

5장 행렬식과 연립방정식(1)

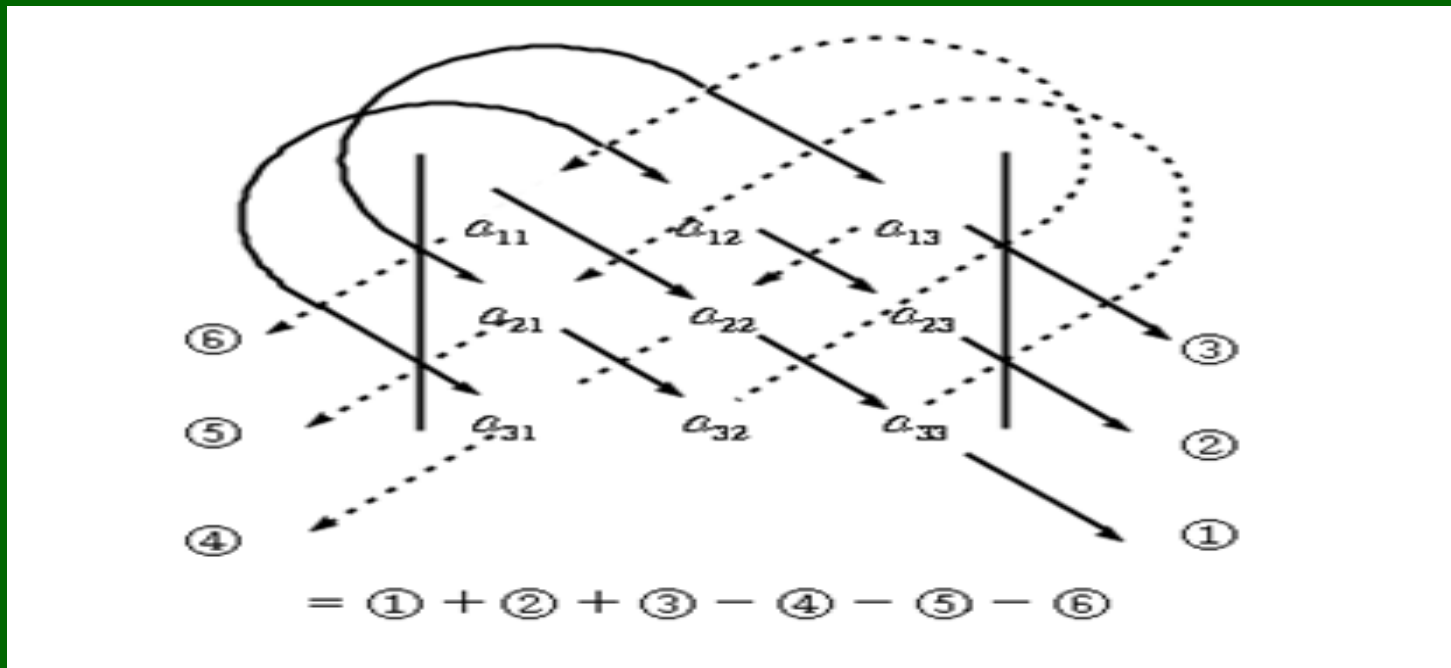
제1절 행렬식의 개념과 속성

■ 행렬식(Determinant)이란 행렬과는 달리 하나의 숫자(스칼라)로서 정방행렬에서만 정의된다. 정방행렬 A에 대한 행렬식은 $\det A$ 또는 $|A|$ 로 표시한다.

■ 행렬식의 계산법

1) 사루스(Sarus)법칙

우측 대각요소를 곱하여 차례로 합한 값에서 좌측 대각요소의 곱을 차례로 합하여 뺀 값



2) 라플라스 전개(Laplace Expansion)

- 라플라스 전개를 위한 임의의 기준행(또는 열)의 원소와 여인수의 곱의 합으로 행렬식을 계산하는 방법
- 여인수(=여인자 cofactor): C_{ij}
 - 소행렬 M_{ij} 에 $(-1)^{(i+j)}$ 를 곱한 것 $C_{ij} = (-1)^{(i+j)}M_{ij}$
- 소행렬식(minor matrix): M_{ij}
 - 정방행렬($n \times n$)에서 M_{ij} 는 i 행 j 열의 원소를 제외하고 남은 원소들을 그대로 배열한 $(n-1) \times (n-1)$ 행렬의 행렬식
- 전개방식은 어떤 행 또는 어떤 열에 대하여 전개하여도 행렬식은 동일함.

- 정방행렬 A행렬의 원소를 a_{ij} 라 할 때 A의 행렬식은

$$|A| = \sum_{i=1}^n a_{ki} c_{ki} \text{ (k행을 기준으로 전개할 때)}$$

$$= \sum_{i=1}^n (-1)^{(k+i)} a_{ki} M_{ki}$$

$$|A| = \sum_{i=1}^n a_{ik} c_{ik} \text{ (k열을 기준으로 전개할 때)}$$

$$= \sum_{i=1}^n (-1)^{(k+i)} a_{ik} M_{ik}$$

다음과 같이 행렬 \mathbf{A} 가 주어져 있을 때 두 번째 열을 구성하는 원소들의 소행렬식을 이용하여 $\det \mathbf{A}$ 를 구하여라.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 7 & -1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 5 & -2 & -8 \end{bmatrix}$$

풀이

$$\begin{aligned} \det \mathbf{A} &= (-1)a_{12}M_{12} + (+1)a_{22}M_{22} + (-1)a_{32}M_{32} \\ &= (-7)\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 5 & -8 \end{vmatrix} + (3)\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -8 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 259 - 33 + 12 = 238 \end{aligned}$$

행렬 \mathbf{A} 가 3×3 인 경우 \mathbf{A} 의 행렬식은 다음 식을 통해 간단히 구할 수 있다.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$
$$\det \mathbf{A} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32})$$

행렬 \mathbf{A} 가 아래와 같을 때 네 번째 열을 구성하는 원소들의 소행렬식을 이용하여 $\det \mathbf{A}$ 를 구하여라.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 7 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 6 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \\ 5 & -2 & -8 & 0 \end{bmatrix}$$

풀이

$$\det \mathbf{A} = (-1)a_{14}M_{14} + (+1)a_{24}M_{24} + (-1)a_{34}M_{34} + (+1)a_{44}M_{44}$$

$$= 0 + (6) \begin{vmatrix} 2 & 7 & -1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 5 & -2 & -8 \end{vmatrix} - (2) \begin{vmatrix} 2 & 7 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 5 & -2 & -8 \end{vmatrix} + 0$$

$$= (6)(238) - (2)(34) = 1,360$$

※ 행렬식을 이용한 비특이행렬 판별

- 정방행렬 A 가 역행렬을 가지면 비특이행렬이라 함.(Nonsingular matrix)
- 정방행렬 A 가 역행렬을 가지지 않으면 특이행렬이라 함.(Singular matrix)
- 비특이 행렬이면 방정식의 해를 가진다는 의미

$|A| \neq 0$ 일 때

- A 는 비특이행렬
- 역행렬 존재
- A 의 모든 열벡터(행벡터)는 일차 독립임.

※ 행렬식의 특성

1. 임의의 정방행렬 A 가 0의 행(또는 열)을 하나이상 가지고 있으면 행렬식은 0이다.
2. 임의의 정방행렬 A 의 두행(또는 열)이 같다면 행렬식은 0이다.
3. 임의의 정방행렬 A 의 행과 열을 서로 바꾸더라도 행렬식의 값은 변하지 않는다. A 의 전치행렬식과 A 의 행렬식은 같다.
4. 임의의 정방행렬 A 의 어떤 행(또는 열)이 다른 행(또는 열)의 상수배와 같다면(일차종속) 행렬식은 0이다.
5. 임의의 정방행렬 A 의 두 행(열)을 바꾸었을 때, 그 행렬식의 값은 -1 을 곱한 값과 같다.
6. 임의의 정방행렬 A 의 한 행(열)에 k 를 곱해주면 그 행렬식의 k 배와 같다.

7. 임의의 정방행렬 A 에 대하여 i 번째 행(열)을 k 배하여 j 번째 행(열)에 더해도 행렬식의 값은 변화 없다.
8. 임의의 정방행렬 A 가 삼각행렬이면 행렬식은 주대각 원소를 곱한 값과 같다.
9. 임의의 두 정방행렬 A, B 에 있어 두 행렬을 곱한 행렬식 값은 각 행렬의 행렬식 값을 곱한 값과 같다.(교환법칙 성립)
10. 타여인수를 사용하여 행렬식을 전개한다면 그 행렬식의 값은 항상 0이다.

5장 행렬식과 연립방정식(2)

※ 역행렬의 도출방법

1) 가우스-조던 소거법

정방행렬 A 의 우측에 동일차원의 단위행렬을 추가시켜 기본행 연산을 수행하여 좌측의 행렬을 단위행렬로 변화시키면 우측의 단위행렬의 변화가 일어나는데 좌측의 행렬이 단위행렬이 되었을 때 변화된 우측의 행렬이 역행렬임.

➤ 기본행 연산이란?

- 행렬의 임의의 두행을 서로 바꾸거나
- 임의의 한행에 0이 아닌 상수를 곱하거나.
- 한 행에 0이 아닌 상수를 곱하여 다른 행에 더하거나 빼는 것

가우스-조단 소거법을 응용하여 다음 행렬의 역행렬을 구하여라

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

풀이

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ \rightarrow & \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 5 & 1 \end{array} \right] \\ \rightarrow & \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 5 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 5 & 1 \end{array} \right] \end{aligned}$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

2) 수반(부수)행렬(adjoint matrix) 이용법

수반행렬: 여인수 행렬의 전치행렬 $\text{adj } A$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad \text{일 때} \quad C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \quad C' = \text{adj } A = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{bmatrix}$$

$AC' =$

$$\begin{bmatrix} \sum_{j=1}^3 a_{1j}c_{1j} & \sum_{j=1}^3 a_{1j}c_{2j} & \sum_{j=1}^3 a_{1j}c_{3j} \\ \sum_{j=1}^3 a_{2j}c_{1j} & \sum_{j=1}^3 a_{2j}c_{2j} & \sum_{j=1}^3 a_{2j}c_{3j} \\ \sum_{j=1}^3 a_{3j}c_{1j} & \sum_{j=1}^3 a_{3j}c_{2j} & \sum_{j=1}^3 a_{3j}c_{3j} \end{bmatrix}$$

$$= \left[\begin{array}{c|cc} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{array} \right]$$

타여인수에 의한
행렬식

$$|A| \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = |A|I$$

$$AC' = |A|I$$

$$\frac{AC'}{|A|} = I \quad \text{양변에 } A^{-1} \text{을 곱하면}$$

$$\frac{A^{-1}AC'}{|A|} = A^{-1}I$$

$$A^{-1} = \frac{C'}{|A|} = \frac{1}{|A|} \text{adj } A$$

※ 수반행렬을 이용한 역행렬 도출 순서

1. A의 행렬식으로부터 비특이 판정
2. 여인수 행렬을 구한다.
3. 여인수 행렬의 전치행렬을 구한다.(수반행렬)
4. $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj } A$ 를 적용하여 구함.

수반행렬을 이용하여 다음 행렬의 역행렬을 구하시오.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{\text{adj } A}{|A|} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{bmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} M_{11} - M_{21} & M_{31} \\ -M_{12} & M_{22} - M_{32} \\ M_{13} - M_{23} & M_{33} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} -2-7 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1-5 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

여기서 $|A| = -1$ 이므로

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

제 2 절 연립일차방정식과 행렬식

1 연립방정식과 행렬

- 행렬은 다원일차연립방정식을 간결하게 나타내는 데 효과적으로 쓰임.

$$\begin{array}{cccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + & \cdots & + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + & \cdots & + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + & \cdots & + a_{mn}x_n = b_m \end{array}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B}$$

다음 연립방정식을 행렬을 이용하여 나타내어라.

$$\begin{aligned}3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 &= 8 \\x_1 - x_2 \qquad \qquad - x_4 &= -2 \\-5x_1 + 2x_2 - x_3 + 6x_4 &= 12\end{aligned}$$

풀이

행렬 \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{X} 를 다음과 같이 정의하면

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ -5 & 2 & -1 & 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 8 \\ -2 \\ 12 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$x_1\mathbf{A}_1 + x_2\mathbf{A}_2 + x_3\mathbf{A}_3 + x_4\mathbf{A}_4 = \mathbf{B}$$

[크라머공식유도]

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \text{라고 할 때}$$

$$AX = B$$

$$A^{-1}AX = A^{-1}B$$

$$X = \frac{\text{adj } A}{|A|} B$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_{13} & C_{23} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n C_{j1} b_j \\ \sum_{j=1}^n C_{j2} b_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n C_{jn} b_j \end{bmatrix}$$

여기서

$$\sum_{j=1}^n C_{j1} b_j = |A_1| \text{라고 하면}$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ b_n & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = b_1 C_{11} + b_2 C_{21} + b_3 C_{31} + \cdots + b_n C_{n1} = \sum_{j=1}^n C_{j1} b_j$$

따라서

$|A_j|$ 는 행렬식 A 의 j 열을 상수행렬로 대체시킨 행렬식이다.

그러므로

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} |A_1| \\ |A_2| \\ \vdots \\ |A_n| \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} \\ x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} \\ \vdots \\ x_n = \frac{|A_n|}{|A|} \end{bmatrix}$$

다음 연립방정식의 해를 크레머의 공식을 이용하여 구하여라.

$$x - 2z = 0, \quad 8x + 5y - z = 3, \quad 2x + 3y + 4z = -2$$

풀이

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 8 & 5 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\det \mathbf{A} = (1)(1) \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + (-1)(0) + (1)(-2) \begin{vmatrix} 8 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -5$$

$$x = \frac{\Delta_1}{-5} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 3 & 5 & -1 \\ -2 & 3 & 4 \end{vmatrix}}{-5} = \frac{0 + 0 - 2 \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}}{-5} = \frac{38}{5}$$

$$y = \frac{\Delta_2}{-5} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 8 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 4 \end{vmatrix}}{-5} = \frac{(1) \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} + 0 - (2) \begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}}{-5} = -\frac{54}{5}$$

$$z = \frac{\Delta_3}{-5} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 8 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & -2 \end{vmatrix}}{-5} = \frac{(1) \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} + 0 + 0}{-5} = \frac{19}{5}$$

따라서 연립방정식의 해는 $(x = \frac{38}{5}, y = -\frac{54}{5}, z = \frac{19}{5})$ 가 된다.

다음 연립방정식의 해를 가우스-조단 소거법을 이용하여 구하여라.

$$\begin{aligned}2x + z &= 10 \\ 2y - z &= 0 \\ -6x - 3y + z &= 0\end{aligned}$$

풀이

$$\begin{aligned}& \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ -6 & -3 & 1 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 5 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & 30 \end{array} \right] \\ & \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 5 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 30 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 5 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 60 \end{array} \right] \\ & \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 5 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 12 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 12 \end{array} \right]\end{aligned}$$

따라서 $x = -1$, $y = 6$, $z = 12$ 가 도출된다.

행렬 \mathbf{A} 가 다음과 같이 주어져 있을 때 \mathbf{A}^{-1} 을 구하여라.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$$

풀이

\mathbf{A} 의 행렬식은 $\det \mathbf{A} = 27 - 25 = 2$ 이므로 \mathbf{A}^{-1} 이 존재함을 알 수 있다.

\mathbf{A}^{-1} 은 다음 두 연립방정식의 해를 구하면 계산할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 9 \end{vmatrix}}{2} = \frac{9}{2}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix}}{2} = -\frac{5}{2}$$

$$y_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 9 \end{vmatrix}}{2} = -\frac{5}{2}, \quad y_2 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{9}{2} & -\frac{5}{2} \\ -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$