6장. 관계

출처

본 강좌 자료는 이산수학 (2학년 / 3학점/ 3시간 / 이론) 수업에서 사용한 교재 [이산수학 (수학으로 이해하는 디지털 논리), 한빛 아카데미 출판사] 의 내용 등을 출처로 작성하였음을 알리는 바입니다.

학습 목표

- 관계의 개념을 이해하고 표현해본다.
- 관계의 성질을 이해하고 판별하도록 한다.
- 여러 관계를 합성하여 새로운 관계의 도출을 유도한다.
- 동치관계와 부분순서관계를 이해한다.

학습 내용

- 관계의 개념
- 관계의 표현
- 관계의 성질
- 합성관계
- 동치관계
- 부분순서관계

이항 관계(Binary Relation)

- R을 집합 A에서 집합 B로 가는 이항 관계
- $R \subseteq A \times B = \{(a, b) |\ a \in A,\ b \in \mathrm{B}\}$
- $a\ R\ b \Leftrightarrow (a, b) \in R$
- 정의역 : $dom(R) = \{a | a \in A\}$
- 공변역 : $codom(R) = \{b | b \in B\}$
- 치역 : $ran(R) = \{b | (a, b) \in R\} \subseteq B$

예제

- 집합 $A = \{x|1 \leq x \leq 5, x$는 정수$\}$일 때, A 에서 A 로 가는 관계 R 은 다음과 같다. $R = \{(a, b)|\, a, b$는 홀수, $a{\in}A$, $b{\in}A\}$

  (1) 관계 R을 순서쌍으로 나타내라.

  (2) 관계 R의 정의역, 공변역, 치역을 구하라.

(풀이)

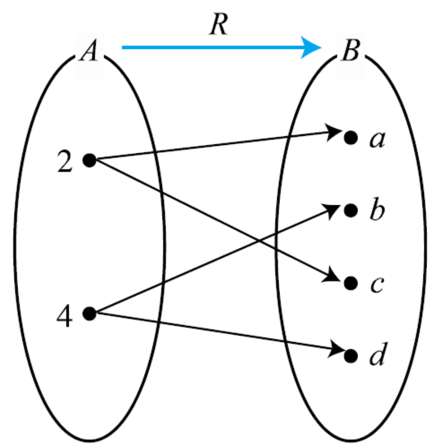
(1) $R = \{(1,1), (1,3), (1,5), (3,1), (3,3), (3,5), (5,1), (5,3), (5,5)\}$

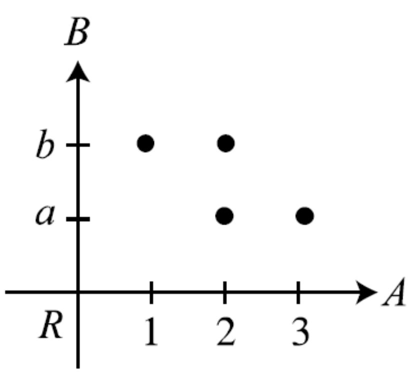
(2) $dom(R) = codom(R) = A = \{x|1 \leq x \leq 5, x$는 정수$\}$

(3) $ran(R) = \{1,3,5\}$

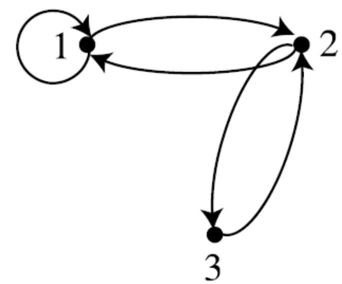
관계의 표현방법

- 순서쌍의 집합
- 화살표 다이어그램
- 좌표도표
- 관계행렬
- 방향그래프





$$M_R = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} a & b \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$



관계의 성질

- 반사관계 (Reflexive Relation)
  - $\forall a \in A$ 에 대해 $(a, a) \in R$
- 대칭관계(Symmetric Relation)
  - $a, b \in A$ 에 대해서 $(a, b) \in R$ 이면 $(b, a) \in R$
- 반대칭관계(Asymmetric Relation)
  - $a, b \in A$에 대해 $(a, b) \in R$일 때 $(b, a) \in R$이면 $a = b$
- 추이관계(Transitive Relation)
  - $a, b, c \in A$ 에 대해 $(a, b) \in R$이고 $(b, c) \in R$이면 $(a, c) \in R$

예제

■ 집합 $A = \{a, b\}$ 에 대해 관계가 다음과 같을 때, 각 관계는 어떤 성질인지 구분하라. (1) $R_1 = \emptyset$ (2) R_2=$\{(a, b)\}$

(풀이)

(1) ① $(a, a) \notin R_1$, $(b, b) \notin R_1$ ∴ not reflexive

② $(a, b) \notin R_1$이고 $(b, a) \notin R_1$ ∴ symmetric

③ $R_1 = \emptyset$ ∴ transitive

(2) ① $(a, a) \notin R_2$, $(b, b) \notin R_2$ ∴ not reflexive

② $(a, b) \in R_2$, $(b, a) \notin R_2$ ∴ not symmetric

③ $(a, b) \in R_2$, $a \neq b$일때 $(b, a) \notin R_2$ ∴ asymmetric.

④ $(a, b) \in R_2$에 추이될 다른 원소가 없다. ∴ transitive

합성관계

- 세 개 이상의 집합이 관계가 존재할 때, 이 관계로 새로운 관계를 만들어내는 것을 합성관계
- 집합 A에서 집합 B로 가는 관계 R 이 있고, 집합 B 에서 집합 C 로 가는 관계 S 가 있을 때, 집합 A 에서 집합 C 로 가는 관계 :

$$\boldsymbol{S \circ R = \{(a,c) \in A \times C | a \in A, b \in B, c \in C, (a,b) \in R, (b,c) \in S\}}$$

- 합성관계의 거듭제곱 $\boldsymbol{R^n}$:

$$\boldsymbol{R^n} = \begin{cases} R & if\ n = 1 \\ R^{n-1} \circ R & if\ \ n > 1 \end{cases}$$

- $\boldsymbol{S \circ R}$은 두 관계행렬 M_R과 M_S의 부울곱으로 구할 수 있다.

$$\boldsymbol{S \circ R} = M_{\boldsymbol{S \circ R}} = M_R \odot M_S$$

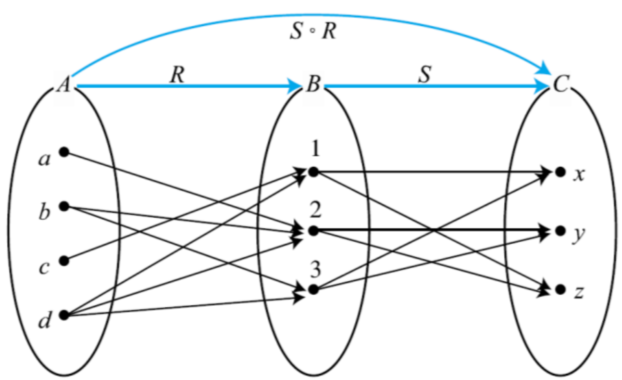
예제

■ 세 개의 집합 $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{1,2,3\}$, $C = \{x, y, z\}$ 에 대해 집합 A 에서 집합 B 로 가는 관계가 R 이고, 집합 B 에서 집합 C 로의 관계가 S 일 때, 합성관계 $S \circ R$을 구하라.

$R = \{(a,2),(b,2),(b,3),(c,1),(d,1),(d,2),(d,3)\}$

$S = \{(1,x),(1,z),(2,y),(2,z),(3,x),(3,y)\}$

(풀이)



$\therefore S \circ R = \{(a,y),(a,z),(b,x),(b,y),(b,z),(c,x),(c,z),(d,x),(d,y),(d,z)\}$

예제

- 관계 R , S 에 대해 관계행렬을 이용해 합성관계 $S \circ R$을 구하라.
  $R = \{(a,2),(b,2),(b,3),(c,1),(d,1),(d,2),(d,3)\}$
  $S = \{(1,x),(1,z),(2,y),(2,z),(3,x),(3,y)\}$

(풀이)

$$S \circ R = M_R \odot M_S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) & (0 \wedge 0) \vee (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 1) & (0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0) \\ (0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0) \vee (1 \wedge 1) & (0 \wedge 0) \vee (1 \wedge 1) \vee (1 \wedge 1) & (0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0) \\ (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) & (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) \vee (0 \wedge 1) & (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0) \\ (1 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0) \vee (1 \wedge 1) & (1 \wedge 0) \vee (1 \wedge 1) \vee (1 \wedge 1) & (1 \wedge 1) \vee (1 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \therefore S \circ R = \{(a,y),(a,z),(b,x),(b,y),(b,z),(c,x),(c,z),(d,x),(d,y),(d,z)\}$$

예제

- 집합 $A = \{1,2,3\}$에 대한 관계 R이 다음과 같을 때, R^3 을 구하라.

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(풀이)

$$R^2 = M_{R^2} = M_R \odot M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R^3 = M_{R^3} = M_{R^2} \odot M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\odot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0) & (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0) \vee (1 \wedge 0) & (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0) \vee (1 \wedge 1) \\ (0 \wedge 0) \vee (1 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0) & (0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0) \vee (1 \wedge 0) & (0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0) \vee (1 \wedge 1) \\ (0 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0) & (0 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0) \vee (1 \wedge 0) & (0 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0) \vee (1 \wedge 1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

동치관계

- 동치관계(Equivalence Relation)
  - 반사관계, 대칭관계, 추이관계가 모두 성립하는 관계
- 동치류(Equivalence Class)
  - 집합 $\boldsymbol{A}$ 에 대한 관계 $\boldsymbol{R}$ 이 동치관계일 때, 집합 $\boldsymbol{A}$ 의 각 원소 $\boldsymbol{a}$ 와 순서쌍을 이루는 원소들의 집합
  - $[\boldsymbol{a}] = \{\boldsymbol{x} | (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}) \in \boldsymbol{R}\}$
- 분할(Partition)
  - 집합 $\boldsymbol{A}$ 에 대한 관계 $\boldsymbol{R}$ 이 동치관계일 때, $\boldsymbol{A}$의 분할 $P = \{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$
  - $i = 1,2, \ldots, k$ 일 때, 동치류 $A_i \neq \emptyset$
  - $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k$
  - $i \neq j$ 면, $A_i \cap A_j = \emptyset$

예제

- 집합 $A = \{1,2,3,4\}$ 에 대한 관계

$R = \{(1,1),(1,2),(2,1)(2,2),(3,3),(3,4),(4,3),(4,4)\}$가 동치 관계인지 판별하라.

(풀이) $M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(1) 대각원소들이 모두 1이므로 ∴ 관계 R : 반사관계

(2) 대각선을 기준으로 마주보는 원소들이 같은 값을 가지므로 ∴ 관계 R: 대칭관계

(3) $R^2 = M_{R^2} = M_R \odot M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \therefore R^2 \subseteq R$

$R^3 = M_{R^3} = M_{R^2} \odot M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \therefore R^3 \subseteq R$

$\therefore R^n \subseteq R$ 이므로 추이관계다. ∴ 관계 R은 동치관계다.

예제

- 정수 집합 Z 에 대한 관계 $R = \{(a, b) \in Z \times Z | a = b\}$ 일 때, 관계 R이 동치관계인지 판별하라.

(풀이)

(1) $(a, b) \in R \Rightarrow a = b$. $\therefore$ R은 반사관계.

(2) $(a, b) \in R \Rightarrow a = b$ & $b = a \Rightarrow (b, a) \in R$. $\therefore$ R은 대칭관계.

(3) $(a, b) \in R$ & $(b, c) \in R \Rightarrow \mathrm{a} = b,\ b = c$. $\therefore$ $a = c \Rightarrow (a, c) \in R$.

$\therefore$ R은 추이관계.

$\therefore$ R은 반사, 대칭, 추이관계가 성립하므로 동치관계다.

예제

■ 정수집합 Z에 대한 관계 $R = \{(a, b) \in Z \times Z \mid b = a \bmod \boldsymbol{n},\ \boldsymbol{n} \geq 2\}$일 때, 관계 R이 동치관계인지 판별하라.

(풀이)

(1) $a = a \bmod \boldsymbol{n} \Rightarrow a - a = 0 \Rightarrow 0 = 0 \cdot \boldsymbol{n} \quad \therefore\ R$ 은 반사관계.

(2) $a = b \bmod \boldsymbol{n} \Rightarrow a - b = k\boldsymbol{n}\ (k \in Z) \Rightarrow b - a = -k\boldsymbol{n} \Rightarrow b = a \bmod \boldsymbol{n}$

$\therefore\ R$ 은 대칭관계

(3) $a = b \bmod \boldsymbol{n}$ & $b = c \bmod \boldsymbol{n} \Rightarrow (a - b) = k\boldsymbol{n}, (b - c) = l\boldsymbol{n}\ (k, l \in Z) \Rightarrow$

$a - c = (a - b) + (b - c) = kn + ln = (k + l)n \Rightarrow a = b \bmod \boldsymbol{n}$

$\therefore\ R$은 추이관계다.

$\therefore$ 관계 R은 반사, 대칭, 추이관계가 성립하므로 동치관계다.

예제

- 집합 $A = \{1,2,3,4\}$에 대한 관계 $R = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,3), (3,4), (4,3), (4,4)\}$ 은 동치관계이다. 각 원소의 동치류를 구하라.

(풀이)

$$[1] = [2] = \{1,2\}, \qquad [3] = [4] = \{3,4\}$$

예제

- 정수집합 Z에 대한 관계 $R = \{(a, b) \in Z \times Z | a = b\}$는 동치관계이다.

  $a = 5, 9, 14$ 에 대한 동치류를 구하라.

(풀이)

$[5] = \{5\}$, $[9] = \{9\}$, $[14] = \{14\}$

예제

■ 집합 $A = \{1,2,3,4\}$에 대한 관계 $R = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3),$ $(3,4),(4,3),(4,4)\}$의 동치류 $[1] = [2] = \{1,2\}$, $[3] = [4] = \{3,4\}$ 이다. 이 동치류 집합이 분할임을 증명하라.

(풀이)

$Let\ A_1 = \{1,2\},\ A_2 = \{3,4\},\ P = \{A_1, A_2\}$.

$A_1 \neq \emptyset,\ A_2 \neq \emptyset$.

$A_1 \cup A_2 = \{1,2\} \cup \{3,4\} = \{1,2,3,4\} = A$

$A_1 \cap A_2 = \emptyset$

$\therefore$ 동치류 집합 P 은 집합 A 의 분할이다.

부분순서 관계

- 부분순서(Patial Order) 관계
  - 집합 A에 대한 관계 R이 반사관계, 반대칭관계, 추이관계가 성립하는 관계
  - 집합 A는 부분순서집합(Partial ordered set)
- 비교가능(Comparable), 비교불가능(Noncomparable)
  - 집합 A에 대한 관계 R이 부분순서관계이고, $(a, b) \in R$ 이면 $a \preccurlyeq b$로 표기하고, 'a와 b는 순서비교가 가능하다' 해석
  - $a \preccurlyeq b$ 또는 $b \preccurlyeq a$ 이면 a와 b는 비교가능
  - $a \npreceq b$ 또는 $b \npreceq a$ 이면 a와 b는 비교불가능이라고 함

예제

■ 자연수 집합 N에 대하여 관계 $R = \{(a,b) \in N \times N | a \le b\}$ 는 부분순서 관계인가?

(풀이)

(1) $a \in N$에 대하여 $(a,a) \in R \Rightarrow a \le a$. $\therefore$ reflexive

(2) $a, b \in N$ 에 대하여 $(a,b) \in R \Rightarrow a \le b \Rightarrow a \ne b,\ a < b \Rightarrow b \nleq a$

$\Rightarrow (b,a) \notin R$ $\therefore$ asymmetric

(3) $a, b, c \in N$에 대하여 $(a,b) \in R$, $(b,c) \in R \Rightarrow a \le b,\ \ b \le c$

$\Rightarrow a \le c \Rightarrow (a,c) \in R$. $\therefore$ transitive

$\therefore$ 관계 R 은 부분순서관계.

예제

- 자연수 집합 N에 대하여 관계 $R = \{(a,b) \in N \times N | a|b\}$는 부분순서 관계인가?

(풀이)

(1) $a \in N$에 대하여 $(a,a) \in R \Rightarrow a|a$ $\quad\therefore$ 관계 R은 반사관계.

(2) $a, b \in N$ 에 대하여 $(a,b) \in R$,$a \neq b$ $\Rightarrow a|b \Rightarrow b \nmid a \Rightarrow (b,a) \notin R$.

$\therefore$ 관계 R은 반대칭관계.

(3) $a, b, c \in N$ 에 대하여 $(a,b) \in R$,$(b,c) \in R \Rightarrow a|b,\ \ b|c \Rightarrow b = ak, c = bl(k, l$ 는 정수) $\Rightarrow c = bl = alk \Rightarrow a|c$. $\quad\therefore$ 관계 R은 추이관계.

$\therefore$ 관계 R은 부분순서관계.

완전순서 관계

■완전순서관계(Total Order Relation)

□집합 A 에 대한 부분순서관계 R 에서 집합 A 의 모든 원소의 순서쌍을 비교할 수 있으면 관계 R 을 완전순서관계.

□이때, 집합 A 는 완전순서집합(total order set)

(예)

1. 정수집합 Z 에 대한 관계 $R = \{(a, b) \in Z \times Z | a \leq b\}$

   ⇒ 모든 정수 a, b 에 대해 $a \leq b$ 또는 $b \leq a$로 비교 가능하므로 R 은 완전순서관계

2. 자연수집합 N 에 대한 관계 $R = \{(a, b) \in N \times N | a|b\}$

   ⇒ 모든 자연수 a, b 가 비교불가능하므로 R은 비완전순서관계.

하세도표 (Hasse Diagram)

- 부부순서관계는 방향그래프 또는 하세도표을 이용하여 표기
- 하세도표 그리는 규칙
  - 부분순서관계에 대한 방향그래프에서 루프는 생략
  - 추이관계로 얻어지는 관계에 대한 화살표는 생략한다
  - 부분순서집합 A의 원소 a, b에 대해 $a \neq b$고 $a \preccurlyeq b$ 이면, 정점 a 를 정점 b 보다 아래쪽에 그린다.
  - $a \neq b$고 $a \preccurlyeq b$ 일 때, $a \preccurlyeq k \preccurlyeq b$고 $a \neq k$ 면서 $k \neq b$ 인 k 가 집합 A 에 존재하지 않으면 a 에서 b 로 가는 선을 그린다.

예제

■ 집합 $A = \{1,2,4,8\}$에 대하여 관계 $R = \{(a,b) \in A \times A | a$는 b의 약수$\}$가 부분순서관계인지 판별하고, 부분순서관계라면 하세도표를 그려라.

(풀이)

$R = \{(1,1), (1,2), (1,4), (1,8), (2,2), (2,4), (2,8), (4,4), (4,8), (8,8)\}$

(1) R : 부분순서관계

① $(1,1) \in R$, $(2,2) \in R$, $(4,4) \in R$, $(8,8) \in R$ $\quad \therefore$ R 은 반사관계.

② $(1,2) \in R \Rightarrow (2,1) \notin R$, $(1,4) \in R \Rightarrow (4,1) \notin R$, $(1,8) \in R \Rightarrow (8,1) \notin R$, $(2,4) \in R \Rightarrow (4,2) \notin R$, $(2,8) \in R \Rightarrow (8,2) \notin R$, $(4,8) \in R \Rightarrow (8,4) \notin R$.

$\therefore$ R 은 반대칭관계.

③

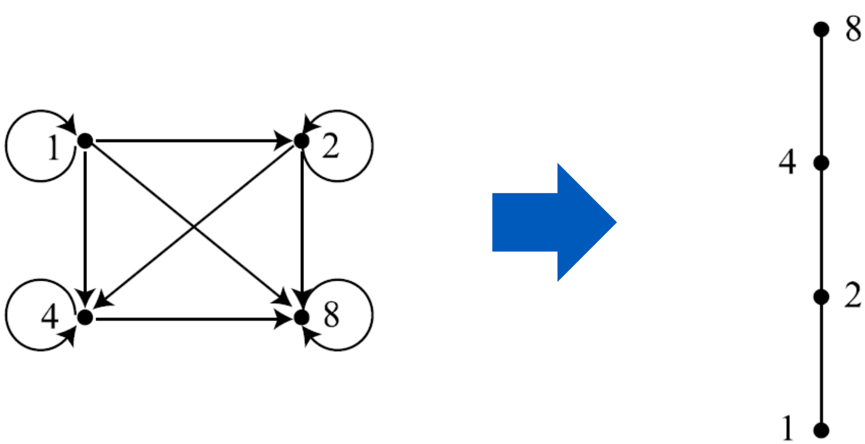
$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R^2 = M_{R^2} = M_R \odot M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \therefore R^2 \subseteq R$$

$$R^3 = M_{R^3} = M_{R^2} \odot M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \therefore R^3 \subseteq R$$

$\therefore$ R은 추이관계다. $\therefore$ 관계 R은 부분순서관계다.

(2) R에 대한 방향 그래프를 그리면 다음과 같다. 관계 R에 대한 하세도표는 다음과 같다.

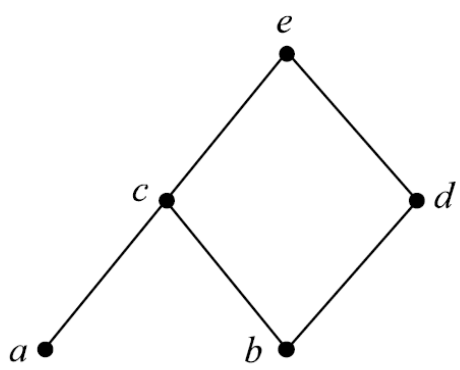


예제

- 집합 $A = \{a, b, c, d, e\}$에 대한 부분순서관계 $R = \{(a, a), (a, c), (a, e), (b, b), (b, c), (b, d), (b, e), (c, c), (c, e), (d, d), (d, e), (e, e)\}$에 대한 하세도표를 그려라.

(풀이)

관계 R에 대한 방향그래프를 그리고 루프와 추이관계에 의해 얻어지는 화살표를 제거한 후, 가장 우선하는 정점을 밑에 위치시키고 화살표를 직선으로 바꾸면 된다. 우선순위가 같은 정점의 경우 같은 수준의 위치에 두면 된다.



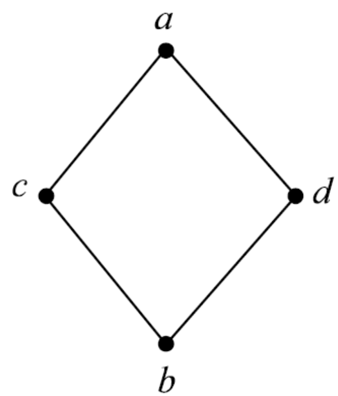
극대원소

- 부분순서관계 R 에서 원소 간의 비교가 가능할 때, 그 원소의 위치를 판별
- 극대원소(Maximal Element)
  - 부분순서집합 A 의 원소 a 에 대해, $a \prec b$ 인 원소 b 가 A 에 존재하지 않는 경우, 원소 a 를 극대원소
- 극소원소(Minimal Element)
  - 부분순서집합 A 의 원소 a 에 대해, $b \prec a$ 인 원소 b 가 A 에 존재하지 않는 경우, 원소 a 를 극소원소
- 최대원소(Greatest Element)
  - 부분순서집합 A 의 $\forall a$ 에 대해, $a \preccurlyeq b$ 인 A 의 원소 b
- 최소원소 (Least Element)
  - 부분순서집합 A 의 $\forall a$ 에 대해, $b \preccurlyeq a$ 인 A 의 원소 b

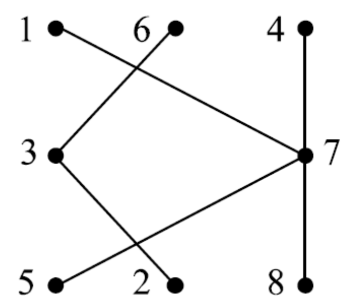
예제

■ 다음 하세도표에서 극대원소, 극소원소, 최대원소, 최소원소를 구하라.

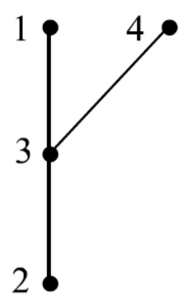
(풀이) (1)



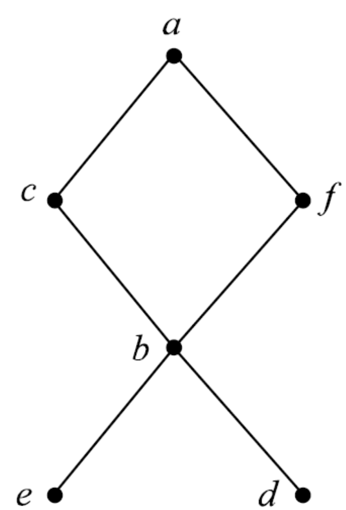
(2)



(3)



(4)



(풀이)

(1) 최상위에 위치하는 정점 : a, 최하위에 위치하는 정점: b.

∴ 극대원소 a, 극소원소 b, 최대원소 a, 최소원소 b

(2) 최상위에 위치하는 정점: 1, 4, 6, 최하위에 위치하는 정점: 2, 5, 8.

∴ 극대원소 1, 4, 6, 극소원소 2, 5, 8, 최대원소와 최소원소는 없다.

(3) 최상위에 위치하는 정점: 1, 4, 최하위에 위치하는 정점: 2.

∴ 극대원소 1, 4, 극소원소 2, 최대원소는 없고, 최소원소는 2.

(4) 최상위에 위치하는 정점: a, 최하위에 위치하는 정점: b, d.

∴ 극대원소 a, 극소원소 b, d, 최대원소 a, 최소원소는 없다.