

제 10 장 일변수함수의 극대 극소

제 10 장 일변수함수의 극대 극소

이윤을 최대화한다든가 또는 비용을 최소화한다든가 하는 문제는 총괄하여 **최적화 문제**(optimization problem)라고 통칭하곤 한다. 최적화 문제는 목적함수와 제약조건으로 구성되어 있으며, 의사결정변수의 값에 따라 최적화하고자 하는 목적함수의 값이 결정된다. 본장에서는 이 중 의사결정변수의 수가 하나이며 제약조건이 존재하지 않는 목적함수의 극대·극소에 대해서만 살펴본다.

제 1 절 함수의 극대와 극소

1 극값의 정의

- 임의의 함수 $y = f(x)$ 가 주어져 있을 때 $f(x)$ 가 정의될 수 있는 모든 x 값에 대해 $f(x) \leq f(x^*)$ 가 성립한다면 $f(x^*)$ 는 f 의 최대값(global maximum)이라 하며, 이와 반대로 $f(x) \geq f(x^*)$ 가 성립한다면 $f(x^*)$ 는 f 의 최소값(global minimum)이라 부름
- 이에 반해 함수 f 의 극대값(relative maximum)이란 $x^* - \delta \leq x \leq x^* + \delta$ 안의 모든 x 값에 대해

$$f(x) \leq f(x^*)$$

- 함수 f 의 극소값(relative minimum)이란 $x^* - \delta \leq x \leq x^* + \delta$ 안의 모든 x 값에 대해 $f(x) \geq f(x^*)$ 가 성립하는 양수 δ 가 존재할 때의 $f(x^*)$ 값을 의미
- 극대값과 극소값을 총괄하여 극값(extremum value)이라 부르며, 극값을 도출하는 $(x^*, f(x^*))$ 를 임계점(critical point)이라 함

$f(x)$ 의 도함수 $f'(x)$ 가 $x=x^*$ 에서 $f'(x^*)=0$ 을 만족시킨다고 가정하자.

(a) 도함수 $f'(x)$ 가 x^* 의 바로 왼쪽에서는 양의 값(+)을 갖고 x^* 의 바로 오른쪽에서는 음의 값(-)을 갖는다면 $f(x^*)$ 는 극대값이다.

(b) 도함수 $f'(x)$ 가 x^* 의 바로 왼쪽에서는 음의 값(-)을 갖고 x^* 의 바로 오른쪽에서 양의 값(+)을 갖는다면 $f(x^*)$ 는 극소값이다.

(c) x^* 의 양편에서 $f'(x)$ 가 모두 음이거나 양이면 $f(x^*)$ 는 극값이 될 수는 없다.

이와 같은 점 $(x^*, f(x^*))$ 를 **변곡점**이라 한다.

2 이차 및 고차 도함수를 이용한 극값 판정

- 2차도함수는 도함수 $f'(x)$ 의 도함수로서 $f''(x)$ 또는 $\frac{d^2y}{dx^2}$ 으로 표기

$$\frac{d^2y}{dx^2} \text{ 은 } \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) \text{ 를 간략히 줄인 것임}$$

- n 차 도함수

$$f^{(3)}(x), f^{(4)}(x), \dots, f^{(n)}(x)$$

또는

$$\frac{d^3y}{dx^3}, \frac{d^4y}{dx^4}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}$$

함수 f 의 1차도함수 $f'(x)$ 가 $x=x^*$ 에서 $f'(x^*)=0$ 을 만족시킬 때

(a) 만약 $f''(x^*) < 0$ 이면 $f(x^*)$ 는 극대값이며

(b) 만약 $f''(x^*) > 0$ 이면 $f(x^*)$ 는 극소값이다.

$f'(x^*) = 0$ 은 x^* 가 극값이기 위한 필요조건(necessary condition)이 되며 $f''(x^*) < 0$, $f''(x^*) > 0$ 라는 조건이 추가된다면 이는 곧 $f(x^*)$ 가 극대값(극소값)이기 위한 충분조건(sufficient condition)이 됨

일반적으로 $f'(x^*) = 0$ 이라는 필요조건은 극값이기 위한 1차조건(first-order condition)이라 하며 2차도함수에 기초한 충분조건은 2차조건(second-order condition)이라 함

고차도함수를 이용한 극값 판정

$f(x)$ 가 n 번 미분이 가능하다고 할 때 $f'(x^*) = f''(x^*) = \dots = f^{(n-1)}(x^*) = 0$ 이고, $f^{(n)}(x^*) \neq 0$ 이 성립한다고 하자.

- (a) n 이 짝수이고 $f^{(n)}(x^*) < 0$ 이면 $f(x^*)$ 는 극대값이며,
- (b) n 이 짝수이고 $f^{(n)}(x^*) > 0$ 이면 $f(x^*)$ 는 극소값이다.
- (c) 그러나 n 이 홀수이면 $f(x^*)$ 는 극값이 될 수 없다.

다음 함수의 극값을 구하여라.

(a) $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 1$

(b) $g(x) = x - \frac{4}{x^2}$



예제 8.2

풀이

(a) $f'(x) = 12x^3 - 12x^2 = 0$ 에서 $f'(x) = 0$ 을 만족하는 x 값은 $x = 0$ 과 $x = 1$ 뿐이다. 한편 $f''(x) = 36x^2 - 24x$ 이므로 $f''(0) = 0$, $f''(1) = 12$ 임을 알 수 있다.

따라서 $f(1) = -2$ 는 극소값임을 알 수 있으나 $f(0)$ 이 극값인지를 판정하기 위해서는 $f'''(0)$ 을 구해야 한다. $f'''(0) = (72)(0) - 24 = -24$ 인데 앞에서 설명한 정리에 의하면 $f^{(n)}(x^*) \neq 0$ 일 때의 n 이 홀수이면 $f(x^*)$ 가 극값이 될 수 없으므로 $f(0)$ 은 극값일 수 없다.

(b) $g'(x) = 1 + 8x^{-3}$ 에서 $g'(x) = 0$ 을 만족하는 x 의 값은 -2 뿐이다. 한편 $g''(x) = -24x^{-4}$ 로 $g''(-2) < 0$ 임을 알 수 있으므로 $g(-2) = -3$ 은 극대값이 된다.

제 2 절 최대값과 최소값의 판정



정리

함수 f 가 폐구간 $[a, b]$ 에서 정의되며, 이 구간에서 연속함수일 때 f 는 최대값과 최소값을 가진다. 또한 f 의 최대값과 최소값은 폐구간의 양쪽 끝점인 a 와 b 에서의 f 값과 $f'(x^*)=0$ 일 때의 $f(x^*)$ 값을 계산함으로써 구할 수 있다.



예제 8.4

$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$ 이 $[0, 2]$ 의 정의구역을 가진다고 할 때 최대값과 최소값을 구하여라.

풀이

먼저 $f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x+2)(x-1) = 0$ 에서 정의구역 안에 포함되는 점은 $x = 1$ 일 때뿐이다.

$f(1) = -6$, $f(0) = 1$, $f(2) = 5$ 이므로, 최대값은 5, 최소값은 -6임을 알 수 있다.



예제 8.5

다음 함수의 최대값을 구하여라.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & (-2 \leq x < 1) \\ 3x - 2 & (1 \leq x \leq 3) \end{cases}$$

풀이

먼저 첫 번째 구간을 $[-2, 1]$ 로 보고 이 구간 안에서의 최대값과 최소값을 구해보기로 하자. $f'(x) = 2x = 0$ 인 x 의 값은 0 뿐이므로, 최대값이 될 수 있는 함수값은 $f(0) = 0$, $f(-2) = 4$, $f(1) = 1$ 중의 하나이다.

한편 두 번째 구간 $[1, 3]$ 에서는 $f'(x) = 3$ 으로 $f'(x) = 0$ 를 만족시키는 x 의 값이 없으므로 최대값이 될 수 있는 후보는 $f(1) = 3 - 2 = 1$, $f(3) = 9 - 2 = 7$ 뿐이다.

이를 모두 종합해보면 [그림 9-5]에서 확인할 수 있듯이 $f(x)$ 의 최대값은 $f(3) = 7$ 이 된다.



예제 8.9

한국슈퍼퍼브리싱은 저자에게 15% 인세를 지불한다. 이번에 새로 출간한 아동용 도서의 수요는 $x = 200 - 5p$ 로 추정하고 있다. 한편 출판사가 생각하고 있는 생산비용은 $C = 10 + 2x + x^2$ 이다. 출판사와 저자입장에서 각각 이익을 최대화하는 출판부수를 구하여라.

풀이

$p = 40 - 0.2x$ 이므로 저자의 입장에서 수입은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} Y(x) &= (0.15)p \cdot x = (0.15)(40 - 0.2x)(x) \\ &= 6x - 0.03x^2 \end{aligned}$$

$Y(x)$ 를 x 에 대해 미분하면 $Y'(x) = 6 - 0.06x = 0 \Rightarrow x_A^* = 100$ 부가 된다.

그렇지만 출판사 입장에서 이윤함수를 구해보면

$$\begin{aligned} \pi(x) &= px - (10 + 2x + x^2) - (6x - 0.03x^2) \\ &= (40 - 0.2x)(x) - (10 + 2x + x^2) - (6x - 0.03x^2) \\ &= 32x - 1.17x^2 - 10 \end{aligned}$$

$$\pi'(x) = 0 \Rightarrow 32 - 2.34x = 0 \Rightarrow x_B^* = \frac{32}{2.34} = 13.68\text{부} = 14\text{부}$$

제 3 절 볼록함수와 오목함수

- 두 개의 점 $p=(p_1, p_2, \dots, p_n)$ 과 $q=(q_1, q_2, \dots, q_n)$ 이 주어져 있을 때 이 두 점을 연결하는 직선(line segment)은

$$\{x \mid x = \lambda p + (1 - \lambda)q, 0 \leq \lambda \leq 1\}$$

정의

$f(x)$ 의 정의역에 포함된 임의의 두 점 x_1 과 x_2 가 주어져 있을 때, 0과 1 사이의 λ 값에 대해 ($0 \leq \lambda \leq 1$)

$$f[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2] \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$$

가 성립하면 $f(x)$ 를 볼록함수라 한다.

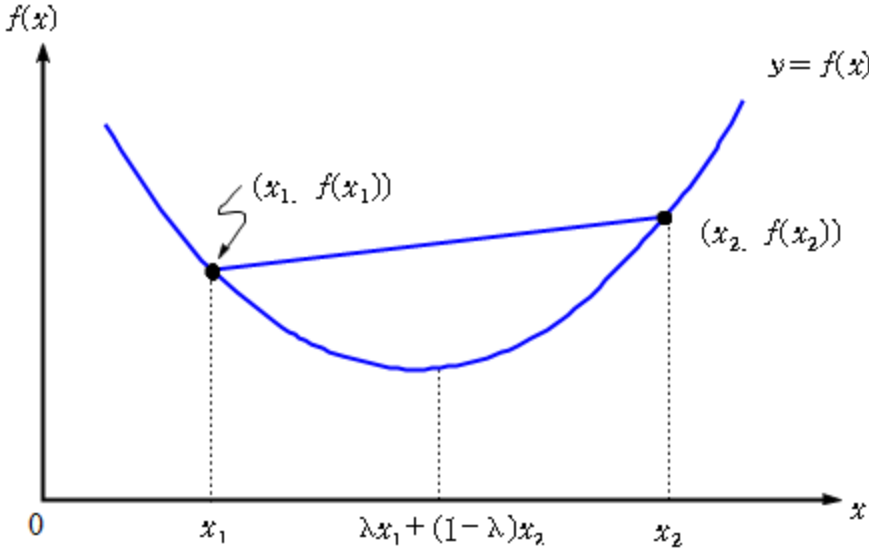
만약

$$f[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2] < \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$$

가 성립하면 $f(x)$ 는 엄격한 볼록함수(strictly convex function)라 한다.

그림 8-8

볼록함수의 예시



정의

함수 $(-1)f(x)$ 가 볼록함수이면 $f(x)$ 는 오목함수이다. 다시 말해 $f(x)$ 의 정의역에 포함된 임의의 두 점 x_1 과 x_2 가 주어질 때, 0과 1 사이의 λ 값에 대해 ($0 \leq \lambda \leq 1$)

$$f[\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2] \geq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$$

가 성립하면 $f(x)$ 를 **오목함수**라 한다.

만약,

$$f[\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2] > \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$$

가 성립하면 $f(x)$ 는 **엄격한 오목함수**(strictly concave function)라 한다.

다음에 주어진 각각의 함수가 볼록함수인지 오목함수인지 판정하여라.

(a) $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ (b) $g(x) = -3x^2 + 4x$



예제 8.14

풀이

(a) $\lambda = \frac{1}{2}$ 일 때의 $f[\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2] - [\lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)]$ 를 계산해 보면

$$\begin{aligned} & f\left(\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2\right) - \left[\frac{1}{2}f(x_1) + \frac{1}{2}f(x_2)\right] \\ &= \frac{1}{2}(x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2) - \frac{3}{2}(x_1 + x_2) + 1 \\ & \quad - \left(x_1^2 - \frac{3}{2}x_1 + \frac{1}{2} + x_2^2 - \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}\right) \\ &= -\frac{1}{2}(x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2) = -\frac{1}{2}(x_1 - x_2)^2 \leq 0 \end{aligned}$$

이므로 $f(x)$ 는 볼록함수이다.

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad & g\left(\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2\right) - \left(\frac{1}{2}g(x_1) + \frac{1}{2}g(x_2)\right) \\ &= -\frac{3}{4}(x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2) + 2(x_1 + x_2) - \left(-\frac{3}{2}x_1^2 + 2x_1 - \frac{3}{2}x_2^2 + 2x_2\right) \\ &= \frac{3}{4}(x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2) = \frac{3}{4}(x_1 - x_2)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

따라서 $g(x)$ 는 오목함수임을 알 수 있다.



정리

함수 f 의 2차 도함수가 존재할 때

(a) 정의역의 모든 x 값에 대해 $f''(x) \geq 0$ ($f''(x) \leq 0$) 이 성립하면 $f(x)$ 는 볼록함수(오목함수)이며, $f''(x) > 0$ ($f''(x) < 0$) 이 성립하면 $f(x)$ 는 엄격한 볼록함수(엄격한 오목함수)이다.

(b) $f(x)$ 가 볼록함수(오목함수)이면 정의역의 모든 x 값에 대해 $f''(x) \geq 0$ ($f''(x) \leq 0$)이 성립하며, $f(x)$ 가 엄격한 볼록함수(엄격한 오목함수)이면 정의역의 모든 x 값에 대해 $f''(x) > 0$ ($f''(x) < 0$)이 성립한다.

다음 함수가 볼록함수인지 오목함수인지 구분하여라.



예제 8.15

(a) $f(x) = 2x^2 - 3x + 10$

(b) $g(x) = -3x^2 + 4x + 2$

(c) $k(x) = 2x + \frac{6}{x}$

(d) $h(x) = x^3 + x^2 + 1$

풀이

(a) $f'(x) = 4x - 3$, $f''(x) = 4 > 0$ 이므로 $f(x)$ 는 볼록함수이다.

(b) $g'(x) = -6x + 4$, $g''(x) = -6 < 0$ 에서 $g(x)$ 는 오목함수임을 알 수 있다.

(c) $k'(x) = 2 + (6)(-1)x^{-2}$, $k''(x) = 12x^{-3}$ 으로 x 값에 따라 0보다 클 수도 있고 작을 수도 있다. 따라서 $k(x)$ 는 볼록함수도 오목함수도 아니다.

(d) $h'(x) = 3x^2 + 2x$, $h''(x) = 6x + 2$ 이므로 $h''(x)$ 는 x 값에 따라 0보다 클 수도 있고 작을 수도 있다. 따라서 $h(x)$ 는 볼록함수도 오목함수도 아니다.



정리

- (a) 볼록함수의 극소값은 그 함수의 최소값이며 오목함수의 극대값은 그 함수의 최대값이다.
- (b) 엄격한 볼록함수의 극소값은 그 함수의 최소값일 뿐만 아니라 최소값을 갖게 하는 x^* 값이 단 하나뿐이며, 엄격한 오목함수의 극대값은 그 함수의 최대값일 뿐만 아니라 최대값을 갖게 하는 x^* 값이 단 하나뿐이다.

총생산비용함수가 $C(Q) = \frac{1}{30}Q^2 + 20Q + 480$ 으로 주어져 있을 때 평균생산비용을 최소화할 수 있는 생산량수준 Q^* 를 구하여라.



예제 8.16

풀이

평균생산비용함수는 $C(Q)/Q = AC(Q) = \frac{1}{30}Q + 20 + \frac{480}{Q}$ 이므로

$$AC'(Q) = \frac{1}{30} + (480)(-1)Q^{-2} = 0 \Rightarrow Q^* = 120$$

$$AC''(Q) = 960Q^{-3}$$

이 되어 $AC''(Q)$ 는 Q 값에 관계없이 언제나 0보다 크거나 같다 ($\because Q > 0$). 따라서 $AC(Q)$ 가 볼록함수이며, 이에 따라 $Q^* = 120$ 이 평균생산비용을 최소화하는 생산량수준이라는 결론을 내릴 수 있다.