第6장 행렬의 응용

제 6 장 행렬의 응용

1. 마코브 분석
   - 시간의 흐름에 따라 시스템의 상태가 확률적으로 변화하는 과정과 그 결과에 대하여 파악하는 기법
   - **확률과정**(stochastic process): 시스템의 상태가 시간에 따라 확률적으로 변해가는 과정 (예)시장점유율(상표전환문제), 재고관리, 노무관리, 외상매출금 관리 등
   - **마코브 과정**(Markov process)
     확률과정 중에서 시스템의 현재의 상태만 주어지면 과거의 상태와는 무관하게 시스템의 미래 상태가 결정되는 성질(마코브 특성)을 가지는 확률과정
     - 마코브과정은 확률과정의 가장 대표적 사례
     - 마코브 특징: 미래는 현재의 상태에 의해서만 결정되며 전달이나 그 이전의 상황과는 무관한 특징.
   - **마코브 연쇄**(Markov chain)
     : 마코브 과정에서 시간의 변화를 연속적으로 고려하지 않고 이산적인 경우만 고려한 경우

- 상표전환문제 - 소비자들의 상표 선호에 있어서의 변화가능성을 간단한 표로 요약하면 다음과 같음

상표 선호패턴의 요약

		다음 期		
		한국맥주	고려맥주	
이번 期	한국맥주	0.6	0.4	1.0
	고려맥주	0.2	0.8	1.0

- 위의 표는 현재의 특정 브랜드 맥주를 선호하는 사람이 다음기에 어떤 브랜드의 맥주를 선호할 확률을 나타내는 상표전환 문제와 관련된 것임.
- 첫 행의 의미는 이번 달에 한국맥주를 마신 사람이 다음달에 한국맥주를 그대로 마실 확률은 0.6(60%)이며 고려맥주로 브랜드를 전이(교체)할 확률이 40%이다. 각각의 상태에 따른 확률을 전이확률이라 하며 이러한 현재상태의 전이확률이 행렬로 만들어 진 것을 전이행렬이라고 함.
- **문제: 현재 한국맥주를 마시는 사람이 9개월 후에 한국맥주를 마실 확률은 얼마일까?**

- 전이확률: 현재 시점(단계)의 상태에서 다음 시점의 상태로 될 확률
- 전이행렬: 특정상태들이 가질 수 있는 모든 전이확률을 행렬로 만든 것
- 상태확률: 특정시점에서 발생하는 상태의 확률로 상태확률의 합은 1임. 특정시점의 상태확률은 시작시점의 상태확률과 특정시점의 전이행렬의 곱으로 계산됨.
- 안정상태: 상태확률에 전이행렬을 곱해도 상태확률이 변하지 않는 상태로써 장기간 고정된 시장점유율 등을 말함.

- $A_A(i)$ = 현재 한국맥주(A)를 선호하는 소비자가 i 번째 기간에도 한국맥주(A)를 선호할 확률

  $B_A(i)$ = 현재 한국맥주(A)를 선호하는 소비자가 i 번째 기간에는 고려맥주(B)를 선호할 확률

  $A_B(i)$ = 현재 고려맥주(B)를 선호하는 소비자가 i 번째 기간에는 한국맥주(A)를 선호할 확률

  $B_B(i)$ = 현재 고려맥주(B)를 선호하는 소비자가 i 번째 기간에도 고려맥주(B)를 선호할 확률

- 현재 한국맥주를 선호하는 소비자는 $[A_A(1)=1 \quad B_A(1)=0]$으로 정의할 수 있으며, 현재 고려맥주를 선호하는 소비자는 $[A_B(1)=0 \quad B_B(1)=1]$로 정의

- 어느 소비자가 현재 한국맥주를 선호한다면, 즉 $[A_A(1)=1 \quad B_A(1)=0]$이라면 다음 달에는 다음과 같이 변함.

$$[A_A(2) \quad B_A(2)] = [A_A(1) \quad B_A(1)] \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}$$

$$= [1 \ \ 0] \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix} = [0.6 \ \ 0.4]$$

- 이와 같은 방법으로 $A_A(k)$, $B_A(k)$, $k \geq 3$ 을 계산해 보면 다음과 같다.

$$[A_A(3) \quad B_A(3)] = [A_A(2) \quad B_A(2)] \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}$$

$$= [0.6 \quad 0.4] \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}$$

$$= [0.44 \quad 0.56]$$

$$[A_A(4) \quad B_A(4)] = [0.44 \quad 0.56] \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}$$

$$= [0.38 \quad 0.62]$$

$$[A_A(5) \quad B_A(5)] = [0.38 \quad 0.62] \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}$$

$$= [0.35 \quad 0.65]$$

$$[A_A(6) \quad B_A(6)] = [0.34 \quad 0.66]$$

$$[A_A(7) \quad B_A(7)] = [0.34 \quad 0.66]$$

$$[A_A(8) \quad B_A(8)] = [0.33 \quad 0.67]$$

$$[A_A(9) \quad B_A(9)] = [0.33 \quad 0.67]$$

- 이 과정을 계속 반복하게 되면 확률치의 변화는 점점 작아져 $[0.33 \quad 0.67]$에 수렴
- 이 분석과정에서 $\begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}$과 같은 행렬을 전이행렬(transition matrix)이라 하며 최종적인 확률값인 $[0.33 \quad 0.67]$과 같은 확률을 안정상태하의 확률(steady-state probabilities)이라 부름.
- 일정기간이 지나게 되면

$$[A_A(n) \quad B_A(n)] = [A_A(n+1) \quad B_A(n+1)]$$
$$[A_B(n) \quad B_B(n)] = [A_B(n+1) \quad B_B(n+1)]$$

이 성립하게 되어 괄호 안의 기간표시가 불필요해지므로

$$A_A + B_A = 1$$

인 점과 다음 식을 이용하면 안정상태하의 확률을 쉽게 구할 수 있음.

$$[A_A \quad B_A] = [A_A \quad B_A]\begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}$$

새로 입주를 시작한 아파트촌에 햇님과 달님의 2개 아이스크림가게가 입주하여 치열한 경쟁을 벌이고 있다. 이번 주와 다음 주 사이의 고객들의 아이스크림 브랜드 선호패턴을 요약하면 다음 표와 같다.

$$
\begin{array}{ccc}
 & & \text{다음 주} \\
 & & \begin{array}{cc} \text{햇님} & \text{달님} \end{array} \\
\text{이번 주} & \begin{array}{c} \text{햇님} \\ \text{달님} \end{array} & \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.8 & 0.2 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

장기적으로 보아 각 아이스크림가게의 점유율은 어느 수준에 달할 것으로 보이는가?

풀이

$$[a \quad b] = [a \quad b] \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.8 & 0.2 \end{bmatrix}$$

이를 정리하면

$$a = (0.9)a + (0.8)b$$
$$b = (0.1)a + (0.2)b$$
$$a + b = 1$$

안정상태의 확률은 $a = 0.89$, $b = 0.11$ 이 되어, 햇님의 시장점유율은 89%에 달하나 달님은 11%에 그칠 것으로 전망된다.

2. 분산, 공분산, 상관계수 행렬

- p개의 서로 다른 변수에 관한 관측치가 n개의 관찰대상 각각에 대해 주어져 있을 때, j번째 관찰대상의 i번째 변수를 x_{ij}라 정의한다면, 주어진 자료는 다음과 같이 $p \times n$행렬로 나타낼 수 있으며 각 변수의 평균값도 계산 가능

$$\underset{(p\times n)}{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{p1} & x_{p2} & \cdots & x_{pn} \end{bmatrix} = [\,\mathbf{X}_1 \mathbf{X}_2 \cdots \mathbf{X}_n]$$

$$\overline{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \vdots \\ \bar{x}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_{1i}/n \\ \sum_{i=1}^{n} x_{2i}/n \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} x_{pi}/n \end{bmatrix} = \frac{1}{n} \overset{(p\times n)}{\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{p1} & x_{p2} & \cdots & x_{pn} \end{bmatrix}} \overset{\substack{(n\times 1) \\ \text{합벡터}}}{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}} = \overset{(p\times 1)}{\frac{1}{n}\mathbf{X}\mathbf{1}}$$

- $\mathbf{X}_i = [x_{1i} \quad x_{2i} \quad \cdots \quad x_{pi}]^T$, $\mathbf{1} = [1 \quad 1 \quad \cdots \quad 1]^T$ 로 정의. 평균값이 구해지면 분산과 공분산은 다음 과정을 거침.

$$S = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{n} (\mathbf{X}_j - \overline{\mathbf{X}})(\mathbf{X}_j - \overline{\mathbf{X}})^T$$

$$= \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{n} \begin{bmatrix} x_{1j} - \bar{x}_1 \\ x_{2j} - \bar{x}_2 \\ \vdots \\ x_{pj} - \bar{x}_p \end{bmatrix} [x_{1j} - \bar{x}_1 \quad x_{2j} - \bar{x}_2 \quad \cdots \quad x_{pj} - \bar{x}_p]$$

$$= \frac{1}{n-1} \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} (x_{1j} - \bar{x}_1)(x_{1j} - \bar{x}_1) & \sum_{j=1}^{n} (x_{1j} - \bar{x}_1)(x_{2j} - \bar{x}_2) & \cdots & \sum_{j=1}^{n} (x_{1j} - \bar{x}_1)(x_{pj} - \bar{x}_p) \\ \sum_{j=1}^{n} (x_{2j} - \bar{x}_2)(x_{1j} - \bar{x}_1) & \sum_{j=1}^{n} (x_{2j} - \bar{x}_2)(x_{2j} - \bar{x}_2) & \cdots & \sum_{j=1}^{n} (x_{2j} - \bar{x}_2)(x_{pj} - \bar{x}_p) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} (x_{pj} - \bar{x}_p)(x_{1j} - \bar{x}_1) & \sum_{j=1}^{n} (x_{pj} - \bar{x}_p)(x_{2j} - \bar{x}_2) & \cdots & \sum_{j=1}^{n} (x_{pj} - \bar{x}_p)(x_{pj} - \bar{x} \end{bmatrix}$$

- 행렬 $\mathbf{X}\mathbf{1}^T$, $\mathbf{X}-\frac{1}{n}\mathbf{X}\mathbf{1}\mathbf{1}^T$, $(\mathbf{X}-\frac{1}{n}\mathbf{X}\mathbf{1}\mathbf{1}^T)(\mathbf{X}-\frac{1}{n}\mathbf{X}\mathbf{1}\mathbf{1}^T)^T$를 구해보면

$$\mathbf{X}\mathbf{1}^T=\frac{1}{n}\mathbf{X}\mathbf{1}\mathbf{1}^T=\begin{bmatrix} \bar{x}_1 & \bar{x}_1 & \cdots\cdots & \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 & \bar{x}_2 & \cdots\cdots & \bar{x}_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \bar{x}_p & \bar{x}_p & \cdots\cdots & \bar{x}_p \end{bmatrix}$$

평균행렬

$$\mathbf{X}-\frac{1}{n}\mathbf{X}\mathbf{1}\mathbf{1}^T=\begin{bmatrix} x_{11}-\bar{x}_1 & x_{12}-\bar{x}_1 & \cdots\cdots & x_{1n}-\bar{x}_1 \\ x_{21}-\bar{x}_2 & x_{22}-\bar{x}_2 & \cdots\cdots & x_{2n}-\bar{x}_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{p1}-\bar{x}_p & x_{p2}-\bar{x}_p & \cdots\cdots & x_{pn}-\bar{x}_p \end{bmatrix}$$

편차행렬

$$(\mathbf{X}-\frac{1}{n}\mathbf{X}\mathbf{1}\mathbf{1}^{T})(\mathbf{X}-\frac{1}{n}\mathbf{X}\mathbf{1}\mathbf{1}^{T})^{T}$$ 편차곱의 합 행렬

$$= \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n}(x_{1j}-\bar{x}_1)(x_{1j}-\bar{x}_1) & \sum_{j=1}^{n}(x_{1j}-\bar{x}_1)(x_{2j}-\bar{x}_2) & \cdots & \sum_{j=1}^{n}(x_{1j}-\bar{x}_1)(x_{pj}-\bar{x}_p) \\ \sum_{j=1}^{n}(x_{2j}-\bar{x}_2)(x_{1j}-\bar{x}_1) & \sum_{j=1}^{n}(x_{2j}-\bar{x}_2)(x_{2j}-\bar{x}_2) & \cdots & \sum_{j=1}^{n}(x_{2j}-\bar{x}_2)(x_{pj}-\bar{x}_p) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{j=1}^{n}(x_{pj}-\bar{x}_p)(x_{1j}-\bar{x}_1) & \sum_{j=1}^{n}(x_{pj}-\bar{x}_p)(x_{2j}-\bar{x}_2) & \cdots & \sum_{j=1}^{n}(x_{pj}-\bar{x}_p)(x_{pj}-\bar{x}_p) \end{bmatrix}$$

따라서

$$(\mathbf{X}-\frac{1}{n}\mathbf{X}\mathbf{1}\mathbf{1}^{T})(\mathbf{X}-\frac{1}{n}\mathbf{X}\mathbf{1}\mathbf{1}^{T})^{T}=(n-1)\mathbf{S}$$

- $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$ 의 특성을 이용하면

$$(\mathbf{X} - \frac{1}{n}\mathbf{X}\mathbf{1}\mathbf{1}^T)(\mathbf{X} - \frac{1}{n}\mathbf{X}\mathbf{1}\mathbf{1}^T)^T$$

$$= \mathbf{X}(\mathbf{I} - \frac{1}{n}\mathbf{1}\mathbf{1}^T)(\mathbf{I} - \frac{1}{n}\mathbf{1}\mathbf{1}^T)\mathbf{X}^T$$

$$= \mathbf{X}[\mathbf{I} - \frac{1}{n}\mathbf{1}\mathbf{1}^T - \frac{1}{n}\mathbf{1}\mathbf{1}^T + \frac{1}{n^2}(\mathbf{1}\mathbf{1}^T)(\mathbf{1}\mathbf{1}^T)]\mathbf{X}^T$$

$$= \mathbf{X}(\mathbf{I} - \frac{1}{n}\mathbf{1}\mathbf{1}^T)\mathbf{X}^T$$

- 평균행렬 $\overline{\mathbf{X}} = \frac{1}{n}\mathbf{X}\mathbf{1}$

  분산·공분산 행렬 $\mathbf{S} = \frac{1}{n-1}\mathbf{X}\left(\mathbf{I} - \frac{1}{n}\mathbf{1}\mathbf{1}^T\right)\mathbf{X}^T$

  상관계수행렬 **R**은 다음 과정을 거쳐 도출

$$\mathbf{D}^{-\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{S_{11}}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{S_{22}}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\sqrt{S_{pp}}} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \frac{s_{11}}{\sqrt{s_{11}}\sqrt{s_{11}}} & \frac{s_{12}}{\sqrt{s_{11}}\sqrt{s_{22}}} & \cdots\cdots & \frac{s_{1p}}{\sqrt{s_{11}}\sqrt{s_{pp}}} \\ \frac{s_{21}}{\sqrt{s_{11}}\sqrt{s_{22}}} & \frac{s_{22}}{\sqrt{s_{22}}\sqrt{s_{22}}} & \cdots\cdots & \frac{s_{2p}}{\sqrt{s_{22}}\sqrt{s_{pp}}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{s_{1p}}{\sqrt{s_{11}}\sqrt{s_{pp}}} & \frac{s_{2p}}{\sqrt{s_{22}}\sqrt{s_{pp}}} & \cdots\cdots & \frac{s_{pp}}{\sqrt{s_{pp}}\sqrt{s_{pp}}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & r_{12} & \cdots\cdots & r_{1p} \\ r_{12} & 1 & \cdots\cdots & r_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_{1p} & r_{2p} & \cdots\cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \mathbf{D}^{-\frac{1}{2}}\,\mathbf{S}\mathbf{D}^{-\frac{1}{2}}$$

다음과 같이 자료행렬이 주어져 있을 때 평균, 분산, 공분산, 상관계수를 구하여라.

$$\begin{array}{cccccl} & & \text{관측치 1} & \text{관측치 2} & \text{관측치 3} & \\ \mathbf{X} & = & \left[\begin{matrix} 4 \\ 1 \end{matrix}\right. & \begin{matrix} -1 \\ 3 \end{matrix} & \left.\begin{matrix} 3 \\ 5 \end{matrix}\right] & \begin{matrix} \text{변수 1} \\ \text{변수 2} \end{matrix} \end{array}$$

풀이

평균행렬 $\overline{\mathbf{X}} = \frac{1}{n}\mathbf{X}\mathbf{1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

분산 · 공분산 행렬

$$\mathbf{S} = \frac{1}{n-1}\mathbf{X}\left(\mathbf{I} - \frac{1}{n}\mathbf{1}\,\mathbf{1}^T\right)\mathbf{X}^T$$

$$= \frac{1}{3-1}\begin{bmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}\left[\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\right]\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

상관계수 행렬 $\mathbf{R} = \mathbf{D}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{S}\mathbf{D}^{-\frac{1}{2}}$

$$= \begin{bmatrix} 0.378 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.378 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -0.189 \\ -0.189 & 1 \end{bmatrix}$$