathbb{R}(\neq\varnothing)$ 위에 이항 연산 '덧셈(+)'과 '곱셈($\cdot$)'이 정의되어 있고(즉, 임의의 $a\in\mathbb{R}$와 $b\in\mathbb{R}$에 대해 $a+b\in\mathbb{R}$와 $a\cdot b\in\mathbb{R}$가 유일하게 정해지고), 체의 공리와 순서 공리 및 완비성 공리를 만족시킬 때, $\mathbb{R}$을 실수 체계(real number system)라 하고, $\mathbb{R}$의 각 원소를 실수라고 한다.

[1] 체의 공리(field axioms)

임의의 $a\in\mathbb{R}$, $b\in\mathbb{R}$, $c\in\mathbb{R}$에 대해 다음이 성립한다.

A.1: $a+b=b+a$
A.2: $(a+b)+c=a+(b+c)$
A.3: 특정한 원소 $0\in\mathbb{R}$이 존재하여 $a+0=0+a=a$이다.
A.4: $-a\in\mathbb{R}$이 존재하여 $a+(-a)=(-a)+a=0$이다.
M.1: $a\cdot b=b\cdot a$
M.2: $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$
M.3: 특정한 원소 $1(\neq0)\in\mathbb{R}$이 존재하여 $a\cdot 1=1\cdot a=a$이다.
M.4: 각 $a(\neq0)\in\mathbb{R}$에 대하여 $a^{-1}\in\mathbb{R}$이 존재하여 $a\cdot a^{-1}=a^{-1}\cdot a=1$이다.
D: $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$

[2] 순서 공리(order axioms)

$\mathbb{R}$에는 다음을 만족시키는 부분집합 $P(\neq\varnothing)$가 존재한다.

O.1: 임의의 $a\in P$와 $b\in P$에 대하여 $a+b\in P$이고 $a\cdot b\in P$이다.
O.2: 임의의 $a\in\mathbb{R}$에 대하여 다음 중 하나만이 성립한다.
(i) $a\in P$ (ii) $a=0$ (iii) $-a\in P$

집합 P를 원소를 양수라고 한다.

정의 임의의 $a\in\mathbb{R}$와 $b\in\mathbb{R}$에 대하여 $a+(-b)\in P$일 때, a는 b보다 크다 또는 b는 a보다 작ㄷ-고 하며, 기호로 $a>b$ 또는 $b<a$와 같이 나타낸다.

정의 M이 $\mathbb{R}$의 공이 아닌 부분 집합일 때, 원소 $u\in\mathbb{R}$가 존재하여 각 원소 $m\in M$에 대해 $m<u$ 또는 $m=u$가 성립하면, u를 M의 상계(upper bound)라 부른다.

정의 M이 $\mathbb{R}$의 공이 아닌 부분 집합일 때, $\mathbb{R}$의 원소 α가 M의 상계이고 M의 임의의 다른 상계 u에 대해 $\alpha<u$이면, α를 M의 최소 상계(least upper bound) 또는 상한(supremum)이라 부른다.

[3] 완비성 공리(completeness axioms)

C: $\mathbb{R}$의 공이 아닌 부분 집합 M이 상계를 가지면, M은 최소 상계를 가진다.

이와 같이 완비 순서체(complete ordered field)로 정의된 실수 체계 $\mathbb{R}$은 본질적으로 유일하다는 사실이 알려져 있다.

(나) 정의적 방법 - 데데킨트 절단

정의적 방법은 자연수 체계를 공리적으로 정의한 다음에, 이로부터 정수, 유리수, 실수 체계를 차례로 구성하는 방법이다. 이에 따라 이 방법을 구성적(constructive) 방법이라 부르기도 한다.

이 방법에서 가장 어려운 단계는 유리수에서 실수를 구성하는 과정인데, 절단(cut)을 이용한 데데킨트(Dedekind, J.W.R.; 1831~1916)의 방법과 코시 수열을 이용한 칸토어(Cantor, G.; 1845~1918)의 방법이 있다.

데데킨트는 실수에 대해서는 성립하지만 유리수에 대해서는 성립하지 않는 성질인 연속성에 대한 명확한 정의를 내리기가 어렵다는 사실을 발견하고는, 실수를 도입하기 위한 방법을 고안하게 되었다. 그는 직선의 연속성의 본질이 '직선의 모든 점을 두 집합으로 나누어 첫째 집합의 각 점이 둘째 집합의 모든 점보다 왼쪽에 놓이도록 한다면 그 직선을 이런 두 집합으로 절단하는 직선 위의 점이 단 하나 존재한다.'는 성질에 놓여 있음을 발견했다.

이에 따라 다음 조건을 만족시키는 유리수 전체의 집합 $\mathbb{Q}$의 부분집합 A와 B를 로 이루어진 유리수 집합에서의 '데데킨트 절단' $(A|B)$를 정의했다.

1. $A \cup B = \mathbb{Q}$
2. $A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing$
3. $a \in A$이고 $b \in B$이면 $a < b$이다.

여기서 유리수 집합에서의 데데킨트 절단 $(A|B)$에는 다음과 같이 세 가지 형태의 가 있음을 알 수 있다.

(1) A에 최대 원소 a가 있고 B에는 최소 원소가 없다.

(2) A에는 최대 원소가 없고 B에 최소 원소 b가 있다.

(3) A에 최대 원소가 없고 B에도 최소 원소가 없다.

A에 최대 원소 a가 있고 B에도 최소 원소 b가 있는 경우는 없다. 왜냐하면 서로 다른 임의의 두 유리수 a와 b 사이에는 또 다른 유리수 c가 반드시 존재하고 c는 A와 B 중 어느 집합에도 속할 수 없어서 A와 B의 구성에 모순되기 때문이다.

(1) 또는 (2) 형태를 유리 절단이라 하는데, 각 유리수에 대해 (1) 형태와 (2) 형태의 두 가지 절단이 대응한다. 유리 절단 전체의 집합과 유리수 전체의 집합 사이의 일대일 대응을 만들기 위해서는 (2) 형태의 유리 절단만을 고려하면 충분하다.

이제, (2) 형태 또는 (3) 형태인 유리수 집합에서의 데데킨트 절단 $(A|B)$ 전체의 집합을 R로 나타내고, R의 원소에 대한 상등, 원소 사이의 덧셈과 곱셈을 적절히 정의하면 R은 완비 순서체의 공리를 모두 만족시킨다.

이 때, 유리 절단인 (2) 형태의 R의 원소는 유리수에 해당하고, 유리 절단이 아닌 (3) 형태의 R의 원소는 무리수에 해당한다.

이와 같이 유일함이 밝혀진 완비순서체를 유리수로부터 직접 구성함으로써 그 존재성도 입증된다.

4.2. 교육과정 및 교과서 내용

4 제곱근과 실수

자동차의 소음은 밤에 더 크게 들린다.

공기 중에서 소리의 속력은 기온에 따라 변한다. 소리는 기온이 높아질수록 속력이 빨라지고, 더운 공기와 찬 공기가 만나면 속력이 느린 찬 공기 쪽으로 진행한다. 낮에는 지표면보다 상공의 기온이 낮으므로 소리는 상공으로 퍼지고, 밤에는 반대로 지표면으로 가라앉는다. 이와 같은 이유 때문에 자동차의 소음은 밤에 더 크게 들린다.

기온이 x℃ 일 때, 소리의 속력은

$$331\sqrt{1+\frac{x}{273}}\ (\mathrm{m/s})$$

라고 한다.

생각해 봅시다

1

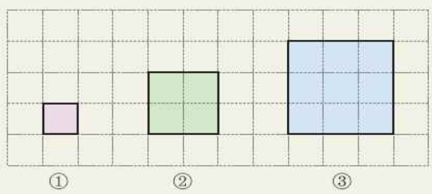
2

① 제곱근의 뜻을 알고, 그 성질을 이해한다.

◦ 제곱근의 뜻을 알고 양수의 제곱근을 구하게 한다.

제곱근의 뜻을 알고 간단한 수의 제곱근을 구하게 한다. 이 때, 넓이가 주어진 정사각형의 한 변의 길이를 구하는 것과 같은 구체적인 예를 활용할 수도 있다. 양수 a의 제곱근에는 양수와 음수 두 개가 있고, 그들은 절댓값이 같고 부호가 서로 반대임을 이해하게 한다. 또, 양수인 것을 양의 제곱근, 음수인 것을 음의 제곱근이라 하고, 이것을 근호를 사용하여 각각 $\sqrt{a}, -\sqrt{a}$와 같이 나타내게 한다. 또, 0의 제곱근은 0 하나뿐임을 알게 하고, 근호 안의 수가 음수인 것은 실수의 범위를 벗어나므로 다루지 않는다.

개 / 념 / 탐 / 구 다음 그림은 한 칸의 가로와 세로의 길이가 1인 모눈종이 위에 세 정사각형을 그린 것이다.



탐구1 다음 표의 빈칸을 알맞게 채워라.

정사각형	①	②	③
한 변의 길이	1		
넓이			

탐구2 넓이가 16인 정사각형의 한 변의 길이를 구하여라.

◦ 제곱근의 성질을 이해하게 한다.

양수의 제곱근은 모두 근호 $\sqrt{\ }$를 써서 나타낼 수 있으나, 특히 제곱수의 제곱근은 근호를 쓰지 않고 나타

낼 수 있음을 알게 한다. $a>0$일 때$(\sqrt{a})^2=a, (-\sqrt{a})^2=a, \sqrt{a^2}=a, \sqrt{(-a)^2}=a$가 성립함을 알고 이를 이용하여 간단한 계산을 하게 한다.

② 무리수의 개념을 이해한다.

◦ 무리수의 존재를 알고 이를 바탕으로 실수를 이해하게 한다.

한 변의 길이가 1인 정사각형의 대각선의 길이와 같이 유리수로는 표현할 수 없는 길이가 있다는 것 등을 이용하여 직관적으로 무리수의 존재를 이해하게 한다. 이를 바탕으로 실수 전체의 집합이 유리수 전체의 집합과 무리수 전체의 집합의 합집합이고, 이들 두 집합에는 공통된 원소가 없음을 이해하게 한다. 유리수는 유한소수와 순환소수로 표현될 수 있음을 바탕으로, 무리수를 소수로 나타내면 순환하지 않는 무한소수가 됨을 알게 한다.

소수점 아래에서 차례대로 1, 01, 001, 0001, 00001, ⋯이 계속되는 소수는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$0.101001000100001000001\cdots$$

❶ 소수점 아래에서 차례대로 765, 765, 765, ⋯가 계속되는 소수를 나타내어 보자.
❷ 같은 방법으로 소수점 아래에서 차례대로 10, 11, 12, 13, 14, 15, ⋯가 계속되는 소수를 나타내어 보자.
❸ 위의 ❶, ❷에서 각각 나타낸 두 수에 순환마디가 있는지 말해 보자.

③ 실수의 대소 관계를 이해한다.

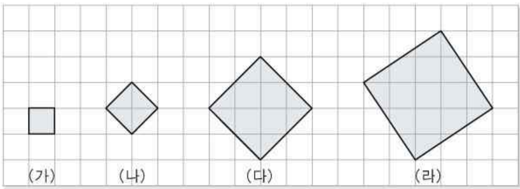
◦ 무리수의 대소를 비교하게 한다.

근호로 나타내어진 두 양수는 근호 안의 수가 클수록 크다는 것을 이해하여, 무리수와 무리수, 무리수와 유리수 사이의 대소를 비교하게 한다.

$a>0,\ b>0$일 때,

ⅰ) $a<b$이면 $\sqrt{a}<\sqrt{b}$ ⅱ) $\sqrt{a}<\sqrt{b}$이면 $a<b$.

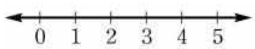
다음 그림은 한 눈금의 길이가 1인 모눈종이 위에 넓이가 서로 다른 정사각형을 그린 것이다.



❶ 다음 빈 칸에 알맞은 수를 써넣어 보자.

정사각형	(가)	(나)	(다)	(라)
정사각형의 넓이	1	2		
한 변의 길이	1			

❷ 위의 그림에 있는 정사각형의 한 변의 길이를 컴퍼스를 이용하여 오른쪽 수직선 위에 옮겨 각각의 길이를 비교해 보자.



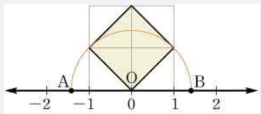
◦ 뺄셈을 이용하여 두 실수의 대소를 비교하게 한다.

$a-b>0$이면 $a>b$이며 그 역도 성립한다는 사실을 알고 이를 이용하여 두 실수의 대소를 비교하게 한다.

◦ 유리수만으로는 수직선을 모두 메울 수 없음을 이해하게 한다.

무리수 $\sqrt{2}$에 대응하는 점을 수직선에 표시해봄으로써 수직선은 유리수 이외의 점들로도 구성되어 있음을 이해하게 한다. 일반적으로, 수직선 위의 점들은 실수의 집합과 일대일대응 관계가 있음을 직관적으로 알게 한다.

오른쪽 그림은 넓이가 2인 정사각형의 한 꼭짓점이 수직선 위의 원점에 오도록 나타낸 것이다. 원점 O를 중심으로 정사각형의 한 변의 길이를 반지름으로 하는 원을 그릴 때, 이 원이 수직선과 만나는 점을 각각 A, B라고 하자.



❶ 두 선분 OA, OB의 길이는 각각 얼마인가?

❷ 두 점 A, B의 좌표를 각각 말해 보자.

5 근호를 포함한 식의 계산

우주 정거장의 중력

우주 공간에서 우주인이 과학 실험 및 관측 활동을 하고 우주선에 연료 보급 등을 하기 위한 기지로 만든 유인 인공위성을 우주 정거장이라고 한다.

우주인이 무중력 상태에서 장기간 활동하면 신체에 이상이 생기기 때문에 편안하고 안전하게 활동하기 위해서는 지구와 같은 중력이 필요하다.

중력을 인공적으로 만드는 방법은 우주 정거장을 일정한 속력으로 회전시키는 것이다. 우주 정거장이 회전하면서 생기는 원의 반지름의 길이를 r m라고 하면 초당 회전 수가 $\dfrac{\sqrt{9.8}}{2\pi\sqrt{r}}$이 되어야 지구의 중력과 같아진다고 한다.

생각해 봅시다

❶

❷

① 근호를 포함한 식의 사칙계산을 할 수 있다.

◦ 제곱근의 성질을 이용하여 제곱근을 포함한 간단한 식의 계산을 하게 한다.

$a>0, b>0$일 때 다음과 같은 제곱근의 성질이 성립함을 알고, 이를 이용하여 간단한 계산을 하게 한다.

i) $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\sqrt{b}$　　ii) $\sqrt{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$　　iii) $\sqrt{a^2b}=a\sqrt{b}$

제곱근의 곱셈에 대하여 다음을 알아보자.

❶ 다음 빈칸에 알맞은 수를 써넣어 보자.

a	b	$\sqrt{a}\sqrt{b}$	$\sqrt{ab}$
4	9		
$\frac{1}{4}$	$\frac{16}{9}$		

❷ 두 양수 a, b에 대하여 $\sqrt{a}\sqrt{b}$와 $\sqrt{ab}$의 관계를 추측해 보자.

◦ 분모의 유리화의 뜻을 알고, 주어진 분수의 분모를 유리화할 수 있게 한다.

분모가 무리수인 분수의 분모를 유리수로 고칠 수 있게 한다. 분모의 유리화에 곱셈공식 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$을 이용하여 계산하게 한다.

$\sqrt{2}$를 1.414라고 할 때, 다음 물음에 답해보자.

탐구 ❶ $\frac{1}{\sqrt{2}}$의 값을 반올림하여 소수 셋째 자리까지 구해보자.

탐구 ❷ $\frac{\sqrt{2}}{2}$의 값을 구하고, 탐구 ❶에서 구한 값과 비교해보자.

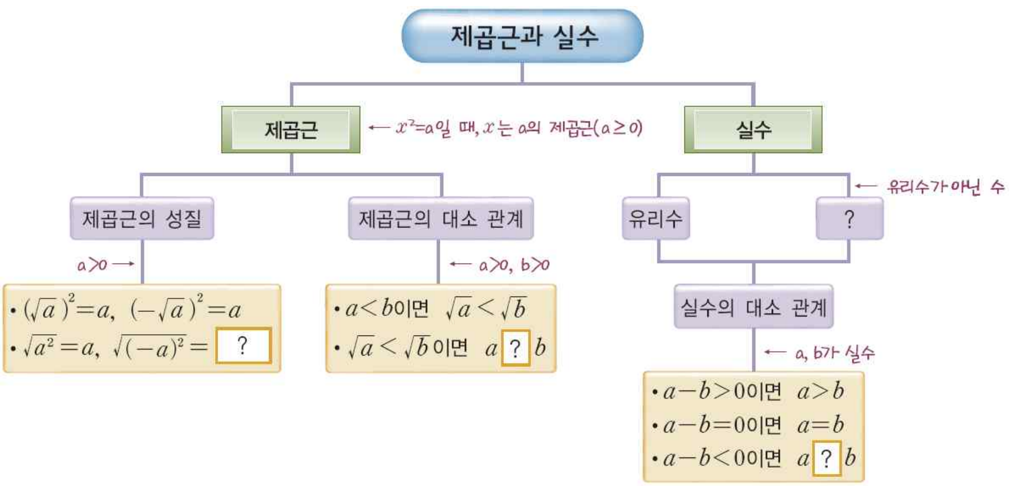
탐구 ③ 위의 두 계산 중 어느 것이 더 간단한지 말하고, 그 이유를 두 분수 $\frac{1}{\sqrt{2}}$과 $\frac{\sqrt{2}}{2}$의 차이점과 관련지어 생각해보자.

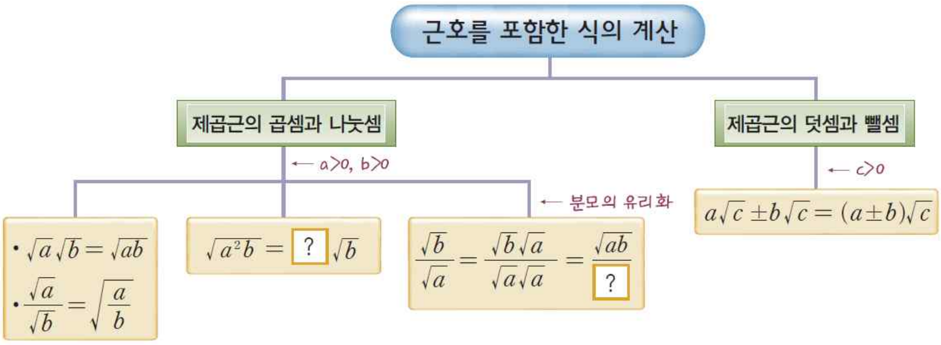
◦ 제곱근을 포함한 식의 사칙계산을 하게 한다.

제곱근의 성질 및 분모의 유리화를 이용하여 제곱근을 포함한 식을 간단히 하게 한다. 제곱근을 포함한 식의 덧셈과 뺄셈에서는 다항식을 간단히 하는 것과 같이, 같은 제곱근을 동류항으로 여기고 계산하게 한다.

◦ 제곱근표나 계산기를 이용하여 제곱근의 근삿값을 구하게 한다.

제곱근표를 보는 방법을 알고 이를 이용하여 제곱근의 근삿값을 구하게 한다. 또, 계산기를 활용하여 제곱근의 근삿값을 구할 수도 있다. 제곱근의 근삿값을 구하는 알고리즘은 다루지 않는다.





복사 용지에 담겨진 수학

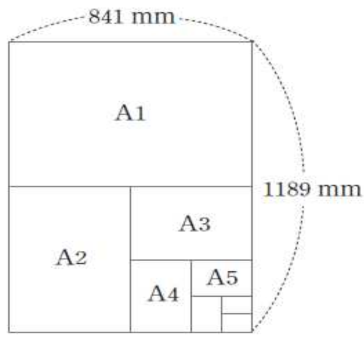
복사 용지나 인쇄 용지로 가장 많이 사용되고 있는 종이는 A4 용지이다. A4용지의 규격은 297 mm × 210 mm이다. 단순하게 300 mm × 200 mm로 정하면 훨씬 편할텐데 왜 이렇게 복잡한 수치로 정했을까?

일상생활에서 사용되는 종이는 제지소에서 만든 큰 규격의 전지를 절반으로 자르는 과정을 반복하여 만들어진다. 그런데 이렇게 절반으로 자르다 보면 가로와 세로의 길이의 비가 달라질 수 있다.

예를 들어 300 mm × 200 mm와 같이 가로와 세로의 길이의 비가 3:2인 종이를 절반으로 자르면 200 mm × 150 mm가 되고 이때의 비는 4:3이 된다. 따라서 일정한 비율을 유지하려면 종이의 일부를 잘라내어야 하는데 이렇게 되면 아까운 종이를 낭비하게 된다.

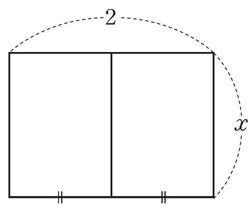
독일 공업 규격 위원회(Deutsche Industrie Normen)는 이와 같은 낭비를 줄이기 위해서 계속 절반으로 잘라도 가로와 세로의 길이의 비가 같은, 즉 서로 닮음인 직사각형이 되도록 용지의 규격을 정하였다.

이러한 성질을 만족하는 용지로 보통 A 시리즈와 B 시리즈를 사용하는데 A 시리즈는 크기가 1189 mm × 841 mm인 A0 전지를 계속 반으로 잘라서 만든 것이고, B 시리즈는 A0와 서로 닮음이고 넓이는 1.5배인 B0 전지를 계속 반으로 잘라서 만든 것이다.



(참고 자료: 허민, "과학동아", 동아사이언스, 1999)

1. 오른쪽 그림과 같이 가로, 세로의 길이가 각각 2, x인 직사각형이 위의 밑줄 친 내용과 같은 성질을 가졌다고 할 때, x의 값을 구하여라.

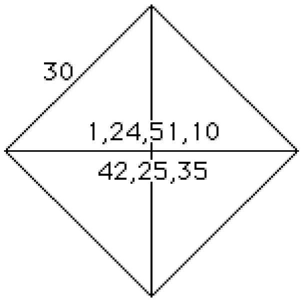


2. A4용지와 다음 두 용지의 세로의 길이의 비를 구하여라.

(1) A3　　(2) B5

YBC 7289에 새겨진 숫자의 비밀

고대 바빌로니아 시대에 만들어진 점토판 중에서 YBC 7289라는 이름이 붙여진 점토판에는 정사각형 그림과 함께 이 정사각형의 한 변과 대각선을 따라 세 무리의 숫자가 적혀 있는데, 이것을 오늘날 우리가 쓰는 숫자로 바꾸면 다음 그림과 같다



위 그림에서 30과 (42, 25, 35)는 각각 정사각형의 한 변의 길이와 대각선의 길이를 나타낸다. 또, 위의 그림에서 (42, 25, 35)와 (1, 24, 51, 10)은 오늘날 우리가 쓰는 숫자로 각각 다음을 의미한다.

$$(42,25,35)=42+\frac{25}{60}+\frac{35}{60^2}$$

$$(1,24,51,10)=1+\frac{24}{60}+\frac{51}{60^2}+\frac{10}{60^3}$$

[수행 과제]

(1) $30\times(1,24,51,10)$을 오늘날 우리가 쓰는 숫자로 나타내고, (42, 25, 35)와 비교해보자.

(2) (1)의 결과를 이용하여 위의 정사각형에서 (1, 24, 51, 10)이 무엇을 의미하는지 말해보자.

(3) 계산기를 이용하여 (1, 24, 51, 10)의 값을 계산하고, 이로부터 어떤 사실을 알 수 있는지 말해보자.

카메라의 조리개와 $\sqrt{2}$

사진을 찍을 때, 적절하게 빛의 양을 조절하지 못하면 사진을 현상했을 때, 어둡거나 너무 밝게 나오게 된다.

카메라에서 조리개는 렌즈를 통과하는 빛의 양을 조절하는 장치이다.

사진을 찍을 때 카메라 렌즈의 조리개 지름을 변화시켜 렌즈로 들어오는 빛의 양을 조절할 수 있다.

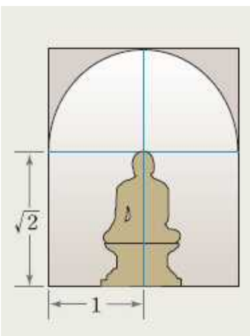
카메라 렌즈를 보면 1.4, 2, 2.8, 4, 5.6, 8, 11, 16, 22 등과 같은 숫자들이 쓰여 있는 것을 발견할 수 있는데, 이 숫자들을 조리개 수치라고 한다. 조리개 수치가 한 단계 작아지면 렌즈로 들어오는 빛의 양은 2배가 된다.

빛이 들어오는 양은 조리개의 구멍의 넓이에 비례하므로 빛이 들어오는 양을 2배로 늘리려면 조리개 구멍의 넓이를 2배로 늘이면 된다. 이때 넓이의 비가 $1:2$이면 조리개 구멍의 반지름의 길이의 비는 $1:\sqrt{2}$가 되어야 하므로 빛이 들어오는 양을 2배로 하려면 조리개 구멍의 반지름의 길이는 처음의 $\sqrt{2}$배가 되어야 한다.

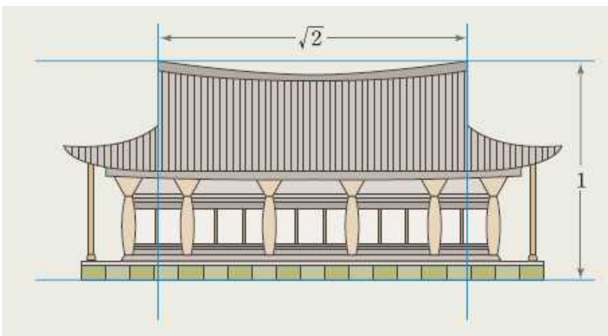
금강비례와 $\sqrt{2}$

우리의 문화유산 속에는 $1:\sqrt{2}$의 비율로 만들어져 조화롭고 아름답게 느껴지는 것이 많이 있다. 이 비례를 금강석(다이아몬드)과 같이 아름다운 비례라고 하여 금강 비례라고 부른다.

금강 비례는 우리나라의 고대 건축물에서 종종 발견할 수 있다. 예를 들어 신라 경덕왕 때 세워진 경주 석굴암 내부에 있는 본존불의 높이는 한 변의 길이가 석실을 이루는 원의 반지름의 길이와 같은 정사각형의 대각선의 길이 즉, 석실을 이루는 원의 반지름의 길이의 $\sqrt{2}$배와 같다. 또, 우리나라에서 가장 오래된 목조 건물로 알려진 부석사 무량수전에서도 세로와 가로의 길이의 비가 $1:\sqrt{2}$인 직사각형을 찾아볼 수 있다.



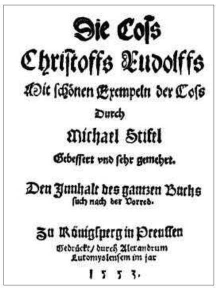
석굴암의 금강 비례



무량수전의 금강 비례

4.3. 교수학습 참고자료

제곱근을 나타내는 기호 $\sqrt{\ }$ 의 기원


Die Coss
Christoffs Rudolffs
Die schönen Exempeln der Coss
Durch
Michael Stifel
Gebessert vnd sehr gemehrt.
Den Innhalt des gantzen Buchs
such nach der Vorred.
Zu Königsperg in Preussen
Gedrückt/ durch Alexandrum
Lutomyslensem im jar
1553.

제곱근을 나타내는 기호 $\sqrt{\ }$ 는 뿌리를 뜻하는 라틴어 radix의 첫 글자인 r을 변형하여 만든 것으로 추정된다. 독일의 수학자 루돌프(Christoph Rudolff, 1499~1545)가 그의 저서 「Die Coss」의 1525년 판에서 기호 √ 를 처음 사용하였고, 그 후 프랑스의 수학자 데카르트가 √ 에 가로줄을 그어 사용함으로써 오늘날 사용하는 기호인 $\sqrt{\ }$ 가 만들어졌다.

길이가 $\sqrt{a}$ 인 선분의 작도

길이가 1인 선분과 길이가 a인 선분을 이용하면 길이가 $\sqrt{a}$ 인 선분을 다음과 같이 작도할 수 있다.

(1) 길이가 1인 선분 AB와 a인 선분 BC를 이어 길이가 $(a+1)$인 선분 AC를 작도한다.

(2) 지름이 AC인 반원을 작도한다.

(3) 점 B를 지나면서 선분 AC와 수직인 직선과 (2)에서 작도한 반원이 만나는 점을 작도하고, 이를 D라 한다.

(4) 점 B와 점 D를 잇는 선분 BD를 작도한다.

위 과정을 통해 작도된 선분 BD의 길이가 $\sqrt{a}$ 임을 설명해보자.

음수의 제곱근

수의 범위를 복소수로 확장하면 음수의 제곱근도 생각할 수 있다. 예를 들어 음수 -1의 제곱근은 제곱해서 -1이 되는 수로서 양수일 때와 마찬가지로 두 개 존재한다. 그 중 하나를 $\sqrt{-1}$ 로 나타내면, 나머지 하나는 $-\sqrt{-1}$ 로 나타낼 수 있다. 통상 $\sqrt{-1}$ 을 i로 나타내고, $-\sqrt{-1}$ 은 $-i$로 나타낸다. 이때 i 앞에 붙은 '–'는 '음수'를 나타내는 것이 아니라 '반대'를 나타낸다. 즉, 이 수들은 각각 좌표평면에서 좌표가 (0, 1)인 점과 (0, –1)인 점으로서 서로 원점에 대하여 대칭이고, 각각 좌표가 (1, 0)인 점과 (–1, 0)인 점을 원점을 중심으로 90° 회전시킨 점이다.

일반적으로 양수 a에 대하여 $\sqrt{-a}$ 와 $-\sqrt{-a}$ 는 통상 $\sqrt{a}\,i$와 $-\sqrt{a}\,i$로 나타내고, 좌표평면에서 좌표가 각각 (0, $\sqrt{a}$)와 (0, $-\sqrt{a}$)인 점을 나타내며, 이들 점은 각각 좌표가 ($\sqrt{a}$, 0)와 ($-\sqrt{a}$, 0)인 점을 원점을 중심으로 90° 회전시킨 점이다.

음수의 제곱근의 성질 – $a \le 0$일 때 제곱근의 성질은?

$a > 0$일 때, 다음이 성립한다.

① $(\sqrt{a})^2 = a$, $(-\sqrt{a})^2 = a$

② $\sqrt{a^2} = a$, $\sqrt{(-a)^2} = a$

그렇다면 $a = 0$이거나 $a < 0$일 때에도 위의 성질이 모두 성립할까?

(1) $a = 0$일 경우, 위의 성질이 모두 성립한다.

① $(\sqrt{0})^2 = 0$, $(-\sqrt{0})^2 = 0$

② $\sqrt{0^2} = 0$, $\sqrt{(-0)^2} = 0$

(2) $a < 0$일 경우

앞에서 살펴본 음수의 제곱근의 정의에 의해 ①은 성립하지만, ②는 성립하지 않는다. 즉, 다음이 성립한다.

① $(\sqrt{a})^2 = a$, $(-\sqrt{a})^2 = a$

② $\sqrt{a^2} = -a$, $\sqrt{(-a)^2} = -a$

결국 임의의 실수 a에 대하여 다음이 성립한다.

① $(\sqrt{a})^2 = a$, $(-\sqrt{a})^2 = a$

② $\sqrt{a^2} = |a|$, $\sqrt{(-a)^2} = |a|$

몇 가지 증명 – $\sqrt{2}$ 는 유리수가 아니다.

증명 1. 아리스토텔레스의 증명으로 널리 알려진 증명.

$\sqrt{2}$ 를 유리수라고 가정하면, $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$(p,q는 서로소인 자연수)로 나타낼 수 있다. $2q^2 = p^2$이므로 p^2은 짝수이고 p도 짝수이다. $p = 2p_1$이라고 하면 $2q^2 = p^2 = (2p_1)^2 = 4p_1^2$, 즉 $q^2 = 2p_1^2$이므로 q도 짝수이다. 그러므로 p와 q 모두 짝수이다. 이것은 p와 q가 서로소라는 가정에 모순이다. 따라서 $\sqrt{2}$ 는 유리수가 아니다.

증명 2. 1955년에 발표된 증명(Halfar,1955)

$\sqrt{2}$ 를 유리수라고 가정하면, $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$(p,q는 자연수이고, q는 이런 자연수 중에서 가장 작은 수)로 나타낼 수 있다. . $p > q$이므로, $p = q + n$ 자연수 n이 존재한다. $2q^2 = p^2 = (q+n)^2 = q^2 + 2qn + n^2$이므로, $q^2 = 2qn + n^2$이다. 따라서 $q > n$이다. 같은 방법으로 $q = n + m$ 즉, $p = 2n + m$인 자연수 m이 존재하고, $2(n+m)^2 = 2q^2 = p^2 = (2n+m)^2$이 성립하므로 $m^2 = 2n^2$이다. 즉, $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$이다. 그런데 $n < q$이므로, 이것은 q가 가장 작은 자연수라는 가정에 모순이다. 따라서 $\sqrt{2}$ 는 유리수가 아니다.

Halfar,E.(1955). The irrationality of $\sqrt{2}$. American Mathematical Monthly. vol.62. p.437.

증명 3. 1991년에 발표된 증명(Gentile, 1991)

$\sqrt{2}$ 를 유리수라고 가정하면, $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$(p,q는 서로소인 자연수)로 나타낼 수 있다. $2q^2 = p^2$이므로 $p^2+q^2=3q^2$이다. $3q^2$이 3의 배수이므로 p^2+q^2 역시 3의 배수이다. 따라서 p와 q는 모두 3의 배수이다. 그러나 이것은 p와 q가 서로소라는 가정에 모순이다. 따라서 $\sqrt{2}$ 는 유리수가 아니다

Gentile, E.R.(1991). Another proof of the irrationality of $\sqrt{2}$. The College Mathematics Journal 22(2).

좀 더 일반적인 증명 – $\sqrt{2}$ 는 유리수가 아니다.

다음의 두 증명은 제곱수가 아닌 자연수 n에 대하여 $\sqrt{n}$이 유리수가 아님을 증명할 때도 적용할 수 있는 보다 일반적인 증명이다.

증명 4. 산술의 기본 정리를 이용한 증명

$\sqrt{2}$ 를 유리수라고 가정하면, $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$(p,q는 서로소인 자연수)로 나타낼 수 있다. $2q^2 = p^2$ 이므로, 우변 p^2을 소인수분해 하면 모든 소인수들이 짝수 번 나타나지만, 좌변 $2q^2$ 을 소인수분해 하면 소인수 2가 홀수 번 나타난다. 이것은 산술의 기본 정리에 모순이다. 따라서 $\sqrt{2}$ 는 유리수가 아니다.

증명 5. $\sqrt{2}$ 의 정수 부분과 소수 부분을 이용한 증명

$\sqrt{2}$ 를 유리수라고 가정하면, $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$(p, q는 자연수이고, q는 이런 자연수 중에서 가장 작은 수)로 나타낼 수 있고 다음이 성립한다.

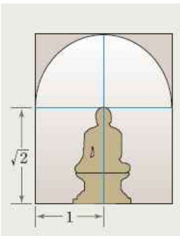
$$\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}-1}=\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}=\frac{2-\frac{p}{q}}{\frac{p}{q}-1}=\frac{2q-p}{p-q}$$

$1<\frac{p}{q}<2$ 이므로, $p-q$와 $2q-p$는 모두 자연수이고 $p-q<q$이다. 이것은 q가 가장 작은 자연수라는 가정에 모순이다. 따라서 $\sqrt{2}$ 는 유리수가 아니다.

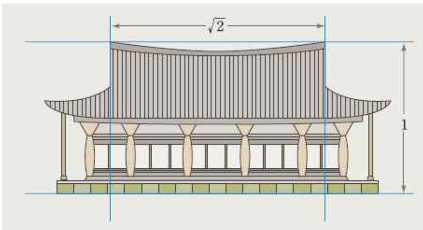
금강 비례

우리의 문화유산 속에는 $1:\sqrt{2}$ 의 비율로 만들어져 조화롭고 아름답게 느껴지는 것이 많이 있다. 이 비례를 금강석(다이아몬드)과 같이 아름다운 비례라고 하여 금강 비례라고 부른다.

금강 비례는 우리나라의 고대 건축물에서 종종 발견할 수 있다. 예를 들어 신라 경덕왕 때 세워진 경주 석굴암 내부에 있는 본존불의 높이는 한 변의 길이가 석실을 이루는 원의 반지름의 길이와 같은 정사각형의 대각선의 길이 즉, 석실을 이루는 원의 반지름의 길이의 $\sqrt{2}$ 배와 같다. 또, 우리나라에서 가장 오래된 목조 건물로 알려진 부석사 무량수전에서도 세로와 가로의 길이의 비가 $1:\sqrt{2}$ 인 직사각형을 찾아볼 수 있다.



석굴암의 금강 비례



무량수전의 금강 비례

무리수(無理數)와 무비수(無比數)

유리수(有理數)는 영어 'rational number'를 번역한 것으로 '비(比로) 나타낼 수 있는 수'라는 의미가 있고, 이런 점에서 유리수를 유비수(有比數)라 번역하기도 한다(수학 2 지도서 12쪽 참고). 즉, 유리수(혹은 유비수)는 두 정수의 비로 나타낼 수 있는 수를 의미한다.

이와 같은 맥락에서 두 정수의 비로 나타낼 수 없는 수를 'irrational number'라 하는데, 우리는 이를 통상 무리수(無理數)라 부르고, 유비수(有比數)와 같은 이유에서 무비수(無比數)라 번역하기도 한다.

결국 '유리수(有理數)'와 '무리수(無理數)'는 각각 rational과 irrational의 사전적 의미인 '합리적인, 이성적인'과 '불합리한, 비이성적인'에 해당하는 용어이고, '유비수(有比數)'와 '무비수(無比數)'는 각각 비(比를) 뜻하는 명사 'ratio'의 형용사형과 그 반대어에 해당하는 용어임을 알 수 있다.

$a<0$ 또는 $b<0$일 때, 제곱근의 곱셈(1)

$a\geq 0$이고 $b\geq 0$일 때, 다음이 성립한다.

$$\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$$

그렇다면 $a<0$ 또는 $b<0$일 때에도 위의 등식이 성립할까?

(1) $a>0$이고 $b<0$인 경우

$$\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{a}\sqrt{-(-b)}=\sqrt{a}\sqrt{-b}\,i=\sqrt{(-ab)}\,i$$

$\sqrt{ab} = \sqrt{-(-ab)} = \sqrt{(-ab)}\,i$

따라서 $\sqrt{a}\,\sqrt{b} = \sqrt{ab}$ 가 성립한다.

(2) $a < 0$이고 $b > 0$인 경우

위의 (1)과 마찬가지로 $\sqrt{a}\,\sqrt{b} = \sqrt{ab}$ 가 성립한다.

(3) $a < 0$이고 $b < 0$인 경우

$$\begin{aligned}\sqrt{a}\,\sqrt{b} &= \sqrt{-(-a)}\,\sqrt{-(-b)} = i\sqrt{(-a)} \times i\sqrt{(-b)} \\ &= i^2\sqrt{(-a)(-b)} = -\sqrt{ab}\end{aligned}$$

따라서 $\sqrt{a}\,\sqrt{b} = -\sqrt{ab}$ 가 성립한다.

결국 등식 $\sqrt{a}\,\sqrt{b} = \sqrt{ab}$ 는 a와 b가 둘 다 음수인 경우를 제외하고는 항상 성립함을 알 수 있다.

$a < 0$ 또는 $b < 0$일 때, 제곱근의 곱셈(2)

$a \geq 0$이고 $b \geq 0$일 때, 다음이 성립한다.

$$\sqrt{a^2 b} = a\sqrt{b}$$

그렇다면 $a < 0$ 또는 $b < 0$일 때에도 위의 등식이 성립할까?

(1) $a > 0$이고 $b < 0$인 경우

$\sqrt{a^2 b} = \sqrt{(a^2(-(-b))} = \sqrt{a^2}\,\sqrt{-(-b)} = a\sqrt{-b}\,i$

$a\sqrt{b} = a\sqrt{-(-b)} = a\sqrt{-b}\,i$

따라서 $\sqrt{a^2 b} = a\sqrt{b}$ 이 성립한다.

(2) $a < 0$이고 $b > 0$인 경우

$\sqrt{a^2 b} = \sqrt{(-a)^2 b} = -a\sqrt{b}$

따라서 $\sqrt{a^2 b} = a\sqrt{b}$ 이 성립하지 않는다.

(3) $a < 0$이고 $b < 0$인 경우

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2 b} &= \sqrt{(-a)^2 \times (-(-b))} = \sqrt{(-a)^2}\,\sqrt{-(-b)} \\ &= -a\sqrt{-b}\,i\end{aligned}$$

따라서 $\sqrt{a^2 b} = a\sqrt{b}$ 이 성립하지 않는다.

결국 등식 $\sqrt{a^2 b} = a\sqrt{b}$ 는 a가 0 이상일 때에만 성립하고, a가 음수일 때는 성립하지 않음을 알 수 있다.

$a < 0$ 또는 $b < 0$일 때, 제곱근의 나눗셈

$a \geq 0$이고 $b > 0$일 때, 다음이 성립한다.

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

그렇다면 $a < 0$ 또는 $b < 0$일 때에도 위의 등식이 성립할까?

(1) $a > 0$이고 $b < 0$인 경우

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{-(-b)}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{-b}\,i} = -\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{-b}}\,i = -\sqrt{-\frac{a}{b}}\,i$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\sqrt{-\left(-\frac{a}{b}\right)}=\sqrt{-\frac{a}{b}}\,i$$

따라서 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\frac{a}{b}}$ 이다.

(2) $a<0$이고 $b>0$인 경우

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{-(-a)}}{\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{-a}\,i}{\sqrt{b}}=\sqrt{-\frac{a}{b}}\,i=\sqrt{-\left(-\frac{a}{b}\right)}=\sqrt{\frac{a}{b}}$$

따라서 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$ 이 성립한다.

(3) $a<0$이고 $b<0$인 경우

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{-(-a)}}{\sqrt{-(-b)}}=\frac{\sqrt{-a}\,i}{\sqrt{-b}\,i}=-\frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}}=-\sqrt{\frac{-a}{-b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$$

따라서 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$ 이 성립한다.

결국 등식 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$ 는 $a>0$이고 $b<0$인 경우를 제외하고 항상 성립함을 알 수 있다.

제곱근의 어림값을 구하는 다른 방법

고대 바빌로니아인들은 이미 오래 전에 제곱근의 어림값을 구하는 방법을 알고 있었던 것으로 추정된다. 예를 들어 예일대학교에 소장되어 있는 점토판 YBC7289에는 다음과 같은 $\sqrt{2}$ 의 어림값이 쐐기문자로 새겨져 있다.

$$1+\frac{24}{60}+\frac{51}{60^2}+\frac{10}{60^3}=1.41421296296296\cdots$$

또한, 이들은 $\sqrt{2}$ 과 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 의 어림값으로 $\frac{17}{12}$ 과 $\frac{12}{17}$ 을 각각 사용한 것으로 알려져 있는데, 이 값은 아마도 다음과 같은 근사 공식을 이용하여 얻었으리라 추정된다.

$$\sqrt{a^2+h}\approx a+\frac{h}{2a}$$

위의 식의 a와 h에 적당한 수를 대입하면, 주어진 제곱근의 참값보다 큰 어림값을 얻을 수 있다. 예를 들어 위의 식에 $a=1$과 $h=1$을 대입하면 $\sqrt{2}$ 의 어림값으로 $\frac{3}{2}$ 을 얻고, $a=\frac{4}{3}$ 와 $h=\frac{2}{9}$ 를 대입하면 $\sqrt{2}$ 의 어림값으로 $\frac{17}{12}$ 를 얻을 수 있다. a의 값은 크고 h의 값은 작을수록 보다 정확한 어림값을 얻을 수 있다.

Q($\sqrt{2}$)와 제곱근의 덧셈

집합 $\mathrm{Q}(\sqrt{2})=\{a+b\sqrt{2}\mid a,b\in\mathrm{Q}\}$에서 임의의 두 원소 $a+b\sqrt{2}$ 와 $c+d\sqrt{2}$ 의 덧셈과 곱셈은 각각 다음과 같이 정의한다.

$$(a+b\sqrt{2})+(c+d\sqrt{2})=(a+c)+(b+d)\sqrt{2}$$

$$(a+b\sqrt{2})\times(c+d\sqrt{2})=(ac+2bd)+(ad+bc)\sqrt{2}$$

이와 같이 덧셈과 곱셈이 정의된 집합 $\mathrm{Q}(\sqrt{2})$는 유리수체를 포함하고 실수체에 포함되는 이차체(quadratic field)로서, 유리수 집합 Q와 $\sqrt{2}$ 를 포함하는 가장 작은 체이다.

한편, $\mathrm{Q}(\sqrt{2})$는 차원이 2인 유리수체 Q 위의 벡터공간이기도 하다. 이때 벡터공간 $\mathrm{Q}(\sqrt{2})$의 기저를 $\{1,\sqrt{2}\}$라 하면, $\mathrm{Q}(\sqrt{2})$의 모든 원소는 1과 $\sqrt{2}$ 의 일차결합으로 유일하게 나타낼 수 있다. 이런 점에서 두 벡터 $a+b\sqrt{2}$ 와

$c+d\sqrt{2}$ 의 덧셈은 벡터 $(a+b\sqrt{2})+(c+d\sqrt{2})$를 1과 $\sqrt{2}$ 의 일차결합인 $(a+c)+(b+d)\sqrt{2}$ 으로 나타낸 것이다.

$\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{a+b}$ 와 $\sqrt{a}-\sqrt{b}=\sqrt{a-b}$

$a \ge 0$이고 $b \ge 0$일 때, 다음 두 식은 항상 성립한다.

$$\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab},\quad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$$

그러나 다음 두 식은 일반적으로 성립하지 않는다.

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{a+b},\quad \sqrt{a}-\sqrt{b}=\sqrt{a-b}$$

위의 두 등식 중에서 $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{a+b}$는 $ab=0$일 때, 즉 a 또는 b가 0일 때에 성립하고, $\sqrt{a}-\sqrt{b}=\sqrt{a-b}$는 $a=b$ 또는 $b=0$일 때 성립한다.
실제로 $a>b>0$일 때, 다음이 성립한다.

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{a+b},\quad \sqrt{a}-\sqrt{b}<\sqrt{a-b}$$

두 수의 크기를 비교하는 다른 방법 - 두 수의 제곱의 뺄셈

$a>0$이고 $b>0$일 때, $a<b$이면 $\sqrt{a}<\sqrt{b}$이므로 다음이 성립한다.

$$a^2<b^2\text{이면 } \sqrt{a^2}<\sqrt{b^2}\text{이다.}$$

여기서 a^2의 양의 제곱근이 a이고, b^2의 양의 제곱근이 b이므로 다음이 성립한다.

$$a^2<b^2\text{이면 } a<b\text{이다.}$$

이를 이용하여 두 수의 대소를 비교할 수 있다. 예를 들어, 두 수 3과 $\sqrt{2}+\sqrt{3}$의 크기를 비교해보자.
$3^2=9$이고 $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2=5+2\sqrt{6}$이므로 다음의 성립한다.

$$3^2-(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2=4-2\sqrt{6}=\sqrt{16}-\sqrt{24}<0$$

즉, $3^2<(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2$이다. 따라서 $3<\sqrt{2}+\sqrt{3}$

[주의] "$a^2<b^2$이면 $a<b$이다."는 두 수 a와 b의 부호가 다를 때에는 성립하지 않는다. 또, a와 b가 둘 다 음수인 경우에는 $a^2<b^2$이면 $a>b$임에 유의한다.

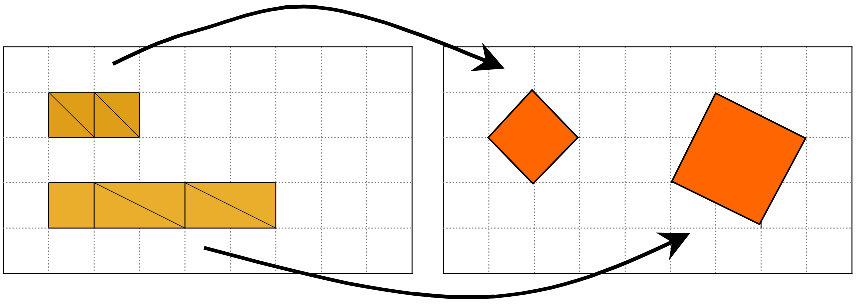
분모의 유리화는 항상 가능한가?

앞의 26쪽에서 Q$(\sqrt{2})$가 체라고 했다. 체에서는 덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈이 항상 가능하다. 그런데 Q$(\sqrt{2})$에서 나눗셈이 항상 가능하다는 것은 Q$(\sqrt{2})$의 0이 아닌 임의의 원소 $a+b\sqrt{2}$ 의 곱셈에 대한 역원, 즉 $\dfrac{1}{a+b\sqrt{2}}$ 이 Q$(\sqrt{2})$의 원소라는 것이다. 또, $\dfrac{1}{a+b\sqrt{2}}$ 이 Q$(\sqrt{2})$의 원소라는 것은 Q$(\sqrt{2})$에서 $\dfrac{1}{a+b\sqrt{2}}$ 의 분모의 유리화가 가능하다는 것을 의미한다. 따라서 분모가 체 Q$(\sqrt{2})$의 원소인 $a+b\sqrt{2}$ 로 주어진 분수는 Q$(\sqrt{2})$에서 분모의 유리화가 항상 가능하다.

한 변의 길이가 무리수인 정사각형 만들기

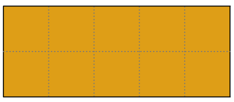
가로와 세로의 길이가 2와 1인 직사각형과 5와 1인 직사각형을 각각 몇 개의 조각으로 오려 붙여 한 변의 길이가 $\sqrt{2}$ 인 정사각형과 $\sqrt{5}$ 인 정사각형을 만들 수 있다.

$$\sqrt{2} = \sqrt{0 + 4\times 0.5}$$

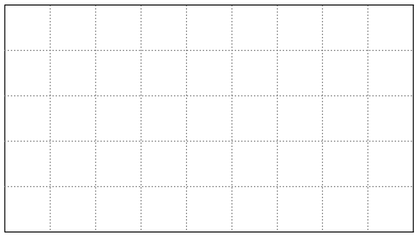


$$\sqrt{5} = \sqrt{1^2 + 4\times 1}$$

(1) 가로와 세로의 길이가 5와 2인 직사각형을 몇 개의 조각으로 오려붙여 한 변의 길이가 $\sqrt{10}$ 인 정사각형을 만들어 보고, 그 정사각형을 아래 모눈종이에 그려보아라.

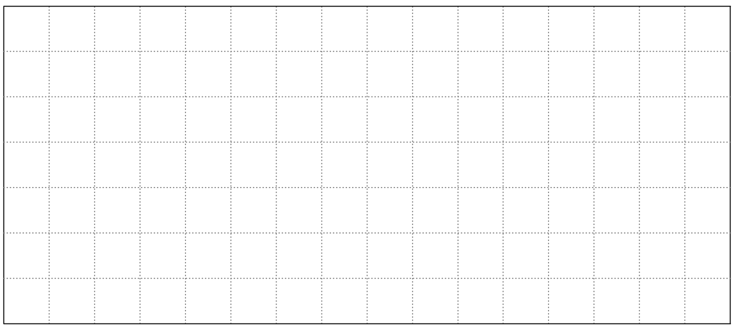


$$\sqrt{10} = \sqrt{2^2 + 4\times 1.5}$$



(2) 다음 식을 이용하여 한 변의 길이가 $\sqrt{17}$ 인 정사각형과 한 변의 길이가 $\sqrt{26}$ 인 정사각형을 아래 모눈종이에 그려보아라.

$$\sqrt{17} = \sqrt{3^2 + 4\times 2}, \qquad \sqrt{26} = \sqrt{4^2 + 4\times 2.5}$$



5. 선생님, 질문 있어요. - 수와 연산

1. 가장 큰 자연수의 모임은 집합인가 아닌가? 집합이면 어떤 집합인지 말하고, 집합이 아니면 왜 집합이 아닌지 설명하시오.

2. 명제 “가장 큰 자연수는 1이다.”에 대한 아래의 증명에 대한 자신의 생각을 쓰시오.
[증명] 가장 큰 자연수를 n 이라고 하면, $n^2 \geq n$ 이고, n 이 가장 큰 자연수이므로 자연수 n^2 은 n 보다 클 수 없다. 즉, $n^2 = n$ 이다. 따라서 $n = 1$ 이다.

3. 소수(prime number)의 뜻(정의)을 말해 보시오. 그리고 1은 소수인지 합성수인지 말하시오.

4. 나눗셈과 0
(1) 0/1, 1/0, 0/0 의 각각의 값은?

(2) 1:2 = 0:x 를 만족하는 x의 값은??

5. 음수(정수)의 연산
(1) (+2) - (+3) = -1, (+2)-(-3) = +5 임을 설명하시오.

(2) $(-1)\times(-1) = (+1)$ 임을 설명하시오.

6. 중학교 1학년에서 유리수를 “(양의) 분수에 부호를 붙인 수”로 도입(정의)하는 것과 “분모, 분자가 정수인 분수로 나타낼 수 있는 수”로 도입(정의)하는 것의 차이에 대하여 생각해보시오.

7. 중학교 2학년에서 명제 “모든 유리수는 순환소수로 나타낼 수 있다.”에 대한 자신의 생각을 쓰시오. 그리고 교과서에서는 이에 관한 내용을 어떻게 다루고 있는지 조사하시오.

8. 다음 두 견해에 대한 자신의 생각을 말하시오. “수의 분류”와 “수의 (십진) 소수표현”

(1) $0.999\cdots$ 은 1과 같다. 그러므로 1은 순환소수이다.

(2) $0.999\cdots$ 은 1에 무한히 가까이 가지만 1과 같지는 않다. 그러므로 1은 순환소수가 아니다.

9. 명제 “무리수는 분수로 나타낼 수 있다.”에 대한 자신의 생각을 쓰시오.

10. $\sqrt{2}$ 가 유리수가 아님을 증명하시오. 교과서에 제시된 방법의 다른 증명법을 생각하거나 찾아 보시오.

11. "$i\,(=\sqrt{-1}\,)$는 무리수이다."를 주장하는 어떤 학생의 증명이다. 자신을 이 학생의 수학선생님이라고 가정하고 이 학생의 질문에 답해 보아라.

선생님, 저는

12. 명제 "π 는 무리수이다."을 증명하시오.

13. 명제 "e 는 무리수이다."을 증명하시오.

14. 항등원의 정의

(1) 임의의 a에 대하여 a*e = a 를 만족하는 e는 연산 *에 대한 항등원인가? 즉, a*e = a이면 e*a = a인가?

(2) 항등원은 연산 *에 대하여 교환법칙이 성립할 때에만 존재하는가?

(3) a*x = a인 x는 a의 역원인가? 즉, a*x=a 이면 x*a=a인가?

15. i^i 는 어떤 수인가?

16. 복소수에서 대소관계나 순서관계를 정의할 수 있는가? 대소관계와 순서관계는 어떤 차이가 있는가? 실수에서의 대소관계를 일반화한 형태의 순서관계가 복소수에서 정의가능한가? 덧셈과 곱셈에 대해서 성립하는 실수의 대소관계가 복소수에서도 성립하는가? 이를테면 큰것끼리 더한 것은 작은것끼리 더한 것보다 크다, 혹은 큰 것 끼리 곱한 것은 작은 것끼리 곱한 것보다 크다.

17. $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$ 이기 위한 필요충분조건은?

18. 다음 등식에 대한 자신의 생각을 쓰시오.
$2=\sqrt{2}\times\sqrt{2}=\sqrt{2\times2}=\sqrt{4}=\sqrt{(-2)\times(-2)}=\sqrt{-2}\times\sqrt{-2}=-2$