4. 미지수가 2개인 연립일차방정식

4.1. 이론적 배경

(1) 구장산술과 연립일차방정식

(가) 방정식의 어원

‘방정’은 동아시아의 전통 수학인 산학에 등장한다. 산학의 고전 ‘구장산술(九章算術)’은 9개의 장으로 이루어져 있는데, 제 8장의 제목이 ‘방정(方程)’이다. 중국의 수학자 이선란(李善蘭, 1811~1882)은 서양의 수학·과학책을 다수 중국어로 번역했는데, ‘equation’을 번역하기 위해 ‘방정’을 이용해서 ‘방정식’이란 말을 만들었다.

그러나 ‘방정’의 실제 뜻은 ‘수들을 네모 모양으로 늘어놓고 계산하는 것’이다.

$$\begin{cases} 4x+5y+6z=1219 \\ 5x+6y+4z=1268 \\ 6x+4y+5z=1263 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 5 & 4 \\ 4 & 6 & 5 \\ 5 & 4 & 6 \\ 1263 & 1268 & 1219 \end{pmatrix}$$

이렇게 수들을 배열한 다음에 한 열에 있는 모든 수에 같은 수를 곱하거나 한 열에서 다른 열을 대응하는 수끼리 빼는 과정을 반복해서 답을 얻었다. 이런 계산 과정에서 음수가 출현할 수 밖에 없었고 실제로 구장산술에서는 방정(方程)을 ‘이것으로 양수와 음수가 뒤섞인 것을 다룬다’고 말하고 있다.

(나) 구장산술에서 다루는 연립일차방정식

제 8장 방정에서는 오늘날의 미지수가 3개인 연립일차방정식과 같은 것을 다루고 있으며, 오늘날과 거의 같은 해법으로 풀고 있다.

대부분의 내용이 토지 측량, 조세, 부역 등과 관련한 실생활 문제로 지금의 방정식의 활용에나 나올 법한 문제들로 구성되어 있다. 제 7장은 ‘영부족(盈不足)장’으로 과부족 셈, 이원 일차 연립 방정식의 산술적 해법을 소개하고 있다.

제 8장의 ‘방정’에는 다음과 같은 미지수가 2개인 문제가 있다.

> “소 5마리와 양 2마리의 값은 금 10냥이고, 소 2마리와 양 5마리의 값은 금 8냥이다. 소와 양 1마리의 값은 각각 얼마인가?”

미지수가 3개인 연립 방정식의 경우도 풀고 있는데 예를 들면 다음과 같은 문제이다.

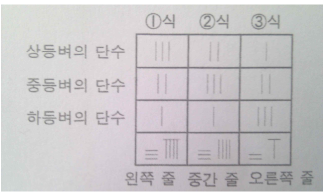
> “상등벼 3단 중등벼 2단 하등벼 1단에서 벼가 39말이 나고, 상등벼 2단 중등벼 3단 하등벼 1단에서 벼가 34말이 나며, 상등벼 1단 중등벼 2단 하등벼 3안에서 벼가 26말이 난다. 각 등급의 벼 1단에서는 벼가 몇 말이 나는가?”

이 문제를 풀려면 미지수를 정해야 한다. 상등벼, 중등벼, 하등벼 1단에서 각각 나오는 벼의 말 수를 x, y, z라 하면 다음과 같은 연립방정식을 얻는다.

$$\begin{cases} 3x+2y+z=39 \\ 2x+3y+z=34 \\ x+2y+3z=26 \end{cases}$$

물론 이 문제는 가감법이나 대입법으로 풀면 미지수 x, y, z의 값이 나온다. 구장산술에는 직접 미지수 x, y, z를 정하여 풀지는 않았다. 현대적 방법으로 구해 보면 상등벼 1단에서 $9\frac{1}{4}$말, 중등벼 1단에서 $4\frac{1}{4}$말, 하등벼 1단에서 $2\frac{3}{4}$말이 나오게 된다.

구장산술은 이러한 문제를 산가지 셈을 사용하는 독특한 방법으로 풀었다. 각 미지수의 계수를 일정한 위치에 산가지로 다음과 같이 놓았다.



1	2	3
2	3	2
3	1	1
26	34	39

[그림2] 산가지셈의 숫자를 아라비아 숫자로 바꾸어 놓은 것

위의 그림1에서 왼쪽 줄은 ①식에, 중간 줄은 ②식에, 오른쪽 줄은 ③식에 해당된다.

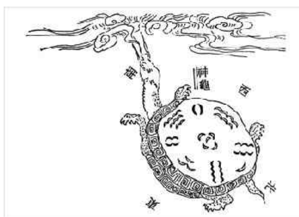
이 연립방정식을 풀 때는 어느 한 방정식의 첫 항의 계수를 다른 두 방정식에 곱한 다음, 서로 더하거나 빼서 미지항을 차례로 없애서 해를 구하게 된다. 바로 행렬식을 이용한 것과 같은 이치이다.

산가지를 배열해서 놓은 모양이 정사각형을 이루었다고 해서, 즉 정방형 모양이기 때문에 '방정'이라 했다.

(다) 수를 사각형으로 배열하게 된 이유

연립일차방정식을 풀 때, 위에서와 같이 계수만을 나열하면 미지수에 혼동되지 않고 간편하고 정확하게 계산할 수 있다. 서양에서도 연립 일차 방정식을 다루었지만 계수만으로 해를 구한 것은 상당한 시간이 지난 뒤였다. 실제로 수를 사각형으로 나열한 행렬을 그 자체로 다루기 시작한 것은 매우 뒤의 일로, 1848년에야 실베스터(Sylvester; 1814-1897)의 제의로 용어 'matrix'가 등장했다고 한다. 현대 수학에서 행렬의 엄청난 중요성을 생각해보면, 수들을 사각형으로 나열한 것은 수학의 발전을 위해서는 획기적인 발상이었다.

그렇다면 산학에서는 어떻게 해서 수를 사각형으로 나열하게 되었을까? 그 기원을 통상 '낙서(洛書)'에서 찾는다.


낙서의 거북(상상도)

낙서는 오른쪽 그림과 같이 한 개에서부터 아홉 개까지의 점의 무리로 이루어진 것이다.

이런 그림은 중국 하 왕조의 시조인 우제(禹帝)가 임금이 되기 전에 황하의 상류인 낙수(洛水)에서 치수 사업을 하고 있을 때 나타난 신묘한 거북의 등에 새겨져 있었다고 한다.

이를 숫자로 나타내면, 아홉 개의 수를 정사각형으로 배열한 방진을 얻는다. 낙서의 모든 행과 열 및 두 대각선 위에 있는 세 수의 합은 15인데, 이런 성질을 만족시키는 방진을 마방진이라 한다. 이렇게 해서 낙서는 오락 수학의 큰 주제를 이루고 있는 마방진의 효시였고, 중국에서 수들을 사각형으로 비열하게 된 이유라고 여겨진다.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

(2) 행렬과 연립일차방정식

(가) 미지수가 n개인 연립방정식

미지수가 n개이고 방정식이 m개인 연립방정식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

이 연립방정식을 만족하는 n개의 실수의 쌍(k_1, k_2, ⋯, k_n)을 이 연립방정식의 해라고 한다.

연립방정식은 가우스 소거법을 이용하여 다음과 같은 사다리꼴 모양(echelon form)으로 바꾸어 해를 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 + \cdots + c_{1n}x_n &= d_1 \quad (r \le m) \\ x_2 + c_{23}x_3 + \cdots + c_{2n}x_n &= d_2 \\ &\vdots \\ x_r + \cdots + c_{rn}x_n &= d_r \\ 0 &= d_{r+1} \\ &\vdots \\ 0 &= d_m \end{aligned}$$

한 연립일차방정식에 다음과 같은 형태의 변형을 유한 번 시행하여 얻게 되는 연립일차방정식은 본래의 연립일차방정식과 그 해가 같다.

① 서로 다른 두 방정식을 바꾸어 놓는다.
② 한 방정식을 a배 한다. (단, a≠0)
③ 한 방정식에 다른 방정식의 a배를 더한다.

일반적으로 주어진 연립방정식에 위의 변형을 적절히 시행하여 미지수의 개수를 줄임으로써 해를 구할 수 있다. 이 과정은 연립방정식의 덧붙인 행렬에 다음과 같은 기본 행 조작을 시행하여 기약행 사다리꼴(reduced row echelon form)로 바꾸는 것과 같다.

① 두 행을 바꾸어 놓는다.
② 한 행에 0이 아닌 수를 곱한다.
③ 한 행에 다른 행의 a배를 더한다.

여기서 기약행 사다리꼴이란 다음 4개의 조건을 모두 만족하는 행렬을 뜻한다.

(i) 0 만으로 이루어진 행은 그렇지 않은 행보다 뒤에 놓여 있다.
(ii) 각 행에서 처음으로 나오는 0이 아닌 성분은 1이다.
(iii) 조건 (ii)의 1은 행의 번호가 커질수록 더 오른쪽에 놓여 있다.
(iv) 조건 (ii)의 1이 들어있는 열의 나머지 성분은 모두 0이다.

(나) 동차연립방정식

연립일차방정식에서 다음과 같이 우변의 상수가 모두 0일 때 동차(homogeneous)라고 한다.

$$\begin{cases} a_{11}x_{1+}a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_{1+}a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_{1+}a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

이 방정식에는 모든 미지수가 0인 해, 즉(0,0,⋯,0)인 해가 있다. 이 해를 “자명해(trivial solution)”라고 한다. 그러나 미지수의 개수보다 방정식의 개수가 적으면 항상 자명하지 않은 해가 있다.

(다) 일차방정식과 행렬

다음 연립방정식에서 A, X, B를 다음과 같이 나타내면 주어진 연립방정식은 AX=B로 나타낼 수 있다. 이때 연립방정식의 해는 행렬 X를 구하면 된다.

$$\begin{cases} a_{11}x_{1+}a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_{1+}a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_{1+}a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases},$$

A= $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$, X= $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, B= $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$

m=n이고, 행렬 A가 역행렬 A^{-1}를 가지면 다음과 같이 X를 구할 수 있다.

A^{-1}(AX)=A^{-1}B, X=A^{-1}B

x_j를 A의 j번째 열 대신 B를 써 넣은 행렬의 행렬식을 A의 행렬식으로 나누어 구할 수 있는데 이것을 Cramer의 공식이라고 한다.

$$x_j = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & b_m & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix}}{|A|} \quad (1 \le j \le n)$$

예를 들어 연립방정식 $\begin{cases} ax+by=e \\ cx+dy=f \end{cases}$ 에서 A=$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$,

X=$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, B=$\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$로 놓으면 주어진 연립방정식은 AX=B로 나타낼 수 있다. 이때 $|A|$=ad− bc $\neq 0$ 이면 A의 역행렬이 존재하고, 해는 다음과 같다.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{de-bf}{ad-bc}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ b & f \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{af-be}{ad-bc}$$

미지수가 2개 뿐만 아니라 미지수가 많은 다원일차연립방정식은 행렬을 이용하면 매우 편리하다.

현대적 의미의 행렬식이라는 용어를 사용하기 시작한 사람은 코시(Cauchy; 1789~1857)였다. 이후 선형 대수학의 연구는 행렬 자체의 연구, 선형 변환으로서의 행렬 연구, 행렬 대수 이론 등을 중심으로 재편되었다.

4.2. 교육과정 및 교과서 내용

4 미지수가 2개인 연립일차방정식

조선 시대의 연립방정식

조선 후기 홍대용(洪大容 ; 1731~1783)이 지은 실용 수학 서적인 "주해수용(籌解需用)"에는 당시 정치, 경제, 과학, 문화의 여러 부문에서 실제로 사용되던 다양한 수학 문제와 풀이가 실려 있다. 여기에 실린 문제 중에는 사람의 수와 물건의 값에 대한 여러 가지 문제도 있다.

❶ 위의 문제에서 구하려고 하는 것은 무엇일까?
❷ 위의 문제를 등식으로 나타내면 몇 개의 등식이 만들어질까?

① 미지수가 2개인 일차방정식과 그 해의 의미를 이해한다.

◦ 미지수가 2개인 일차방정식과 그 해의 의미를 이해하게 한다.

두 미지수 x, y의 관계가 $ax+by+c=0\,(a, b, c$는 상수, $a \neq 0,\ b \neq 0)$의 모양으로 나타나는 구체적인 예를 통하여 미지수가 2개인 일차방정식의 뜻과 그 해의 의미를 이해하게 한다.

여기에서는 x, y의 값이 자연수인 해만 구하게 하고, x, y의 값이 유리수로 확대되는 것은 일차함수와 일차방정식의 관계에서 다루도록 한다.

유정이가 문구점에서 지우개와 연필의 가격을 보고 오른쪽 그림과 같이 말하였다.

❶ 지우개 1개의 값을 x원, 연필 1자루의 값을 y원이라고 할 때, 유정이의 말을 등식으로 나타내어 보자.
❷ 유정이의 말만 듣고 지우개와 연필의 값을 정확히 알 수 있는지 친구들과 이야기해 보자.

② 미지수가 2개인 연립일차방정식과 그 해의 의미를 이해하고, 이를 풀 수 있다.

◦ 미지수가 2개인 연립일차방정식의 뜻과 그 해의 의미를 이해하게 한다.

미지수가 2개인 일차방정식에 대한 이해를 바탕으로 미지수가 2개인 연립일차방정식의 뜻과 그 해의 의미를 이해하게 한다.

> 배드민턴 동아리 회원 10명이 모여 연습을 하기로 하였다. 각각의 회원은 라켓을 1개 또는 2개 가지고 왔는데, 라켓을 세어 보니 모두 17개였다.
>
> ❶ 라켓을 1개 가지고 온 회원의 수를 x, 2개 가지고 온 회원의 수를 y라고 할 때, 다음 $\boxed{}$ 안에 알맞은 식을 써넣어 보자.
>
> 회원이 10명 ➡ $\boxed{} = 10$
>
> 라켓이 17개 ➡ $\boxed{} = 17$
>
> ❷ 라켓을 1개 가지고 온 회원과 2개 가지고 온 회원은 각각 몇 명인지 생각해 보고 그렇게 생각한 이유를 친구들과 이야기해 보자.

◦ 소거의 뜻을 이해하고 이를 활용하여 연립일차방정식을 풀 수 있게 한다.

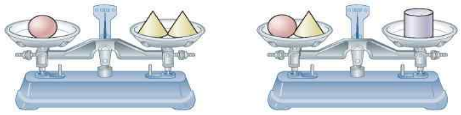
연립일차방정식의 두 미지수 중 한 미지수를 소거하여 얻은 일차방정식을 풀어 미지수의 값을 구하고, 그 값을 주어진 2개의 일차방정식 중 어느 하나에 대입하여 다른 미지수의 값을 구함으로써 연립일차방정식을 풀 수 있게 한다.

◦ 가감법과 대입법의 뜻을 이해하고 연립일차방정식을 풀 수 있게 한다.

두 일차방정식을 더하거나 빼어서 한 미지수를 소거하여 연립일차방정식을 풀 수 있음을 알고, 이 방법을 가감법이라고 함을 알게 한다. 연립일차방정식에서 한 일차방정식을 변형하여 한 미지수를 다른 미지수에 관한 식으로 나타내고 그것을 다른 일차방정식에 대입하여 한 미지수를 소거함으로써 연립일차방정식을 풀 수 있음을 알고, 이 방법이 대입법임을 알게 한다. 연립일차방정식을 풀기 위해서는 두 미지수 중 한 미지수를 소거하여야 하므로 주어진 연립방정식의 계수와 모양에 따라 소거할 미지수를 정한 다음, 가감법과 대입법 중에서 적절한 방법을 택하여 그 해를 구할 수 있게 한다.

> 태현이가 접시저울을 가지고 실험해 보니, 배 한 개의 무게는 사과 두 개의 무게와 같고, 토마토 두 개의 무게는 귤 다섯 개의 무게와 같았다.
>
> 
>
> ❶ 배 한 개와 토마토 두 개의 무게를 합하면 사과 두 개와 귤 다섯 개의 무게를 합한 것과 같을까?
>
> ❷ 위의 ❶에서 답한 것을 등식의 성질을 이용하여 설명해 보자.

수연이가 접시저울을 가지고 실험해 보니, 구 모형 한 개의 무게는 원뿔 모형 두 개의 무게와 같았고, 구 모형 한 개와 원뿔 모형 한 개의 무게를 합하면 원기둥 모형 한 개의 무게와 같았다.



❶ 원기둥 모형 한 개의 무게는 원뿔 모형 한 개의 무게의 몇 배라고 할 수 있는가?

❷ 구 모형과 원기둥 모형의 무게 사이의 관계는 어떻게 되는지 친구들과 이야기해 보자.

◦ 연립일차방정식의 해가 반드시 한 쌍만 있는 것은 아님을 이해하게 한다.

연립일차방정식의 해는 한 쌍만 있는 경우도 있지만 방정식에 따라서는 해가 무수히 많은 경우와 해가 없는 경우도 있음을 구체적인 문제를 통하여 이해하게 한다. 해가 무수히 많은 경우와 해가 없는 경우에 연립방정식의 형태가 어떻게 되는지를 이해하게 한다. 이 때, '부정', '불능'이란 용어는 사용하지 않는다.

③ 미지수가 2개인 연립일차방정식을 활용하여 다양한 실생활 문제를 해결할 수 있다.

◦ 문제의 뜻에 맞게 연립일차방정식을 세워 실생활의 여러 가지 문제를 해결하게 한다.

문제 상황에서 무엇을 미지수로 할 것인가를 판단하고, 문제의 뜻에 맞게 연립일차방정식을 세워 문제를 해결하게 한다. 학생의 수준에 따라 실생활의 다양한 상황에서 연립일차방정식을 활용하여 문제를 해결하게 할 수 있다.

▶ 미지수가 2개인 연립일차방정식을 활용한 문제 해결 과정

❶ 문제의 뜻을 파악하고 구하려고 하는 값을 미지수 x, y로 놓는다.

❷ 문제 중에 있는 수량들 사이의 관계를 찾아 연립방정식을 세운다.

❸ 연립방정식을 풀어 미지수 x, y의 값을 구한다.

❹ 구한 x, y의 값이 문제의 뜻에 맞는지 확인한다.

4.3. 교수학습 보조자료

노새와 당나귀

다음은 그리스의 수학자 유클리드의 그리스 시화집에 나오는 문제이다. 노새와 당나귀의 짐이 몇 자루인지 구하라.

노새와 당나귀가 터벅터벅 자루를 운반하고 있습니다.
너무도 짐이 무거워서 당나귀가 한탄하고 있습니다.
노새가 당나귀에게 말했습니다.
"연약한 소녀가 울 듯이 어째서 너는 한탄하고 있니?
네가 진 짐의 한 자루만 내 등에다 옮겨 놓으면
내 짐은 너의 배가 되는걸 내 짐 한 자루를
네 등에 옮기면 나와 너는 같은 수가 되는 거다."
수학을 아는 사람들이여,
어서 어서 가르쳐 주세요.
노새와 당나귀의 짐이 몇 자루 인지를.

답; 노새는 7자루, 당나귀는 5자루

배계 문제 – 부정방정식

5세기경 중국의 수학자 장구건이 쓴 수학책 '장구건산경'에는 다음과 같은 부정방정식 문제가 있다.

수탉 1마리에 5월, 암탉 1마리에 3원, 병아리 3마리에 1원이다. 지금 100원으로 닭을 100마리 사려고 한다. 수탉과 암탉 그리고 병아리는 몇 마리씩 살 수 있겠는가?

이 문제를 수학사에서는 닭 100마리에 관한 문제라 하여 '백계 문제'라고 한다.
이는 단 하나의 해가 나오는 것이 아니라 그 해가 3개나 있어 부정방정식을 보여주는 예였다고 할 수 있다.

계토산

중국의 수학책인 '손자산경'에는 다음 문제가 있다.

꿩과 토끼가 바구니에 들어있다. 위를 보니 머리가 35개이고, 아래를 보니 발이 94개이다. 꿩과 토끼는 각각 몇 마리인가?

[풀이] 꿩의 수를 x, 토끼의 수를 y로 놓고 식을 세우면 간단하겠지만, 당시에는 문자를 사용하지 않았으므로 다음과 같이 구했다.

① 발의 수 (94)를 반으로 해라.
② 그것에서 머리의 수 (35)를 빼라. 이것이 토끼의 수이다.
③ 그것을 머리의 수에서 빼라. (이것이 꿩의 수이다)

꿩은 다리가 둘이고 토끼는 넷이다. ①에서 발의 수를 반으로 하라는 것은 꿩의 다리는 2개를 1묶음으로 하여 1개로 세고, 토끼 다리는 2개를 1묶음으로 하여 2개로 계산하겠다는 뜻이다. 즉, $94 \div 2 = 47$은 꿩의 다리를 1개로, 토끼의 다리는 2개로 하여 센 합계다. 그런데 머리의 수가 35개이고 꿩과 토끼는 모두 머리가 1개씩이므로 35는 꿩과 토끼를 1번씩만 센 숫자이

다. 즉, 47-35=12는 토끼의 수이다. 그러면 꿩은 35-12=23마리가 되는 것이다.

시와 연립방정식

조선시대 수학서 '산법통종'에는 다음과 같은 시가 있다.

숙박업을 하는 이(李)가네 손님이 많이 왔는데 한 방에 7명이 들어가면 7명이 남고 9명씩 들어가면 방 하나가 남는다. 객실 수와 손님 수는 얼마인가?

또 다음과 같은 시도 있다.

순한 술과 독한 술이 있는데 독한 술을 한 병 마시면 3명이 취하고
순한 술을 세 병 마시면 한 명이 취한다.
순한 술과 독한 술을 합해서 33명을 마시고
19명이 모두 취했다면 순한 술과 독한 술을 각각 얼마씩 마신 셈인가?

박사가 사랑한 수식

영화 '박사가 사랑한 수식'은 소설을 영화로 만든 것으로 한 수학 교사가 자신에게 '루트'라는 별명을 붙여 준 수학자를 소개하는 것으로 시작된다. 그 수학자는 박사 학위를 받고 연구원으로 재직하던 중 교통사고를 당해 기억을 잃은 사람이고, 루트는 그의 가정부의 아들이다.

10년 전 교통사고로 80분 밖에 기억하지 못하는 이 수학자는 자신의 기억을 보완하기 위하여 양복의 여기 저기에 메모지를 붙여 놓고 있다.

이 영화에서는 약수, 소수, 자연수, 우애수, 완전수 등의 수학 용어가 수힉과 함께 자주 나오지만 전혀 어렵게 느껴지지 않는다.

다음은 영화 속에서 박사가 루트에게 묻는 문제이다.

"손수건 2장과 양말 2켤레를 380엔에 샀다. 같은 손수건 2장과 양말 5켤레는 710엔이다. 손수건 한 장과 양말 한 켤레의 값은 얼마인가?"

5. 일차부등식과 연립부등식

5.1. 이론적 배경

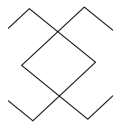
(1) 부등식과 부등호의 역사


▲해리엇

수 사이의 대소 관계인 부등 관계에 관한 인식은 수의 발생과 더불어 시작되었다. 그러나 지금과 같은 부등식의 이론이 생긴 것은 그리 오래 되지 않았다.

17세기에 들어서 부등식의 표현이 필요했기 때문에 부등식은 이때부터 발달하였다.

부등호 >와 <는 해리엇(Harriot, T.; 1560~1621)의 책 '해석술 연습(Artis analyticapraxis)에 처음 등장하였는데, 이 책은 해리엇이 죽은 뒤인 1631년에 출판되었다.



해리엇은 오른쪽 그림과 같이 미국 원주민이 칼에 표시한 장식에서 힌트를 얻어 이런 기호를 만들었다는 이야기가 있다.


▲오트레드

그런데 해리엇의 부등호는 1700년대 초까지는 널리 사용되지 않았다. 오히려 많은 수학자는 오트레드(Oughtred, W.; 1574~1660)가 1631년에 펴낸 책 '수학의 열쇠'(Clavis mathematicae)에서 제안한 기호 와 을 선호했었다.

이 기호들은 '수학의 열쇠' 1647년 개정판에서는 '…보다 크지 않은'(non majus)을 뜻하는 기호 와 '…보다 크지 않은'(non minus)을 뜻하는 기호 로 약간 변경되었으며, 그 뒤의 개정판에서도 이렇게 사용되었다.

이것들을 현재의 기호로 나타내면 다음과 같을 것이다.

' ' = ≯

' ' = ≮


▲부게르

'…보다 크거나 …과 같은' 뜻하는 기호 ≧와 '…보다 작거나 …보다 같은'을 뜻하는 기호 ≦는 프랑스의 과학자 부게르(Bouguer, P.; 1698~178)가 1734년에 처음으로 사용했다.

현재 이 기호들은 일반적으로 ≥와 ≤으로 간략하게 나타내고 있다.

'…보다 훨씬 더 큰'을 뜻하는 기호 ≪와 '…보다 훨씬 더 작은'을 뜻하는 기호 ≫가 사용되는 경우도 있다.

(2) 실수의 대소 관계

실수 체계를 도입할 때는 실수를 직접 구성하는 구성적 방법과 그 존재성을 공리적으로 인정하는 공리적 방법이 주로 이용된다.

구성적 방법에서는 자연수를 공리적으로(이를테면 페아노의 공리를 이용하여) 정의하고, 이로부터 정수, 유리수를 구성한 다음에 실수 체계를 구성한다.

한편, 공리적 방법에서는 공집합이 아닌 한 집합 위에 '덧셈'과 '곱셈'이라 부르는 두 연산이 정의되어 있고, 그 집합이 세 가지 공리(체의 공리, 순서 공리, 완비성 공리)를 만족시킬 때 이를 R로 나타내고 실수

체계라고 정의한다.

실수 체계를 공리적 방법으로 도입한다고 할 때, 수학 2에서 다루는 실수의 대소 관계는 실수에 관한 공리 중에서 순서 공리로부터 유도되는 성질들이다.

그러므로 여기서는 실수의 순서 공리를 소개하고, 이로부터 실수의 대소 관계를 유도하는 과정을 소개하겠다.

(가) 실수의 순서 공리

실수의 집합 R에는 다음 두 조건을 만족시키는 공집합이 아닌 부분집합 P가 존재한다.
① 임의의 $a, b \in P$ 에 대하여 $a+b \in P$ 이고, $ab \in P$ 이다.
② 임의의 $a \in R$에 대하여 다음 중 단 하나만 성립한다.
(i) $a \in P$ (ii) $a=0$ (iii) $-a \in P$

이때, 집합 P의 원소를 양의 실수(positive real number)라 하고, 집합 $N=\{a \mid -a \in P\}$의 원소를 음의 실수(negative real number)라고 한다.

따라서 위 ②로부터 실수 a는 양의 실수 또는 0 또는 음의 실수 중 어느 하나이다.

(나) 두 원소 사이의 대소 관계

실수의 순서 공리를 이용하여 R의 두 원소 사이의 대소 관계를 다음과 같이 정의할 수 있다.

<정의> 임의의 $a, b \in R$에 대하여, $a-b \in P$ 일 때, a가 b보다 크다 또는 b가 a보다 작다고 하고, 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$$a>b \text{ 또는 } b<a$$

또, $-(a-b) \in P$ 일 때, b가 a보다 크다 또는 a가 b보다 작다고 하고, 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$$a<b \text{ 또는 } b>a$$

특히, $a>b$ 또는 $a=b$일 때, $a \geq b$로 나타내고, $a<b$ 또는 $a=b$일 때 $a \leq b$로 나타낸다.

위의 정의에서 a가 양의 실수이면 $a>0$이 되고, 음의 실수이면 $a<0$임을 알 수 있다.

또, $a, b, c \in R$가 $a<b$ 이고 $b<c$ 이면 다음과 같이 나타낸다.

$$a<b<c \text{ 또는 } c>b>a$$

(다) 실수의 대소 관계

실수의 순서 공리와 위의 정의를 이용하여 실수의 대소 관계에 대한 성질을 알아보자.

<정리 1> 임의의 $a, b, c \in R$에 대하여 다음이 성립한다.

(1) 다음 중 하나만 성립한다.

$a>b$, $a=b$, $a<b$

(2) $a<b$ 이고 $b<c$ 이면, $a<c$ 이다.

(3) $a \leq b$ 이고 $b \leq a$ 이면, $a=b$ 이다.

[증명] (1) $a-b \in R$에 대하여 순서 공리 ②를 적용하면 다음 중 하나만 성립한다.

$a-b \in P$, $a-b=0$, $-(a-b) \in P$

따라서 정의에 의하며 (1)이 성립한다.

(2) $a<b$이면 $b-a \in P$ 이고 $b<c$ 이면 $c-b \in P$ 이므로, 순서 공리 ①에 의하여

$(b-a)+(c-b)=c-a \in P$ 이다.

따라서 $a<c$ 이다.

(3) $a \neq b$라고 하면, (1)에 의하여 $a>b$이거나 $a<b$이다.

그런데 $a>b$이면 $a \geq b$는 성립하지만 $b \leq a$는 성립하지 않는다.

또, $a<b$이면 $a \leq b$는 성립하지만 $a \geq b$는 성립하지 않는다.

어느 경우든 주어진 가정에 모순이다. 따라서 $a=b$ 이다.

<정리 2> 임의의 $a, b, c \in R$에 대하여 다음이 성립한다.

(1) $a^2 \geq 0$이다. 따라서 $1>0$ 이다.

(2) $a>0$ 이고 $b<0$이면, $ab<0$ 이다.

(3) $a<0$ 이고 $b<0$이면, $ab>0$ 이다.

(4) $a>0$ 이면, $\frac{1}{a}>0$ 이다.

[증명] (1) $a=0$ 이면 $a^2=0$ 이므로 $a^2 \geq 0$이다.

$a>0$ 이면 $a^2>0$ 이므로 $a^2 \geq 0$이다.

또, $a<0$ 이면 $-a>0$ 이고 순서 공리 ①에 의하여 $(-a)(-a)=(-a)^2=a^2>0$ 이다.

따라서 어느 경우든 $a^2 \geq 0$이다.

특히, $a=1$이면 $1^2 \geq 0$ 이다. 그런데 $1 \neq 0$이므로
$1>0$ 이다.

(2) $a>0$ 이고 $b<0$ 이면, $a>0$ 이고 $-b>0$ 이므로 $a(-b)=-ab>0$ 이다.

따라서 $ab<0$ 이다.

(3) $a>0$ 이면 $a \neq 0$이므로 $\frac{1}{a} \neq 0$ 이다.

만약 $\frac{1}{a}<0$이라고 하면, $a \cdot \frac{1}{a}=1<0$이 되어 (1)에 모순이다.

따라서 순서 공리 ②에 의하여 $\frac{1}{a}>0$ 이다.

<정리 3> 임의의 a, b, c, d $\in$R에 대하여 다음이 성립한다.

(1) a>b 이면, a+c>b+c 이다.

(2) a>b 이고 c>d 이면, a+c>b+d 이다.

(3) a>b 이고 c>0 이면, ac>bc 이다.

(4) a>b 이고 c<0 이면, ac<bc 이다.

(5) ab>0 이면, a>0 이고 b>0 이거나 a<0이고 b<0 이다.

(6) a>0, b>0 일 때, $a^2 > b^2 \Leftrightarrow$ a>b 이다.

[증명] (1) (a+c)−(b+c)=a−b 이고

가정에서 a−b>0 이므로 (a+c)−(b+c)>0 이다.

따라서 a+c>b+c가 성립한다.

(2) (a+c)−(b+d)=(a−b)+(c−d)>0 이다.

따라서 a+c> b+d 이다.

(3) ac−bc=(a−b)c 이고 가정에서 a−b>0 이고 c>0 이므로, (a−b)c>0 이다.

따라서 ac>bc 이다.

(4) (3)과 같은 방법으로 증명된다.

(5) ab>0 이면 a≠0 이고 b≠0이다.

a>0 이면 a^{-1}>0 이므로 (3)에 의하며

a^{-1}(ab)>$a^{-1}\cdot 0$

즉 b>0 이다.

(6) a^2-b^2=(a+b)(a−b) 이고 가정으로부터 a+b>0 이므로 a^2-b^2일 필요충분조건은 a−b>0 이다. 따라서 (6)이 성립한다.

(3) 여러 가지 부등식

(가) 코시-슈바르츠 부등식

x와 y가 실수나 복소수 내적 공간의 원소일 때 다음이 성립한다.

$$|<x,y>|^2 \le <x,x> \cdot <y,y>$$

등호가 성립하는 것은 x와 y가 일차 종속인 경우와 동치이다. 또한 x와 y가 n차원 공간 벡터인 경우에 $x=\sum_{k=1}^{n} x_k i_k,\quad y=\sum_{k=1}^{n} y_k i_k$라고 하면 다음과 같은 부등식이 성립한다.

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k i_k\right)^2 \le \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right)$$

n=2인 경우에는 다음과 같은 부등식을 얻을 수 있다.

$$(ac+bd)^2 \le (a^2+b^2)(c^2+d^2)$$

삼각 부등식과 베셀 부등식은 보통 코시−슈바르츠 부등식으로부터 유도될 수 있다.

(나) 산술 평균과 기하 평균 부등식

산술 평균−기하 평균 부등식은 산술 평균과 기하 평균 사이에 성립하는 절대부등식이다. 이 부등식은 음수가 아닌 실수들의 산술 평균이 같은 숫자들의 기하 평균보다 크거나 같고, 특히 숫자들이 모두 같을 때

만 두 평균이 같음을 나타낸다. 조화 평균에 대해서도 비슷한 부등식이 성립하며, 세 평균 사이의 부등식을 산술기하평균 부등식이라 통칭하기도 한다.

구체적으로 n개의 음수가 아닌 실수들 x_1, x_2, ⋯, x_n이 있을 때 다음이 성립한다.

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \geq \sqrt{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}}$$

여기서 각 변들은 산술 평균, 기하 평균, 조화 평균에 대응된다. 특히 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ 일 때만 다음이 성립한다.

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} = \sqrt{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n} = \frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}}$$

5.2. 교육과정 및 교과서 내용

수 일차부등식과 연립일차부등식

① 다양한 상황을 이용하여 일차부등식과 그 해의 의미를 이해한다.

◦ 부등식의 기본 성질을 이해하게 한다.

부등식의 양변에 같은 수를 더하거나 빼어도 부등호의 방향은 변하지 않으며, 부등식의 양변에 같은 양수를 곱하거나 나누어도 부등호의 방향은 변하지 않지만, 부등식의 양변에 같은 음수를 곱하거나 나누면 부등호의 방향이 바뀐다는 사실을 구체적인 예를 통하여 이해하게 한다. 부등식의 성질을 학습할 때는 등식의 성질과 비교하여 공통점과 차이점을 알게 한다.

오른쪽 표의 ◇와 ○는 수를 나타낸 것이다.

❶ 부등호의 방향에 맞게 ◇, ○에 적당한 수를 써넣어 보자.

❷ 표의 빈칸에 알맞은 부등호를 써넣어 보자.

❸ 친구들이 완성한 표와 비교해 보고 $a<b$일 때, 다음 빈칸에 부등호의 방향이 어떻게 될지 생각해 보자.

$a+2\ \square\ b+2,\quad 2a\ \square\ 2b,\quad -2a\ \square\ -2b$

좌변	부등호	우변
◇	<	○
◇+2		○+2
◇×2		○×2
◇×(−2)		○×(−2)

◦ 일차부등식의 뜻과 그 해의 의미를 이해하게 한다.

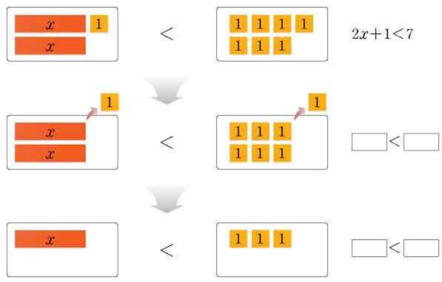
부등식의 기본 성질을 이용하여 (일차식) >0, 또는 (일차식) <0, 또는 (일차식) ≥ 0, 또는 (일차식) ≤ 0의 꼴로 나타낼 수 있을 때, 그 부등식은 일차부등식임을 이해하게 한다. 부등식이 참이 되는 미지수의 범위가 부등식의 해임을 이해하게 한다.

② 부등식의 기본 성질을 이용하여 일차부등식을 풀 수 있다.

◦ 일차부등식을 풀고 부등식의 해를 수직선 위에 나타내게 한다.

부등식의 성질을 이용하여 일차부등식을 $x<a$, $x>a$, $x \leq a$, $x \geq a$의 꼴로 변형시킬 수 있음을 알고, 이것이 일차부등식의 해임을 이해하여 일차부등식의 해를 구하게 한다. 차후 연립일차부등식의 해에 대한 이해를 돕기 위하여 수직선 위에 해를 나타내게 한다.

다음 그림은 수 막대를 이용하여 부등식 $2x+1<7$을 푸는 과정을 나타낸 것이다.



❶ 각 그림에 알맞은 식 또는 수를 $\square$ 안에 써넣어 보자.

❷ 각 단계에서 이용한 부등식의 성질은 무엇인지 설명해 보자.

③ 연립일차부등식과 그 해의 의미를 이해하고, 이를 풀 수 있다.

◦ 연립일차부등식의 뜻과 그 해의 의미를 이해하게 한다.

연립일차방정식은 두 개의 일차방정식으로 구성된 것임을 통해 연립일차부등식은 두 개 이상의 일차부등식으로 구성된 것임을 알게 한다. 또한 연립일차방정식의 해가 일차방정식들의 공통인 해임을 상기하여 연립일차부등식의 해는 일차부등식들의 공통인 해를 구하는 것임을 이해하게 한다.

다음 그림은 고속 도로에서 볼 수 있는 교통 표지판이다. 〈그림 1〉은 최고 속도 제한이 시속 100 km라는 의미이고 〈그림 2〉는 최저 속도 제한이 시속 50 km라는 의미이다.

〈그림 1〉

〈그림 2〉

❶ 자동차의 속도를 시속 $x\text{ km}$라고 할 때, 각각의 표지판의 내용을 부등식으로 표현해 보자.

❷ 위의 ❶에서 표현한 부등식을 수직선에 나타내고 두 부등식을 하나의 부등식으로 표현해 보자.

◦ 연립일차부등식을 풀 수 있게 한다.

연립일차부등식의 해는 일차부등식들의 해에서 공통인 부분의 범위임을 이해하고, 수직선 위에 일차부등식들의 해를 나타내어 공통된 부분으로 연립부등식의 해를 구하게 한다. 연립부등식의 해가 없는 경우도 있음을 문제를 통하여 이해하게 한다.

◦ $A<B<C$와 같은 형태의 연립일차부등식을 풀 수 있게 한다.

$A<B<C$와 같은 형태의 연립일차부등식은 연립부등식 $\begin{cases} A<B \\ B<C \end{cases}$을 나타낸 것이므로, 연립부등식 $\begin{cases} A<C \\ B<C \end{cases}$와는 동치가 아님을 알고 이를 혼동하지 않도록 한다.

④ 일차부등식 또는 연립일차부등식을 활용하여 다양한 실생활 문제를 해결할 수 있다.

◦ 일차부등식 또는 연립일차부등식을 활용하여 실생활의 여러 가지 문제를 해결하게 한다.

실생활 상황에서 문제를 도입하고, 주어진 문제의 뜻을 이해하고 이에 따라 일차부등식을 세워 문제를 해결

하게 한다. 일차부등식 문제를 해결할 때에는 방정식에서와 같은 순서로 해결하되, 계산 과정에서 부등호의 방향에 주의하도록 한다. 해를 구한 후에는 그 해가 문제 상황에 맞는지 확인하게 한다.

> 가로의 길이가 15 cm인 직사각형이 있다. 이 직사각형의 둘레의 길이가 50 cm 이상일 때, 세로의 길이는 몇 cm 이상이 되어야 하는가?

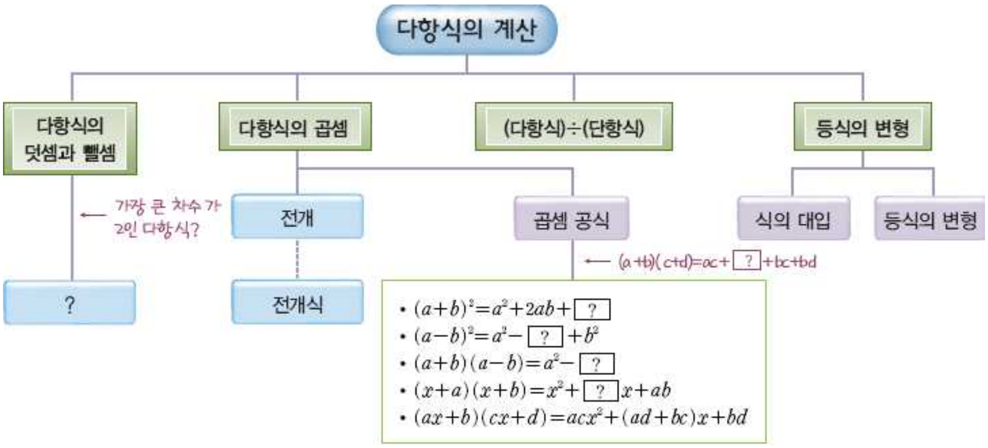
▶ 일차부등식을 활용한 문제 해결 과정

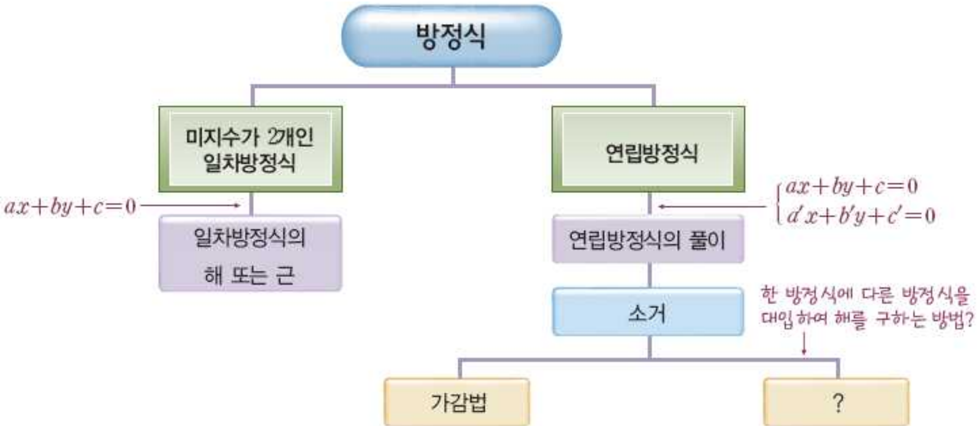
❶ 문제의 뜻을 파악하고 구하려고 하는 값을 미지수 x로 놓는다.

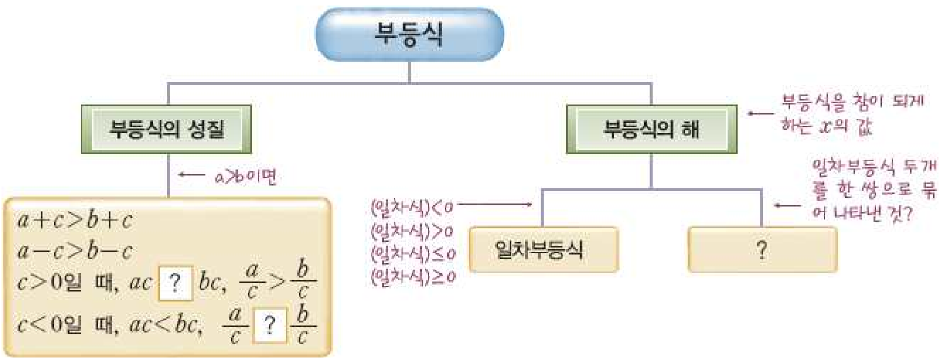
❷ 문제 중에 있는 수량들 사이의 관계를 찾아 부등식을 세운다.

❸ 부등식을 푼다.

❹ 구한 해가 문제의 뜻에 맞는지 확인한다.


다항식의 계산
다항식의 덧셈과 뺄셈
다항식의 곱셈
(다항식)÷(단항식)
등식의 변형
가장 큰 차수가 2인 다항식?
?
전개
전개식
곱셈 공식
$(a+b)(c+d)=ac+\boxed{?}+bc+bd$
• $(a+b)^2=a^2+2ab+\boxed{?}$
• $(a-b)^2=a^2-\boxed{?}+b^2$
• $(a+b)(a-b)=a^2-\boxed{?}$
• $(x+a)(x+b)=x^2+\boxed{?}x+ab$
• $(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$
식의 대입
등식의 변형


방정식
미지수가 2개인 일차방정식
연립방정식
$ax+by+c=0$
일차방정식의 해 또는 근
$\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$
연립방정식의 풀이
소거
한 방정식에 다른 방정식을 대입하여 해를 구하는 방법?
가감법
?


부등식
부등식의 성질
부등식의 해
부등식을 참이 되게 하는 x의 값
a>b이면
$a+c>b+c$
$a-c>b-c$
$c>0$일 때, $ac\ \boxed{?}\ bc$, $\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$
$c<0$일 때, $ac<bc$, $\frac{a}{c}\ \boxed{?}\ \frac{b}{c}$
(일차식)<0
(일차식)>0
(일차식)≤0
(일차식)≥0
일차부등식
?
일차부등식 두 개를 한 쌍으로 묶어 나타낸 것?

5.3. 교수학습 참고자료

6. 다항식의 인수분해

6.1. 이론적 배경

(1) 다항식

다항식은 문자에 대한 덧셈과 곱셈에 의한 식의 표현이다.

다항식이 나타내는 도형을 연구하는 분야인 대수기하는 19세기 이후로 수학의 중심 분야 중 하나이며, 힐베르트(Hilbert, D. 1862~1943)과 뇌터(Noether, A.E. 1882~1935)가 증명한 여러 결과들이 다항식 연구의 바탕이 되고 있다.

피타고라스(Pythagoras. ?B C.569~?B.C. 475)이후로 던져진 중요한 수학의 문제들이 다항식으로 표현되며 이는 수에 관한 연구와 연결된다. 1802년 가우스(Gauss, K. F. 1777~1855)는 일차 이상의 다항식은 기약다항식의 곱으로 유일하게 인수분해된다는 사실을 증명하였다. 유클리드(Euclid ?B C.325~?B.C. 265)가 그의 책 '원론(Elements)'에서 소수의 곱에 관한 내용을 소개한 이후에 2100년이 지난 후에야 가우스가 다항식의 인수분해 정리를 증명함으로써 유클리드 이후로 강조되고 있던 소수의 중요성과 소인수분해를 이용한 최대공약수 및 최소공배수의 계산 등이 다항식의 경우에도 그대로 적용되었다.

다항식을 인수분해하는 이유는 약수와 배수를 판정하고 최대공약수와 최소공배수를 구하고, 방정식의 근을 구하기 위해서이다. 다항식의 인수분해는 소인수분해와 마찬가지로 복잡한 다항식을 기약다항식을 이용하여 공부하는 것이다. 소인수분해는 계산에 있어서 가장 좋은 조건이다. 그러나 대수학에서 다루는 대상 중에서 소인수분해가 가능한 경우는 극히 일부분이다.

인수분해는 전개를 역으로 한 것으로 한 개의 다항식으로부터 두 개 이상의 다항식의 곱을 얻어내는 방법이다. 이차식의 경우에는 일차식의 곱으로 인수분해가 되지만 이 경우 수의 범위가 문제가 된다. 중학교 과정에서는 인수분해된 다항식의 계수가 유리수인 범위에서의 인수분해만을 다룬다.

다항식은 환(ring)과 부정원(indeterminate)을 이용하여 정의되는 대수적인 개념이다. 여기서는 환의 일종인 체(field) F의 원소를 계수로 가지는 다항식환 $F[x]$의 기본적인 성질에 대하여 알아보기로 한다.
다음에서 다항식은 다항식환 $F[x]$에 속하는 다항식을 의미한다.

(가) 다항식의 차수

다항식 $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$에서 $a_n \neq 0$일 때, $f(x)$를 n차 다항식이라 하고 n을 이 다항식의 차수라고 하며, 기호로는 $n = \deg f$로 나타낸다.

특히, 0차 다항식은 상수다항식이라고 한다. 또, 모든 계수가 0인 다항식을 영다항식이라고 하며, 그 차수는 $-\infty$로 정한다.

이제, 임의의 정수 n에 대하여 다음과 같이 정의하면, 다항식의 곱의 차수는 두 다항식의 차수의 합과 같음을 알 수 있다.

$$n + (-\infty) = (-\infty) + n = -\infty$$

$$(-\infty) + (-\infty) = (-\infty),\ n > -\infty$$

즉, 임의의 다항식 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $\deg(fg) = \deg f + \deg g$ 이다.

(나) 다항식의 나눗셈

정수 전체의 집합 $\mathbb{Z}$가 나눗셈에 관하여 닫혀 있지 않듯이, F[x]도 나눗셈에 관하여 닫혀 있지 않다. 그러나 정수의 나눗셈 정리와 비슷한 다음의 정리가 성립한다.

[다항식의 나눗셈 정리]

영다항식이 아닌 임의의 $f(x) \in$F[x]와 $g(x) \in$F[x]에 대하여 다음을 만족시키는 $q(x)$, $r(x) \in$F[x]가 존재한다.

$g(x) = f(x)q(x) + r(x)$, $\deg r(x) < \deg f(x)$

☞ 증명

$\deg g < \deg f$ 인 경우에는 $q(x) = 0$, $r(x) = g(x)$로 택하면 된다.

또, $f(x) = a(a \neq 0)$인 경우에는 $q(x) = a^{-1}g(x)$, $r(x) = 0$으로 택하면 된다.

이제 $\deg g(x) \geq \deg f(x) \geq 1$인 두 다항식을 다음과 같이 정하자.

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n, \ a_n \neq 0$$

$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_mx^m, \ b_m \neq 0$$

다항식 $g(x)$의 차수 m에 대하여 수학적 귀납법으로 증명하면 된다.

먼저 $m = 1$인 경우에 성립함을 쉽게 알 수 있다.

이제 $m \geq 2$이고 $m-1$일 때 성립한다고 가정하자.

이때, $h(x) = g(x) - b_m a_n^{-1} x^{m-n} f(x)$라 두면 $\deg h \leq m-1 < m$이므로 수학적 귀납법의 가정에 의하여 $h(x) = q_1(x)f(x) + r(x)$ $(\deg r < \deg f)$이 성립한다. 즉, m인 경우에도 성립한다.

(다) 나머지 정리와 인수정리

체 F의 원소 α와 다항식

$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$에 대하여 $f(\alpha)$는

$f(\alpha) = a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \cdots + a_n\alpha^n \in F$로 정의한다.

특히, $f(\alpha) = 0$일 때, α를 F에서의 다항식 $f(x)$의 근이라고 한다.

임의의 다항식 $f(x)$, $g(x)$와 $\alpha \in F$에 대하여 다음이 성립한다.

$$(f+g)(\alpha) = f(\alpha) + g(\alpha)$$

$$(fg)(\alpha) = f(\alpha)g(\alpha)$$

이것은 다항식의 합과 곱의 정의로부터 쉽게 알 수 있다. 이 성질을 이용하면 나눗셈정리로부터 다음 정리를 얻는다.

[나머지정리]

임의의 다항식 $f(x)$, $g(x)$와 $\alpha \in F$에 대하여 다음을 만족시키는 다항식 $q(x) \in$F[x]가 존재한다.

$f(x) = (x - \alpha)q(x) + f(\alpha)$

즉, $f(x)$를 $(x - \alpha)$로 나눈 나머지는 $f(\alpha)$이다.

☞ 증명

나눗셈 정리에 의하여 $f(x)=(x-\alpha)q(x)+c$ 인 $q(x)\in F[x]$ 와 $c\in F$가 존재한다.
그러므로 $f(\alpha)=(\alpha-\alpha)q(\alpha)+c=c$이다.

다음의 인수정리는 '나머지정리'로부터 바로 알 수 있다.

[인수정리]
임의의 다항식 $f(x)$와 $\alpha\in F$에 대하여, α가 $f(x)$의 근이기 위한 필요충분조건은 $x-\alpha$가 $f(x)$의 인수인 것이다.

(라) 다항식의 인수분해

차수가 1 이상인 다항식 $f(x)\in \mathrm{F}[\mathrm{x}]$에 대하여 차수가 역시 1 이상인 다항식 $g(x)$, $h(x)\in \mathrm{F}[\mathrm{x}]$가 존재하여 $f(x)=g(x)h(x)$가 성립할 때, $f(x)$는 F 위에서 가약(可約)인 다항식이라고 한다.

또, 그와 같은 다항식 $g(x)$와 $h(x)$가 존재하지 않을 때, $f(x)$는 F 위에서 기약(旣約)인 다항식이라고 한다.

다항식의 기약성을 논할 때에는 어떤 체에서 생각하고 있는지를 명확히 해야 한다.

예를 들어 $x^2-3=(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$이므로 다항식 x^2-3은 유리수체Q 위에서 기약지만 실수체 R 위에서는 기약이 아니다.

자연수를 소인수분해할 수 있듯이, 다항식도 기약다항식의 곱으로 나타낼 수 있다.

가약다항식과 기약다항식은 각각 $\mathbb{Z}$에서 합성수와 소수에 대응하는 개념이다. 그리고 $\mathbb{Z}$에서의 소인수분해에 대응하는 다음과 같은 정리가 성립한다.

[유일 인수분해정리]
임의의 일차 이상의 다항식 $f(x)\in F[x]$ 는 다음과 같이 인수분해된다.
$f(x)=ap_1(x)p_2(x)\cdots p_k(x)$
여기서 $a\in F,\ a\neq 0$이고, $p_1(x),\ p_2(x),\ \cdots,\ p_k(x)$는 최고차 항의 계수가 1인 기약다항식이다.
또, 기약인 인수를 곱하는 $p_1(x),\ p_2(x),\ \cdots,\ p_k(x)$의 순서를 무시하면, 이런 인수분해는 유일하다.

다항식 $f(x)$를 위와 같이 인수분해했을 때, 기약인 인수 중에 같은 것이 있으면 이들을 한꺼번에 묶어서 다음과 같이 간단히 나타낼 수 있다.

$$f(x)=a\{p_1(x)\}^{n_1}\{p_2(x)\}^{n_2}\{p_n(x)\}^{n_r}$$

$$(n_1\geq 1,\ n_2\geq 1,\ \cdots,\ n_r\geq 1)$$

여기서 $a\in F,\ a\neq 0$이고, $p_1(x),\ p_2(x),\ \cdots,\ p_k(x)$는 서로 다른 기약다항식이며, 최고차항의 계수가 모두

(마) 계수가 정수인 다항식

앞에서 소개한 정리들은 계수들의 집합이 체가 아닐 때에는 일반적으로 성립하지 않는다. 대표적인 예로서, 정수 계수 다항식환 $Z[x]$를 생각해보자.

일반적으로 $Z[x]$에서는 나눗셈정리가 성립하지 않는다. 그러나 나누는 다항식 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1 또는 -1인 경우에는 나눗셈 정리가 성립한다. 따라서, 나머지정리와 인수정리는 $Z[x]$에서도 성립한다.

또, 계수가 정수인 다항식이 계수가 유리수인 다항식으로 인수분해되면 그 다항식은 정수 계수 다항식으로 인수분해할 수 있음이 알려져 있다.

다시말해, 계수가 정수이고 차수가 1 이상인 다항식 $f(x)$가 계수가 유리수인 두 다항식의 곱으로 인수분해되면, 차수는 그대로이면서 계수가 정수인 두 다항식의 곱으로 인수분해된다.

이에 따라 계수가 정수인 다항식의 인수분해에 이용할 수 있는 다음과 같은 정리가 성립한다.

$f(x)$는 계수가 정수이고 차수가 1차 이상인 다항식이라고 하자. 또, $f(x)$의 최고차항의 계수를 a_n, 상수항을 a_0이라고 하자. 만약 $f(x)$가 유리수 근 $\frac{a}{b}$를 가지면(a와 b는 서로소인 정수이고 b≠0), a는 (정수의 범위에서) a_n의 약수이고 b는 a_0의 약수이다.

☞ 증명

인수정리에 의하여 $f(x)$는 $Q[x]$에서 $x-\frac{a}{b}$를 인수로 가진다. 따라서 $f(x)=(cx-d)g(x)$인 다항시 $cx-d,\ g(x)\in Z[x]$가 존재한다. 여기서 $\frac{d}{c}=\frac{b}{a}$이고 a와 b는 서로소이므로 $cx-d=k(ax-b)$인 정수 k가 존재한다. 따라서 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$f(x)=k(ax-b)g(x)$$
$$=(ax-b)(b_0+b_1x+\cdots+b_{n-1}x^{n-1})$$

(단, 각 b_i는 정수)

이제 양변의 최고차항의 계수와 상수항을 비교하면 $a_n=ab_{n-1},\ a_0=-bb_0$이므로 a는 a_n의 약수이고 b는 a_0의 약수이다.

(바) 아이젠슈타인(Eisenstein) 판정법

계수가 정수인 다항식이 기약다항식인지를 판정하는 충분조건으로 아이젠슈타인(Eisenstein, F.G.M. 1823~1852)의 정리가 유명하다.

계수가 정수인 다항식 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$ 에 대하여 다음 세 조건을 만족하는 소수 p가 존재하면 $f(x)$는 유리수의 범위에서 기약인 다항식이다. ① a_n은 p로 나누어 떨어지지 않는다. ② $a_{n-1},\ a_{n-2},\cdots,\ a_1,\ a_0$은 모두 p로 나누어 떨어진다. ③ a_0는 p^2으로 나누어 떨어지지 않는다.

6.2. 교육과정 및 교과서 내용

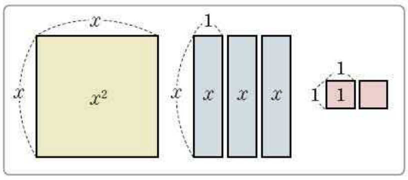
[6] 다항식의 인수분해

① 인수분해의 뜻을 알고, 인수분해를 할 수 있다.

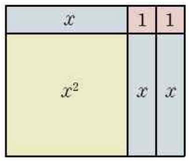
◦ 인수분해의 뜻을 알게 한다.

다항식을 유한개의 다항식의 곱으로 나타낼 때 각각의 식을 처음 식의 인수라고 함을 알고, 다항식을 몇 개의 인수의 곱으로 나타내는 인수분해의 뜻을 알게 한다. 이 때, 전개와 인수분해는 서로 역관계에 있음을 이해하게 한다.

다음 <그림 1>과 같이 넓이가 x^2, x, 1인 세 종류의 사각형 모양의 수 막대가 모두 6개 있다. 이를 이용하여 <그림 2>와 같이 하나의 직사각형으로 다시 배열하였다.



〈그림 1〉



〈그림 2〉

❶ <그림 1>의 6개의 사각형의 넓이의 합을 x의 다항식으로 나타내어 보자.

❷ <그림 2>에서 가로와 세로의 길이를 이용하여 직사각형의 넓이를 x의 식으로 나타내어 보자.

❸ 위 ❶, ❷의 결과를 등식으로 나타내어 보자.

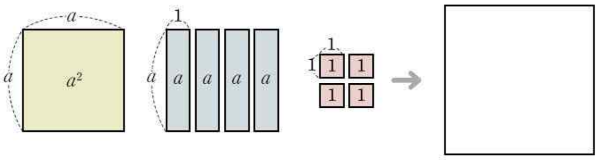
◦ 곱셈 공식과 인수분해 공식 사이의 관계를 이해하게 한다.

다항식의 곱의 전개와 다항식의 인수분해 사이의 관계를 이해하고, 여러 가지 인수분해 공식을 알게 한다.

- $a^2+2ab+b^2 = (a+b)^2$
- $a^2-2ab+b^2 = (a-b)^2$
- $a^2-b^2 = (a+b)(a-b)$
- $x^2+(a+b)x+ab = (x+a)(x+b)$
- $acx^2+(ad+bc)x+bd = (ax+b)(cx+d)$

$a^2+2ab+b^2$, $a^2-2ab+b^2$의 인수분해는 어떻게 할까?

다음 그림과 같이 넓이가 a^2, a, 1인 세 종류의 사각형 모양의 수 막대가 모두 9개 있다.



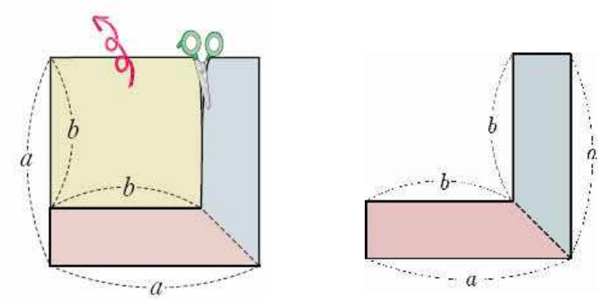
❶ 위 9개의 사각형의 넓이의 합을 a의 다항식으로 나타내어 보자.

❷ 위 9개의 사각형을 모두 이용하여 하나의 정사각형으로 나타내어 보고, 그 넓이를 a의 식으로 나타내어 보자.

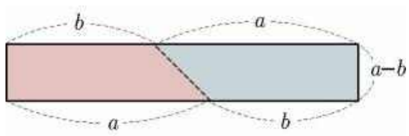
❸ 위 ❶, ❷의 결과를 등식으로 나타내어 보자.

a^2-b^2의 인수분해는 어떻게 할까?

다음 〈그림 1〉은 한 변의 길이가 a인 정사각형 모양의 종이에서 한 변의 길이가 b인 정사각형을 잘라 낸 도형이다. 또, 〈그림 2〉는 〈그림 1〉에서 점선을 따라 잘라 내어 직사각형 모양으로 다시 배열한 것이다.



〈그림 1〉



〈그림 2〉

❶ 〈그림 1〉의 도형의 넓이를 a, b의 다항식으로 나타내어 보자.

❷ 〈그림 2〉에서 직사각형의 넓이를 a, b의 식으로 나타내어 보자.

❸ 위 ❶, ❷의 결과를 등식으로 나타내어 보자.

$x^2+(a+b)x+ab$, $acx^2+(ad+bc)x+bd$의 인수분해는 어떻게 할까?

곱이 8인 두 정수에 대하여 다음을 알아보자.

❶ 곱이 8인 두 정수를 모두 찾고, 그 합을 구해 보자.

곱이 8인 두 정수	두 정수의 합
1, 8	9

❷ 곱이 8인 두 정수 중에서 두 정수의 합이 6인 경우를 찾아보자.

❸ 위의 ❶, ❷를 이용하여 다음을 만족하는 두 정수 a, b를 찾아보자.

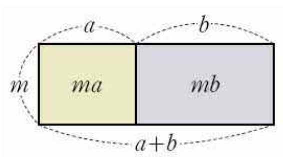
$$x^2+(a+b)x+ab=x^2+6x+8$$

◦ 다항식을 인수분해 할 수 있게 한다.

두 항의 최대공약수를 찾아 $ma+mb=m(a+b)$과 같이 고치는 것이 인수분해에서 기본임을 알게 한다. 다항식의 형태를 파악하여 적절한 인수분해 공식을 적용하고, 인수분해를 능숙하게 할 수 있게 한다. 인수분해는 곱셈 공식을 이용할 수 있는 간단한 형태를 주로 다룬다.

분배법칙을 이용하여 $m(a+b)$를 전개하면 $ma+mb$이므로 다음과 같이 인수분해할 수 있다.

$$ma+mb=m(a+b)$$



6.3. 교수학습 참고자료

대수 타일

'대수 타일(Algebra tiles)'은 중학교 수준에서 제시되는 다항식의 인수분해에 대한 학생들의 직관적 이해를 돕기 위해 사용되는 교구이다. 특히 우리나라 수학 교과서에는 두 개의 변수를 나타내는 타일을 이용하여 다항식의 지도나 인수분해의 지도에 이용하는 내용이 명시적으로 제시되고 있다.

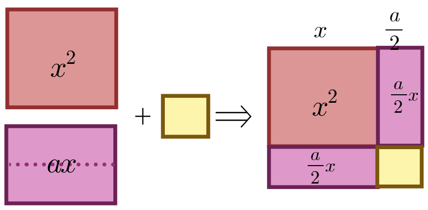
대수 타일은 추상적인 대수 성질을 기하학적으로 접근하는 좋은 학습상황을 제공해 줌으로써 수학적 연결성을 추구하는 수학 수업에 적극 활용된다.

대수 타일은 두꺼운 종이로 직접 제작하여 학생들이 조작해볼 수 있고 수학 1의 동류항의 계산, 수학 2의 다항식의 계산과 곱셈 공식에서 활용할 수 있다.

(출처 : 한국교육과정평가원 교수 학습 개발 센터 www.classroom.re.kr)

완전제곱식과 정사각형

주어진 다항식을 완전제곱식이 되게 한다는 것을 기하학적인 측면과 연결하면 정사각형을 만들 때 필요한 조각을 찾는 것과 같다고 이해하면 된다.



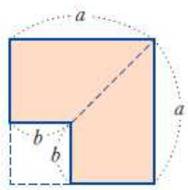
$$x^2+ax+\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(x+\frac{a}{2}\right)^2$$

예를 들어 다항식 x^2+ax에 상수항을 더하여 완전제곱식으로 만드는 것을 정사각형 만들기와 연결하여 설명하면 위의 그림과 같다. 즉, 넓이가 ax인 조각을 둘로 나누어 x^2의 옆과 아래에 배치하고 나면 작은 정사각형 조각이 필요함을 알 수 있다. 이 조각은 한 변의 길이가 일차항의 계수 a의 $\frac{1}{2}$과 같으므로 이 정사각형 조각의 넓이는 $\left(\frac{1}{2}a\right)^2$이 된다.

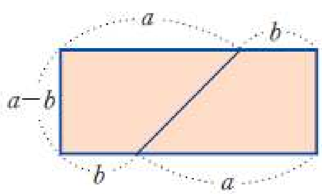
따라서 x^2+ax+b 가 완전제곱식이 되려면 $b=\left(\frac{1}{2}a\right)^2$이어야 한다.

$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$의 기하적 의미

다음 그림과 같이 한 변의 길이가 a인 정사각형에서 [그림1]과 같이 한 변의 길이가 b인 정사각형을 잘라 낸 후 남은 종이를 점선을 따라 자른 두 조각을 [그림2]와 같이 붙여서 직사각형을 만든다.



[그림 1]

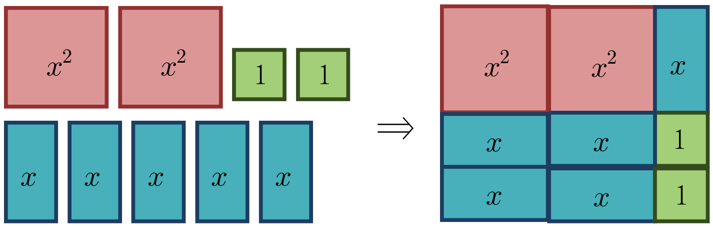


[그림 2]

이때 [그림 1]의 도형의 넓이는 a^2-b^2이고 [그림 2]의 직사각형의 가로의 길이가 $a+b$이고 세로의 길이가 $a-b$이므로 직사각형의 넓이는 $(a+b)(a-b)$이다. 이때 [그림 1]과 [그림 2]의 도형의 넓이는 같으므로 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$가 성립한다.

$acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d)$

다음 [그림 1]과 같이 넓이가 다른 세 종류의 대수막대 9개를 이용하여 [그림 2]와 같이 직사각형을 만든다.



[그림1] [그림2]

이때 [그림 1]의 도형의 넓이의 합은 x^2이 2개, x가 5개, 1이 2개이므로 $2x^2+5x+2$이다. [그림 2]의 직사각형의 가로의 길이가 $2x+1$이고 세로의 길이가 $x+2$이므로 직사각형의 넓이는 $(2x+1)(x+2)$이다. 이때 [그림 1]과 [그림 2]의 도형의 넓이는 같으므로 $2x^2+5x+2=(2x+1)(x+2)$이 성립한다.

인수분해와 곱셈 공식을 이용한 퍼즐

가로와 세로의 일차식이 만나는 칸에 두 식의 곱이 되는 다항식이 있다. 아래 표의 빈칸을 모두 채우시오.

(예) $6x^2-5x-4$=A×$(2x+1)$임을 이용해 A의 식을 구한 후 B=A×$(x-2)$를 이용하여 B의 식을 구한다.

×	A		
$2x+1$	$6x^2-5x-4$		
$x-2$	B	$x^2+3x-10$	
	$3x^2+11x-20$		$2x^2+7x-15$

참고 자료 - 2x−4를 인수분해하면?

영인자(zero divisor)가 없는 가환환을 정역(integral domain)이라 한다. 예를 들어 정수 전체의 집합 Z, 유리수 전체의 집합 Q, 다항식환 R[x]는 모두 정역이다. 정역 D의 0이 아닌 원소 a가 다음 두 조건을 모두 만족시킬 때, a는 'D에서 기약(irreducible in D)'이라 한다.

(1) 곱셈에 대한 a의 역원이 D에 없다.

(2) a=bc이면 곱셈에 대한 b 또는 c의 역원이 D에 있다.

예를 들어 2는 Z에서 기약이지만, Q에서는 기약이 아니다.

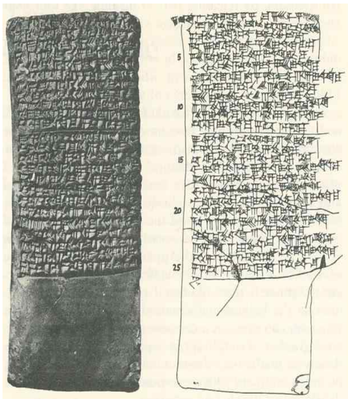
특히 다항식환 R[x]에서 기약인 다항식을 기약다항식이라 하고, 다항식을 기약다항식들만의 곱으로 나타내는 것을 그 다항식을 인수분해한다고 한다. 그런데 어떤 다항식 f(x)가 기약다항식인지 아닌지는 그 다항식이 어떤 다항식환의 원소인가에 따라 달라진다.

예를 들어 다항식 2x−4는 Q[x]에서는 기약이지만, Z[x]에서는 기약이 아니다. 따라서 2x−4는 Q[x]에서는 더 이상 인수분해되지 않지만, Z[x]에서는 두 기약다항식 2와 x−2의 곱인 2(x−2)로 인수분해된다.

7. 이차방정식

7.1. 이론적 배경

(1) 이차방정식의 풀이의 역사



▲ 바빌로니아의 점토판

기원전 6세기 경 고대 바빌로니아의 사람들은 연립방정식 $\begin{cases} x+y=p \\ xy=p \end{cases}$ 과 이차방정식 $x^2+q=px$이 동치임을 알고 있었고, 다음과 같은 공식을 사용하여 이차방정식을 풀었다.

$$x=\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}+\frac{p}{2}$$

메소포타미아에서도 이차방정식을 음이 아닌 p와 q에 대해 다음과 같은 표준형으로 나누어 풀었다.

$x^2+px=q,\quad x^2=px+q,\quad x^2+q=px$

알렉산드리아 시대 후기 디오판토스(Diophantos; 246~330?)도 이미 이차방정식의 해법을 알고 있었다고 알려져 있다.(○쪽 참고)

인도의 브라마굽타(Brahmagupta; 598~670)는 이차방정식 $ax^2+bx=c$의 해를 다음과 같이 구하였다.

$$x=\frac{\sqrt{4ac+b^2}-b}{2a}$$

9세기 전반 알콰리즈미(Alkhwarizmi; 780~850)는 브라마굽타의 영향을 받아 기하적 방법 뿐만 아니라 대수적인 방법으로도 이차방정식을 풀었다.(○쪽 참조) 그는 양수의 근만 있는 이차방정식을 다루었으며 두 양의 근 중 작은 쪽만 근으로 취급하였다.

1594년 스테빈(Stevin; 1548/49~1620)은 모든 이차방정식을 풀 수 있는 근의 공식을 찾았다. 오늘날과 같은 근의 공식은 1637년 데카르트가 정리했다.

동양에서는 중국의 수학책 ‘구장산술(九章算術)’ 제 9장 ‘구고’에 다음과 같은 문제와 해법이 있다.

> 지금 정사각형의 (성벽으로 둘러싸인) 마을이 있는데, 그 크기는 알지 못한다. 각 변의 가운데에 문이 나 있고, 북문을 나와서 20보 되는 곳에 나무가 있다. 남문에서 14보 나와서 방향을 바꿔 서쪽으로 1775보 가면 그 나무가 보인다. 마을의 한 변은 얼마인가?
>
> **해법:** 북문에서 나온 보수에 서쪽으로 걸은 보수를 곱하고, 이를 2배로 하여 실이라 하자. (북문에서 나온 보수에) 남문에서 나온 보수를 더하여 종법이라 하여 평방을 풀면 곧 마을의 한 변을 얻는다.

여기서 ‘실’은 상수항, ‘종법’은 일차항, ‘평방’은 이차 방정식을 뜻한다. 그래서 이 해법은 다음의 이차방정식의 근이 마을 한 변의 길이라는 말이다.

$$2\times 20\times 1775=(20+14)x+x^2,\ \text{즉}\ x^2+34x-71000=0$$

한편 동아시아 산학에서는 차수와 계수의 크기에 관계없이 모든 다항 방정식에 적용할 수 있는 일반적인 풀이 방법이 있었다. 이 방법은 해의 어림값을 구하는 방법이지만, 정수 또는 유한 소수로 나타내어지는 해는 정확하게 구할 수 있다. 이 방법은 현재의 조립제법으로 설명할 수 있다.

예를 들어 $x^2-27x-160=0$ 의 양수근을 산학의 방법으로 구해 보자. 30을 실제 근과 가까운 값이라 생각하고 다음과 같이 조립제법을 이용해서 $x^2-27x-160$을 x-30 으로 나누고 그 몫 x+3을 다시 x-30 으로 나눈다.

$$\begin{array}{r|rrr}
30) & 1 & -27 & -160 \\
 & & 30 & 90 \\
\hline
 & 1 & 3 & -70 \\
 & & 30 & \\
\hline
 & 1 & 33 &
\end{array}
\qquad
\begin{aligned}
& x^2-27x-160 \\
&= (x-30)(x+3)-70 \\
&= (x-30)\{(x-30)+33\}-70 \\
&= (x-30)^2+33(x-30)-70
\end{aligned}$$

이렇게 조립제법을 이용하면 다항식 $x^2-27x-160$ 을 x-30 에 관한 식 $(x-30)^2+33(x-30)-70$으로 바꿀 수 있는데, 상수항의 절댓값이 작아졌다. 이제 y=x-30 으로 놓은 식 $y^2+33y-70$ 의 근 2를 추측하여 다음 계산을 하자.

$$\begin{array}{r|rrr}
2) & 1 & 33 & -70 \\
 & & 2 & 70 \\
\hline
 & 1 & 35 & 0
\end{array}
\qquad
\begin{aligned}
& y^2+33y-70 \\
&= (y-2)(y+35)+0
\end{aligned}$$

y=x-30 이므로 다음과 같고, x=30+2=32는 주어진 방정식의 양수 근이다.

$$\begin{aligned}
x^2-27x-160 &= (x-30)^2+33(x-30)-70 \\
&= y^2+33y-70 && [\lrcorner\ y=x-30] \\
&= (y-2)(y+35)+0 \\
&= (x-30-2)(x+5)=0 && [\lrcorner\ y=x-30]
\end{aligned}$$

위와 같이 방정식을 푸는 방법은 이차방정식뿐만 아니라 임의의 고차 방정식에 똑같이 적용할 수 있다. 처음에 근을 잘못 추측해도 상수항의 크기 변화를 보고 적절한 값을 이용해서 계속하면 된다. 정수 근이 없는 경우에는 이를 반복해서 소수점 아래의 값을 구해 근삿값을 얻을 수 있다. 이 방법은 19세기 초에 루피니(Ruffini, 1765~1822)와 호너(Horner, 1786~1837)가 발표했는데, 호너의 방법이라 부르고 있다. 그런데 동아시아에서는 13세기에 이미 이런 방법을 터득하고 있었다.

<구장산술>에 있는 제곱근풀이와 세제곱근풀이 방법을 이 시기의 수학자들은 임의의 거듭제곱근을 구하는 증승개방법(增乘開方法)으로 발전시켰고, 이를 더욱 개발해서 임의의 다항 방정식을 풀 수 있었다.

물론 앞에서 설명한 대로 방정식의 계수를 위 아래로 배열하고 계수들의 자리를 옮기는 과정을 거쳤지만, 본질적으로 호너의 방법과 일치한다.

(2) 방정식의 대수적 해법의 가능성

간단한 모양의 삼차방정식은 메나이크모스(Menaechmos; 375~325 B.C.)가 정육면체의 문제에 관련해서, 아르키메데스(Archimedes; 287?~212 B.C.)가 구의 부피의 문제에 관련해서 다루었다. 또, 카얌(Khayyam, Omar; 1040~1123)은 삼차방정식을 원뿔곡선의 교점 작도를 통하여 풀었다.

삼차방정식의 해법에 처음으로 성공한 사람은 페로(Ferro; 1465?~1526)이다. 그는 $x^3+mx=n$과 같은 모양의 삼차방정식의 해법을 발견하였다고 한다.

오늘날 카르다노(Cardano, G.; 1522~1565)의 방법으로 알려진 삼차방정식의 일반적인 해법이 발견된 후에 사차방정식의 해법이 카르다노의 제자인 페라리(Ferrari, L.; 1522~1565)에 의해 발견되었다. 카르다노는 1545년에 삼차와 사차방정식의 해법을 그의 저서 'Ars Magna'에 발표하였다.

그 후 약 300년간 많은 수학자들이 5차 이상의 방정식의 근의 공식을 발견하려고 고심하였다. 그러나 해를 거듭해도 해법이 발견되지 않으므로 계수에 가감승제와 근호의 유한 회의 조작을 반복하는 대수적 해법은 없다는 증명을 시도하게 되었다.

드디어 아벨(Abel, N. H. ; 1802~1829)은 1826년에 '5차 방정식은 일반적으로 대수적으로 풀 수 없다.'는 정리를 증명하였다.

그 후 갈루아(Galois, E.; 1811~1832)에 의하여 대수방정식이 대수적으로 풀 수 있는지의 여부는 근에 대한 치환군(아벨군)의 군론적 구조에 따라 명백해진다는 사실이 밝혀졌다.

이들은 증명 과정에서 '군'의 개념을 생각해 내었다. 이리하여 방정식의 해법에 관련된 수학의 새로운 영역으로 '군(群)'이 탄생하였는데, 이 군의 이론은 20세기 수학의 추상주의의 계기가 되어 수학 전반에 큰 영향을 주었다. 나아가 군의 이론은 고차방정식 외에도 삼각방정식, 대수방정식, 벡터방정식, 미분방정식, 적분방정식 등 수학의 여러 분야에 관련되었다.

한편 제2차 세계 대전 중에 미국과 영국에서 OR(Operations research, 작전 연구)이 탄생하였는데, 여기에는 수학의 방정식과 부등식이 도입되었다. 처음 군사적 목적에서 시작된 선형계획법은 그 후 여러 방면에서 널리 이용되었다. 또한 현재는 컴퓨터를 이용하여 미지수가 수천 개나 되는 방정식과 부등식의 해도 구할 수 있다.

16세기에는 일종의 놀이로서, 19세기에는 순수 학문으로서, 그리고 20세기에는 사회 과학이나 인문 과학과도 관련을 가지면서 방정식은 여러 가지 형태로 계속 발전해 가고 있는 것이다.

(3) 삼차방정식의 해법

다음은 카르다노의 해법이라고 불리는 삼차방정식의 해법이다.

$$x^3+mx=n$$

$$(a-b)^3+3ab(a-b)=a^3-b^3$$

위에서 a와 b를 3ab=m, $a^3-b^3=n$을 만족시키도록 선택하면 근 x=a-b 로 주어진다. a와 b는 다음과 같다.

$$a=\sqrt[3]{\frac{n}{2}+\sqrt{(\frac{n}{2})^2+(\frac{m}{3})^3}}\ ,$$

$$b=\sqrt[3]{-\frac{n}{2}+\sqrt{(\frac{n}{2})^2+(\frac{m}{3})^3}}$$

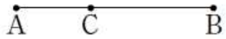
따라서 x는 다음과 같은 '카르다노-타르탈리아 공식'에 의해 정해 진다.

$$x=\sqrt[3]{\frac{n}{2}+\sqrt{(\frac{n}{2})^2+(\frac{m}{3})^3}}-\sqrt[3]{-\frac{n}{2}+\sqrt{(\frac{n}{2})^2+(\frac{m}{3})^3}}$$

7.2. 교육과정 및 교과서 내용

7 이차방정식

균형과 조화의 비, 황금비



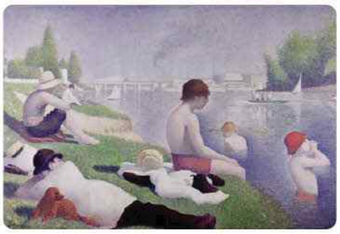
황금비는 선분 AB 위에 한 점 C를 잡아 선분을 두 부분으로 나누었을 때

$\overline{AB}:\overline{BC}=\overline{BC}:\overline{AC}$

를 만족하는 비를 말한다.

황금비는 균형과 조화를 나타내는 비로서 옛날부터 조각, 회화, 건축 등에서 널리 활용되어 왔고 자연, 인체에서도 쉽게 찾아볼 수 있으며, 고대 그리스 시대부터 가장 안정적이고 아름다움을 주는 비로 인식되어 왔다.

그리스의 파르테논 신전의 정면의 폭과 높이의 비율이 황금비이고 밀로의 비너스상, 쇠라(Seurat, G. P. ; 1859~1891)의 미술 작품 '아스니에르에서의 물놀이', 앵무조개 등에서도 황금비를 찾아볼 수 있다.



⇧ 아스니에르에서의 물놀이

생각해 봅시다

❶

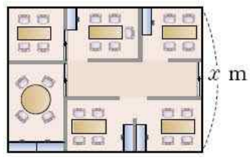
❷

① 이차방정식과 그 해의 의미를 이해하고, 이를 풀 수 있다.

◦ 이차방정식의 뜻과 그 해의 의미를 이해하게 한다.

(x에 관한 이차식)=0으로 나타낼 수 있는 방정식이 x에 관한 이차방정식임을 알게 한다. 이차방정식은 일반적으로 $ax^2+bx+c=0(a,b,c$는 실수$,a\neq 0)$과 같이 나타낼 수 있음을 알고, 이 방정식을 참이 되게 하는 x의 값을 이 방정식의 해 또는 근이라고 함을 이해하게 한다.

어느 사무실을 조사하니 세로의 길이가 가로의 길이보다 $3\,\mathrm{m}$만큼 짧은 직사각형 모양이었다.



❶ 세로의 길이를 $x\,\mathrm{m}$라고 할 때, 가로의 길이를 x의 식으로 나타내어 보자.

❷ 사무실의 넓이가 $108\,\mathrm{m}^2$일 때, 다음 $\boxed{}$ 안에 알맞은 식을 써넣어 보자.

$$\boxed{}=108$$

이차방정식 $x^2-3x+2=0$에 대하여 다음을 알아보자.

❶ x가 5 이하의 자연수일 때, 아래 표를 완성해 보자.

x	1	2	3	4	5
x^2-3x+2					12

❷ 위의 ❶에서 $x^2-3x+2=0$을 참이 되게 하는 x의 값을 모두 말해 보자.

◦ 두 인수의 곱이 0이 되는 등식의 성질을 이해하게 한다.

'$ab=0$이면 $a=0$ 또는 $b=0$'이 성립하고, '$a=0$또는 $b=0$이면 $ab=0$'는 사실을 이해하고 이를 기초로 「$ab=0$」과 「$a=0$ 또는 $b=0$」이 동치임을 이해하게 한다.

◦ 인수분해를 이용하여 이차방정식을 풀게 한다.

x에 관한 이차방정식에서 이차식을 2개의 일차식의 곱으로 나타내고 여기서 '$ab=0$이면 $a=0$' 또는 $b=0$이라는 사실을 적용하여 이차방정식을 풀게 한다.

a, b가 실수일 때,

'$a=0$ 또는 $b=0$'과 '$ab=0$'

에 대하여 다음을 알아보자.

❶ 다음에서 '$p \rightarrow q$'로 이루어지는 각 명제의 참, 거짓을 빈칸에 써넣어 보자.

결론(q) / 가정(p)	$a=0$ 또는 $b=0$	$ab=0$
(1) $a=0,\ b=0$		
(2) $a=0,\ b\neq 0$	참	
(3) $a\neq 0,\ b=0$		
(4) $a\neq 0,\ b\neq 0$		거짓

❷ a, b의 값에 따라

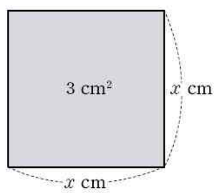
'$a=0$ 또는 $b=0$'과 '$ab=0$'

의 참, 거짓이 항상 일치하는지 친구들과 토론해 보자.

◦ 완전제곱식을 이용하여 이차방정식을 풀게 한다.

이차방정식 $ax^2+bx+c=0\,(a\neq 0)$의 양변을 a로 나눈 다음 완전제곱식을 이용한 방법으로 변형하면, $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ (단, $b^2-4ac\geq 0$)와 같은 근의 공식을 얻을 수 있음을 이해하게 한다. 이러한 방법과 근의 공식을 이용하여 이차방정식을 풀 수 있게 한다. 이차방정식을 푸는 데 적절한 방법을 선택하여 사용할 수 있게 한다. 이차방정식은 실수해를 가지는 경우만 다룬다. (완전제곱식)=0의 해는 실제로는 근이 하나로 나타나지만 서로 같은 두 근이므로 중근이 됨을 알게 한다.

오른쪽 그림과 같이 넓이가 $3\,\mathrm{cm}^2$인 정사각형에 대하여 다음을 알아보자.



❶ 정사각형의 한 변의 길이를 구해 보자.

❷ 정사각형의 한 변의 길이를 $x\,\mathrm{cm}$라고 할 때, x에 대한 이차방정식을 세워 보자.

❸ 위의 ❷에서 세운 이차방정식의 해 중에서 ❶의 결과와 다른 것이 있는지 토론해 보자.

다음은 이차방정식의 좌변을 완전제곱식으로 고치는 과정이다. $\boxed{\quad}$ 안에 알맞은 수를 써넣어 보자.

❶ $x^2+6x-2=0$

$x^2+6x+\boxed{\quad}=2+\boxed{\quad}$

$(x+\boxed{\quad})^2=\boxed{\quad}$

❷ $x^2-x-1=0$

$x^2-x+\boxed{\quad}=1+\boxed{\quad}$

$(x-\boxed{\quad})^2=\boxed{\quad}$

다음은 이차방정식 $2x^2-3x-2=0$의 좌변을 완전제곱식으로 고치는 과정이다. 또, 각 식의 오른쪽에는 다음 식을 얻기 위한 방법을 써놓은 것이다. 빈칸을 채워 보자.

$$2x^2-3x-2=0$$

양변을 2로 나누고 상수항을 우변으로 이항한다.

$$x^2-\frac{3}{2}x=1$$

x의 계수의 $\frac{1}{2}$의 제곱을 양변에 더한다.

$$x^2-\frac{3}{2}x+\square^2=1+\square^2$$

좌변을 완전제곱식으로 나타낸다.

$$\left(x-\square\right)^2=\frac{25}{16}$$

② 이차방정식을 활용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있다.

◦ 이차방정식을 활용하여 여러 가지 문제를 해결하게 한다.

이차방정식의 활용 문제는 가급적 생활 주변에서 자주 접하는 소재를 이용하고, 문제의 해결에 앞서 그 문제가 가지고 있는 의미를 이해할 수 있게 한다. 문제의 답에 관심을 가지게 하기보다 그 풀이 과정에 관심을 가지게 하여 학생들의 문제해결력이 신장될 수 있도록 지도한다. 구한 해 중 문제의 뜻에 맞는 것만을 답으로 택할 수 있게 한다.

가로의 길이가 세로의 길이보다 $3\,\mathrm{m}$만큼 더 긴 직사각형 모양의 텃밭의 넓이가 $70\,\mathrm{m}^2$일 때, 텃밭의 가로의 길이를 구하여라.

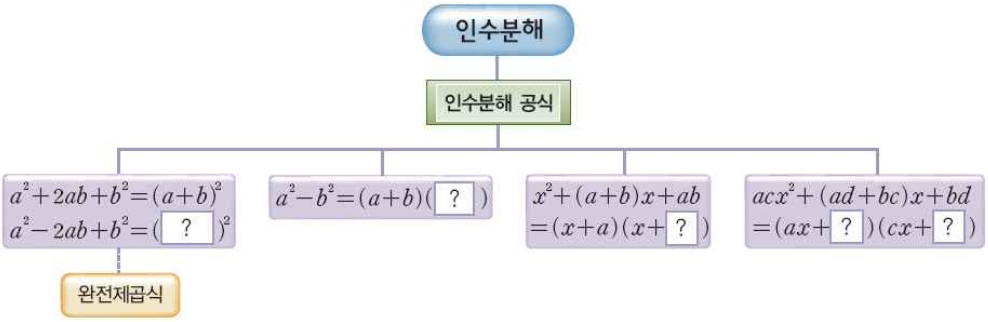
▶ 이차방정식을 활용한 문제 해결 과정

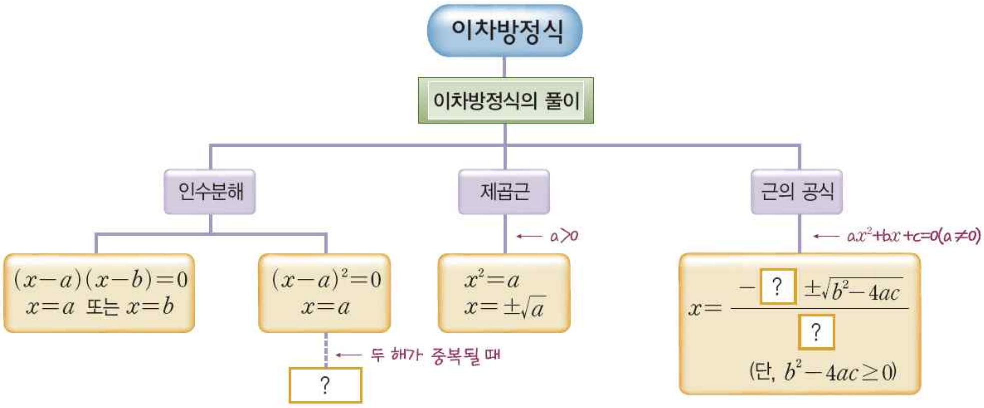
❶ 문제의 뜻을 파악하고 구하려고 하는 값을 미지수 x로 놓는다.

❷ 문제 중에 있는 수량 사이의 관계를 찾아 이차방정식을 세운다.

❸ 이차방정식을 풀어 미지수 x의 값을 구한다.

❹ 구한 해가 문제의 뜻에 맞는지 확인한다.

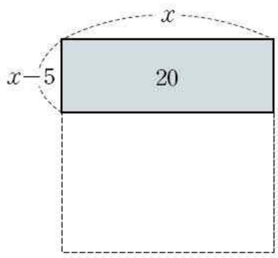




이차방정식의 표현

기원전 1700년경부터 고대 수학자들은 오늘날 이차방정식으로 풀 수 있는 기하 문제를 생각하였다. 기호 사용을 몰랐던 유클리드(Euclid ; ?B.C. 325~?B.C. 265)는 아마도 이차방정식을 기하적으로 생각하여 다음과 같이 서술했을 것이다.

"한 선분과 그 선분을 다섯만큼 줄인 선분으로 이루어진 직사각형의 넓이는 스물이 된다."



유클리드로부터 500년 후에 디오판토스(Diophantos ; ?200~?284)가 처음으로 기호를 사용하였는데 미지수 x를 ζ로, x^2을 $\Lambda\gamma$와 같이 따로따로 사용하여

$$\Lambda\gamma \quad ⋔ \quad \eta\zeta \quad \epsilon\sigma\tau\iota \quad \chi$$

과 같이 나타낼 수 있었다.

그 이후 1500년대 후반에 비로소 비에타(Viéta, F. ; 1540~1603)에 의하여 기호와 계수를 사용하여 나타낸 이차방정식의 모양이 나타나게 되는데 비에타는

IAQ−5A aequatur 20

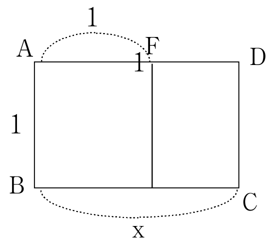
과 같이 나타내었다. 1637년에 데카르트(Descartes, R. ; 1596~1650)에 의하여 거듭제곱 표현이 사용되면서 점차

$$x^2-5x=20$$

과 같은 현대적인 표현이 가능해졌다.

7.3. 교수학습 참고자료

황금사각형



옛날부터 사람들은 오른쪽 그림과 같은 직사각형 ABCD에서 정사각형 ABEF를 떼어 낸 나머지 직사각형 DFEC가 처음 직사각형과 닮은 도형이 될 때, 처음 직사각형을 황금 사각형이라 불렀고, 이 직사각형을 가장 아름다운 모양의 직사각형이라고 생각했다.

다음 물음에 답하여라.

(1) 처음 직사각형의 가로의 길이를 x, 세로의 길이를 1이라 할 때, 닮음을 이용하여 x에 대한 식을 세워 보자.

1:(x−1)=x:1, x(x−1)=1, $x^2-x-1=0$

(2) x에 대한 식을 세울 때, 그 식의 특징을 말해 보자.

(x에 관한 이차식)=0

포괄적 OR(inclusive OR)과 배타적 OR(Exclusive OR)

(1) 포괄적 OR

AB=0 ⇔ A=0 또는 B=0

여기에서 '또는'의 의미는 '둘 중 아무거나'의 의미이다.

A=0 일 수도 있고, B=0일 수도 있다. 그리고 A=0 이고 B=0일 수도 있다.

(2) 배타적 OR

(x-2)(x-1)=0 ⇔ x=2 또는 x=1

여기에서 '또는'의 의미는 '둘 중에 한 가지'라는 의미이다.

x=2이면서 x=1일 수는 없다.

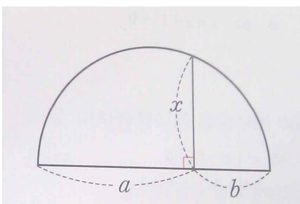
이차방정식에서 해를 나타낼 때 쓰이는 '또는'은 배타적 의미이다.

이차방정식의 기하학적 해법

(1) 비례를 이용한 방법

a, b, c가 주어진 선분일 때 다음 비를 만족하는 선분 x를 작도한다.

a: x = x: b



이 방법은 다음 방정식의 기하학적인 해를 제공해 준다.

$$x^2=ab$$

(2) 넓이를 이용한 방법

주어진 사각형이 정사각형인 경우 $\overline{AB}$의 길이를 a로 표시하고 $\overline{AQ}$의 길이를 x라 하고 적용된 직사각형 BQRC의 넓이와 동일한 정사각형 EFGH의 한 변의 길이를 b로 나타내면 다음의 방정식을 얻을 수 있다.

$x(x-a)=b^2,\ x^2-ax-b^2=0$

디오판토스의 산학(Arithmetica)

1권은 미지수가 하나인 방정식에 관한 문제를 다루고 있고 나머지 책에서는 두 개 또는 세 개의 미지수를 갖는 2차 또는 고차의 부정방정식에 관한 문제를 다루고 있다.

디오판토스는 다음과 같은 세 가지 형태의 방정식에 관심을 가졌다.

$ax^2+bx=c,\ ax^2=bx+c,\ ax^2+c=bx$

이 식들은 오늘날 이차방정식의 일반형 $ax^2+bx+c=0$의 하나로 표현될 수 있는 것이다.

그 시대의 다른 수학자와 마찬가지로 디오판토스도 단지 양의 유리수만을 해로 인정하고 있고 대부분의 경우에 하나의 답만을 구했는데, 음수가 아닌 유리수 해를 구하는 방정식을 디오판토스의 방정식이라고 하기도 한다.

인도의 수학

인도에서 이차방정식을 취급하기 시작한 것은 기원전 20세기경의 일로서 일차항을 뺀 특수한 이차방정식과 각 항이 모두 있는 이차방정식 등이 다루어졌다.
바스카라의 책에는 이차방정식에 관련된 다음과 같은 문제가 있다.

원숭이의 무리 중에서 $\frac{1}{8}$의 제곱이

숲 속에서 떠들며 뛰어 놀고 있다.

또, 그 밖에도 12마리가 놀고 있다.

그들은 몇 마리인가?

원숭이의 수를 x 마리라 하면 $\frac{1}{64}x^2+12=x$가 성립하므로 원숭이의 수를 구할 수 있다.

낙하하는 물체의 t 초 후의 높이

낙하하는 물체의 t 초 후의 높이는 시간에 관한 이차식으로 표현된다.

공기의 저항을 무시하면 지표면 근처의 동일한 장소에서 낙하하는 물체는 물체의 질량, 모양, 크기 등에 관계없이 일정한 가속도가 생긴다. 이 가속도는 지구의 중력에 의해 생기므로 중력 가속도라 하고 9.8 m/s^2이다. 낙하하는 물체이므로 가속도를 -9.8m/s^2이라 하자.

(중력가속도)= $\frac{dv}{dt}$= -9.8 , dv= -9.8 dt

양변을 적분하면 $v-v_0$= -9.8t , v= v_0 - 9.8t =$\frac{ds}{dt}$

ds = s- s_0= (v_0 - 9.8t) dt

∴ s= s_0 + v_0t - 4.9t^2

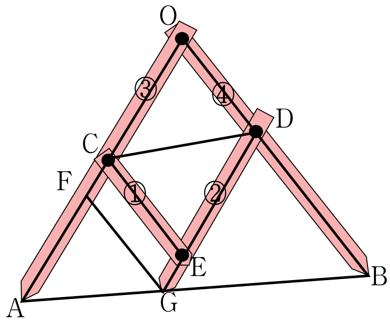
황금분할기의 원리

$\triangle OAB$ 에서 $\overline{OB} // \overline{FG}$ 이고, $\overline{OA} // \overline{DG}$ 이면, $\triangle AOB \backsim \triangle AFG \backsim \triangle GDB$ 이다.

$\overline{AF} : \overline{FO} = \overline{OD} : \overline{DB} = \overline{AG} : \overline{GB}$ 이다.

즉, 점 F와 D를 각각 $\overline{AO}$ 와 $\overline{OB}$ 를 같은 비율로 내분하는 점으로 잡으면 점 G도 $\overline{AB}$ 를 같은 비율로 내분하게 된다.

특히, 이 비율이 황금비라면 점 G는 $\overline{AB}$ 를 황금비로 내분하게 된다.



8. 선생님, 질문 있어요. - 문자와 식

1. 다항식 $x^2+3x+2\times 0$ 의 항의 개수는 2개인가? 3개인가? 왜 그런가?

2. “단항식은 항이 1개인 식이고, 다항식은 항이 2개 이상인 식이다.”에 대한 자신의 생각을 쓰고, 교과서에서는 어떻게 설명하고 있는지 찾아보시오.

3. 다항식 $3x+4y-1$ 의 계수의 합은 얼마인가? 왜 그런가?

4. 다음 증명에 의하여 1 = 0 이다. 이에 대한 자신의 생각을 쓰시오.

$$\begin{aligned} x=1 \quad \Rightarrow \quad & x^2=x \\ \Rightarrow \quad & x^2-1=x-1 \\ \Rightarrow \quad & (x-1)(x+1)=x-1 \\ \Rightarrow \quad & (x+1)=1 \\ \Rightarrow \quad & x+1=0 \\ \Rightarrow \quad & x+1=0 \\ \Rightarrow \quad & 1=0 \end{aligned}$$

5. 다음 증명에 의하면 모든 수는 자기 자신보다 크다. 이에 대한 자신의 생각을 쓰시오.

a가 양수라 가정하고, $b=a$라 하자. 그러면 $ab=b^2$

$\Rightarrow ab-a^2=b^2-a^2$

$\Rightarrow a(b-a)=(b+a)(b-a)$

$\Rightarrow a=b+a$

$\Rightarrow a>a$

6. 다음 증명에 의하면 모든 양수는 자기 자신보다 크다. 이에 대한 자신의 생각을 쓰시오.

a가 양수라 가정하고, $b=\frac{1}{2}a$ 라 하자.

그러면 $a>b>0$ 이고,

$ab>b^2$

$\Rightarrow ab-a^2>b^2-a^2$

$\Rightarrow a(b-a)>(b+a)(b-a)$

$\Rightarrow a>b+a$

$\Rightarrow a>a$

7. “~에 대하여 풀어라.”와 “~에 대한 식으로 나타내어라.”의 차이는 무엇인가? 교과서에서 이를 어떻게 다루고 있는지 찾아보고, 다음 문제에 대한 답을 제시하시오.

(1) 등식 $9x = 5(y-32)$ 를 x 에 대하여 풀어라.

(2) $y = 2x - 1$ 일 때, $3x - y - 2$ 를 x 에 대한 식으로 나타내어라.

8. 근의 공식은 이차방정식의 계수(a,b,c)가 복소수일때도 성립하는가? 성립하지 않는가? 왜 그런가?

9. 다음 풀이에 의하면 방정식 $x - x^2 = 1$ 의 해는 -1이다. 이에 대한 자신의 생각을 쓰시오.

$x - x^2 = 1$

$\Rightarrow x + \dfrac{1}{x} = 1$

$\Rightarrow x + \dfrac{1}{x} = x - x^2$

$\Rightarrow \dfrac{1}{x} = -x^2$

$\Rightarrow x^3 = -1$

$\Rightarrow x = -1$

10. 3차 방정식이나 4차 방정식의 일반적인 해법(근의 공식)은 없나요? 이에 관련된 자료를 조사하시오.

11. 다항식 $6x(x+\dfrac{1}{2})$ 의 인수는 무엇인가? 왜 그런가? 그리고 두 다항식 $6x(x+\dfrac{1}{2})$ 과 $2x^2$ 의 공통인수는 무엇인가? 왜 그런가?

12. 3차 이상의 방정식에서도 판별식이 정의되나요?

13. 3차 이상의 방정식에서 근과 계수와의 관계는 어떻게 되나요?

14. 다음 증명에 의하면 가장 큰 소수는 9973이다. 이에 대한 자신의 생각을 쓰시오.
$n > 9973$(n은 소수)이 존재한다고 가정하자.
n은 홀수이므로 $\dfrac{n+1}{2}$ 과 $\dfrac{n-1}{2}$ 모두 자연수이고, $n=(\dfrac{n+1}{2})^2-(\dfrac{n-1}{2})^2$ 이다.
$k=\dfrac{n+1}{2}, m=\dfrac{n-1}{2}$ 이라고 두면, $n=k^2-m^2=(k-m)(k+m)$ 이다.
$k-m$, $k+m$ 모두 자연수이므로, n은 합성수이다.
$\therefore$ 9973보다 큰 소수는 존재하지 않는다.

15. 조립제법이 무엇인지 구체적인 예를 들어 쓰고, 조립제법의 원리가 무엇인지 쓰시오.

16. 산술-기하 평균을 활용한 최솟값 구하기

(1) 다음 두 방법에 의해 $(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$의 최소값은 4이다. 이에 대한 자신의 생각을 쓰시오.

방법 1. $(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\geq 2\sqrt{xy}\times 2\sqrt{\frac{1}{xy}}=4$

방법 2. $(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=2+\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2+2\sqrt{\frac{x}{y}\frac{y}{x}}=4$

(2) 다음 두 방법에 의해 $(x+y)\left(\frac{4}{x}+\frac{1}{y}\right)$의 최소값은 8 또는 9이다. 이에 대한 자신의 생각을 쓰시오.

방법 1. $(x+y)\left(\frac{4}{x}+\frac{1}{y}\right)\geq 2\sqrt{xy}\times 2\sqrt{\frac{4}{xy}}=8$

방법 2. $(x+y)\left(\frac{4}{x}+\frac{1}{y}\right)=5+\frac{4y}{x}+\frac{x}{y}\geq 5+2\sqrt{\frac{4y}{x}\frac{x}{y}}=9$

(3) 다음 두 방법에 의해 $a^2+\frac{2}{a}$ 의 최소값은 $2\sqrt{2\sqrt[3]{2}}$ 이거나 3이다. 이에 대한 자신의 생각을 쓰시오.

방법 1. $a^2+\frac{2}{a}\geq 2\sqrt{2a}$ 이고, 등호는 $a^2=\frac{2}{a}$ 일 때 즉, $a=\sqrt[3]{2}$ 일 때 성립한다. 따라서 최솟값은 $2\sqrt{2\sqrt[3]{2}}$ 이다.

방법 2. $a^2+\frac{2}{a}=a^2+\frac{1}{a}+\frac{1}{a}\geq 3\sqrt[3]{a^2\frac{1}{a}\frac{1}{a}}=3$ 이므로, 최솟값은 3이다.