문제해결교육론, 메타인지, 수학적 모델링, 문제 제기, PBL학습

문제와 문제 유형

1) 문제해결에서의 ‘문제’

① 구체적이고 확실한 해결의 방법을 쉽게 구하기 어렵고 문제해결을 위해서는 다단계에 걸친 다양한 사고가 요구되는 문제

② 진정한 문제는 목표는 분명하지만 그 목표에 이르는 길이 즉각적으로 주어져 있지 않는 것

③ 문제에는 ‘목표’와 ‘장애 요인’과 ‘해결자의 의식’이 수반된다.(폴리아)

2) 좋은 문제

① 해결 과정에서 여러 종류의 개념과 기능을 필요로 해야 한다.

② 다른 장면으로 일반화, 확장될 수 있어야 한다.

③ 다양한 해법이 존재해야 한다.

문제해결 행동요인

문제해결 행동 관련 요인 : 숀펠드(Schoenfeld)

1) 자원 : 문제를 해결하기 위해 개인이 사용할 수 있는 도구와 기법
(수학적 지식, 직관, 알고리즘, 법칙에 대한 이해 등)

2) 발견술 : 생소하고 비정형적인 문제를 해결하기 위한 전략과 기술
(유추, 일반화, 특수화, 보조문제 이용하기, 거꾸로 풀기 등)

3) 통제 : 자원과 전략의 선택과 수행에 관한 전반적인 결정 능력으로 문제해결의 모든 과정에 영향을 미친다. (계획하기, 감시와 평가, 의사결정, 의식적인 메타인지적 결정 등)

4) 신념 체계 : 학습자가 수학에 대해 가지고 있는 가치관이나 선입견

문제해결의 의미

- 문제해결 이란?

문제해결은 하나의 과정으로 어떤 친숙하지 않은 문제 상황이 요구하고 있는 것을 만족시키기 위해 개인이 이전에 획득한 지식, 기능 및 이해한 것을 사용하기 위한 수단. (Krulick & Rudnik)

문제해결 과정에서 기초적인 수학적 지식이나 기능을 보다 확실히 이해할 수 있으며, 창의적 사고, 비판적 사고, 의사결정 능력과 같은 고등정신 기능을 신장할 수 있으므로 문제해결 능력의 신장을 통해 학생의 사고력과 실생활에의 응용력을 길러줄 수 있다.

문제해결 과정과 전략

문제해결 과정 & 문제해결과정에서의 발문

문제 이해 → 계획 작성 → 계획 실행 → 반성

·문제 이해 단계 : 문제를 이해하는 단계로 문제에서 구하려는 것과 주어진 것을 알고, 용어의 뜻을 파악하며, 문제를 분석하는 것

·문제 해결 계획 수립 단계 : 문제에서 주어진 것과 구하려는 것 사이의 관계를 파악하는 단계. 주어진 것과 구하려는 것 사이의 관련성을 즉각적으로 발견할 수 없을 때에는 보조 문제를 고려해야 함.

·계획 실행 단계 : 해결 계획에 따라 실행하는 단계

·반성단계 : 문제를 해결한 고정을 처음부터 검토해 보고, 다른 방법으로 해결할 수는 없는지를 알아보고, 혹시 다른 방법이 있으면 어느 방법이 더 나은지를 생각해 보는 단계

식 세우기

- 문장으로 된 조건을 수학적 기호를 사용하여 표현하는 것.
- 상황에 맞는 적절한 기호와 용어를 선택함으로써 적절한 식을 세울 수 있다.
- 일반적인 관습을 지키는 것이 식을 이해하거나 다른 사람과 의사소통할 때 편리하다.
- 예를 들어 어떤 산을 올라갈 때 산의 거리와 걸린 시간을 알고 있고 평균속도를 구한다면 속도=거리/시간이라는 식을 세워서 값을 구할 수 있다.

예상과 확인

- 주어진 문제를 해결하기 위한 적절한 전략이 생각나지 않을 경우에 주로 사용되는 전략.
- 문제에서 질문하는 것에 대한 가능한 답을 예상하는 것.
- 예상한 결과는 참일 수도 있고, 거짓일 수도 있으므로 검토해 보아야 한다.
- 둘레의 길이가 주어진 사각형 중 넓이가 최대인 것은 둘레의 길이가 일정한 도형 중 최대인 것이 원이라는 것을 바탕으로 원과 제일 유사한 정사각형이 넓이가 최대일 것이라고 예상할 수 있다

거꾀로 풀기

- 문제에서 찾고자 하는 것을 알고 있다고 가정하고 그것이 성립하기 위한 전 단계를 찾는 방법을 계속하여 문제의 조건이나 가정에 도달함으로써 문제를 해결하는 방법.
- 구하는 것에서 출발하여 이것을 얻기 위해 필요한 것을 찾고 다시 이것을 얻기 위해 필요한 것을 찾는 과정을 계속하여 주어진 자료와 조건에 이르는 문제해결전략이다.
- 4리터의 양동이와 9리터의 양동이를 이용하여 강에 있는 물을 길어 6리터의 물을 만들어 볼 때 쓰일 수 있는 전략이다.

유추

- 두 개의 대상이 있어서 이 대상을 이루고 있는 각 부분의 관계가 대응되는 것을 말한다.
- 범주가 다른 사물 사이에 일정한 유사성이 있을 때, 그 유사성에 의거하여 그것들이 다른 측면에서도 서로 유사하거나 일치하리라고 추론해 내는 것을 말한다.
- 예를 들어 사면체의 무게중심을 찾을 때 삼각형의 무게중심을 중선의 교점을 이용해 찾은 다음 유사하게 추측하여 사면체의 무게중심 또한 찾는다.

귀납법

- 특별한 예들을 관찰하고 조합함으로써 일반적인 법칙을 발견하는 과정이다.
- 수학적 귀납법은 특별한 종류의 정리를 증명하기 위해 수학에서만 사용된다.
- $1^3=1^2$
- $1^3+2^3=3^2$
- $1^3+2^3+3^3=6^2$
- $1^3+2^3+3^3+4^3=10^2$
- 마찬가지로 수학적 귀납법에 의거하여 처음부터 n개의 세제곱 수의 합은 제곱수이다의 명제를 제안할 수 있다.

규칙성 찾기

- 문제에 주어진 조건이나 관계를 이용하여 관련된 성질과 규칙을 찾아내어 그 규칙성을 적용해 감으로써 문제를 해결하는 전략을 말한다.
- 규칙성이 문제의 특별한 경우에 해당하는 체계적인 목록으로 만들어 일반화될 때, 유용하다.
- n개의 직선으로 평면이 최대 a_n개의 영역으로 나누어질 때 a_{12}의 값을 구한다고 하면 1개의 직선을 긋는 것부터 차례대로 한 개의 직선을 더해 나갈 때마다 나누는 영역의 개수가 얼마나 늘어나는 지 규칙을 찾으면 $a_{n+1}=a_n+(n+1)$임을 알 수 있다
  $a_1=2$므로 구하는 $a_{12}=a_1+(2+3+\ldots+12)=79$

단순화하기

- 문제에서 주어진 상황이 복잡하거나 변수가 많을 경우, 간단한 상황으로 바꾸거나 변수를 줄인 문제를 풀어 원래의 문제를 해결하는 전략이다.
- 규칙성을 찾아 해결하기, 표를 만들어서 해결하기 등의 문제와 관련이 깊으며 다른 전략의 보조 역할 의미에서 중요하다.
- 12명의 학생이 다른 학생 모두와 악수를 한다면 악수의 총 횟수를 구하고자 할 때 2명의 학생만 있다고 단순화 시키면 악수의 횟수는 1회이고 한명이 더 들어온다고 하면 악수의 횟수는 2회 더해지고 이러한 상황이 계속되어 12번째 학생이 들어오면 11명과 악수하여 1+2+3+4+…+11=66회이다.

특수화 하기

- 문제의 조건에 해당되는 특수한 경우를 고찰하여 원래 문제를 해결하는 전략이다.
- 자연수 n (n>=2)으로 나누었을 때, 몫과 나머지가 같아지는 자연수를 더한 값을 A이라 할 때 A>500 을 만족시키는 자연수 n의 최솟값은 n=4일 때의 특수한 경우를 생각하여
  몫과 나머지가 모두 1인 경우 : 4X1+1=5
  몫과 나머지가 모두 2인 경우 : 4X2+2=10
  몫과 나머지가 모두 3인 경우 : 4X3+3=15
- 그래서 n=4인 경우는 30이다 이런 특수한 경우에 생각한 것을 바탕으로
  …몫과 나머지가 모두 n인 경우 : nX(n-1)+(n-1)=(n-1)(n+1)
  를 모두 더한 경우에서 n의 최솟값은 11이란것을 알수있다.

예시 몇 가지-

- 어떤 수에서 112를 빼야 할 것을 잘못하여 더 하였더니 605가 되었다. 바르게 계산한 답은 얼마일까? – 거꾸로 풀기
- 어떤 수와 어떤 수 바로 뒤의 수의 합이 1111 입니다. 어떤 수는 얼마일까? – 식 세우기
- 길이가 84m인 도로 양쪽에 똑같은 간격으로 16그루의 나무를 심으려고 하고 처음과 끝에도 나무를 심는다면 나무 사이의 간격은 몇 m인가? – 그림 그리기

문제해결의 여러가지 동향

1.문제제기

문제제기는 새로운 문제를 만들어 내거나 주어진 문제를 명료화하는 것을 의미한다.

문제제기는 문제를 능동적으로 취급함으로써 학생들을 수동적인 문제해결자에서 능동적인 문제해결자로 변화시킬 뿐만 아니라 수학적 발견의 경험을 제공하여 문제해결 능력을 개발할 수 있도록 해 준다.

문제제기

폴리아에 의하면, 관찰은 수학적 발견의 풍부한 원천이며, 귀납은 수학자의 창조적인 사고에서 본질적인 역할을 한다. 수학은 귀납과 유추를 통해 발견에 이르는 '관찰과학'으로서 자연과학과 매우 유사하다.

폴리아는 문제 해결활동에서 단지 주어진 문제의 해결에만 몰두하는 것은 충분하다고 할 수 없으며,주어진 문제가 어디에서 비롯된 것인지, 유사한 문제를 풀어본 적이 있는지, 본래의 문제를 변형하여 새롭게 제기된 문제를 해결할 수 있는지, 더 나아가 해결된 문제를 활용하여 또 다른 새로운 문제를 해결할 수 있는지 등의 유용한 질문을 요구된다.

이처럼 수학적 문제해결 교육에서 주어진 문제만을 다룰 것이 아니라 이를 발전적으로 취급하여 새로운 문제를 제기하는 과정을 함께 다루어야 할 것이다.

폴리아의 문제제기의 중요성

폴리아는 문제제기의 중요성을 문제해결을 위한 수단으로서의 측면과 문제를 한 후 그 결과를 이용하여 새로운 문제를 지기하는 두 가지 측면에서 고찰하였다.

1.본래의 문제를 변형하여 새롭게 문제를 제기할 수 있는지, 해결된 문제를 이용하여 새로운 문제를 해결할 수 있는지를 생각 할 수 있게 해준다고 하였다.

2.‘일반화’, ‘특수화’, ‘유추’등의 전략을 이용하여 학생들은 문제로 부터 다시 사고하게 되고, 문제에 대한 계획을 세우려 시도하는 과정들에서 자신의 생각을 통하여 문제해결 활동에 능동적이고 적극적으로 참여하면 효과적인 문제제기 활동이 가능하다고 하였다.

브라운과 윌터

문제제기를 ‘수용단계’ ,‘도전단계’로 나누었다

- ‘수용단계’ – 탐구 과정에서 주어진 것을 있는 그대로 받아 들이는 단계

- ‘도전단계’- 체계적으로 문제를 만드는 단계

브라운과 월터가 제안한 What-If-Not전략의 단계

0단계 - 출발점 선택하기

1단계 – 속성 열거하기: 문제를 구성하고 있는 요소나 속성을 모두 열거해 본다.

2단계 – 속성 부정하기: 전 단계에서 열거한 속성이 '만약 그렇지 않다면 어떻게 될 것인가'

3단계 – 질문과 문제제기 하기: 전 단계에서 생각한 의문을 기초로 새로운 문제를 만든다.

4단계 – 설정된 문제 분석하기: 새로 만든 문제를 분석하거나 해를 찾는다.

예) 피보나치 수열

0단계 – 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ……. 인 피보나치 수열을 출발점으로 선택

1단계: 속성열거하기

1) 이 수열은 처음 두 수가 같고 그것은 1이다.

2) 만일 연속하는 임의의 두 항에 무언가를 한다면 다음 항을 얻는다.

3) 우리가 하는 것은 덧셈 연산이다.

2단계: 나열한 속성 중 어느 하나에 What-If-Not을 수행

1)만일 처음 두 수가 1이 아니라면 어떻게 될까?

2)처음 두 수가 10,7 이라면 10 , 7, 17, 24, 41, 65, …………

3단계: 다음 단계에서 변형된 현상에 대하여 몇 가지 새로운 질문을 던진다.

1) 연속된 항의 비에 대한 극한은 어떤 값일까?

2) 그 수열의 제n항을 만드는 명시적인 공식은 무엇일까?

3) 이 수열의 성질과 원래 수열의 성질과는 어떻게 비교될까?

4단계: 최종적으로 이 질문을 분석해 본다.

두 항의 비에 주목하여 보자. 10/7=1.429 , 7/17=0.412 , 17/24=0.70 106/171=0.620 이고 이를 계속해 보면 0.618 황금비에 매우 가까워 지고 원래 피보나치 수열 또한 황금비에 가까워 짐을 알 수 있다. 왜 이러한 일이 일어나고 있는지 분석함으로써 원래의 현상에 대한 분석으로 되돌아간다.

문제제기의 중요성과 역할 정리

1. 창의적 능력이나 특별한 수학적 능력의 발현에 도움
2. 탐구 지향적인 학습 태도를 길러 준다.
3. 학생들의 수학에 대한 이해 정도를 파악할 수 있는 수단이 된다.
4. 학생들에게 이미 배운 지식을 종합적으로 이용 할 수 있는 기회를 제공한다.
5. 학력 수준이 낮은 학생들에게도 의미 있는 수학 학습 활동을 제공한다.
6. 수학에 대한 긍정적인 성향을 함양시키는 수단이 된다.

2. 수학적 모델링

수학을 학습하는 중요한 목적 중의 하나는 실생활의 여러 가지 문제를 수학을 이용하여 해결하기 위한 것이다.실생활 문제를 해결하기 위하여 수학을 이용한 다는 것은 실생활 문제를 수학적 문제로 변환한 다음 그 문제를 해결한 결과를 해석하여 실생활 문제를 해결하는 것이다.

NCTM에서는 실세계 현상을 수학적 기호나 식, 그래프, 도형 등과 같은 수학적 방법으로 나타낸 추상적 모델을 수학적 모델의 개념으로 사용할 수 있다고 하였다.

NCTM의 수학적 모델링의 과정

1.실세계 문제 상황을 단순화 하여 실제적 문제를 구성한다.

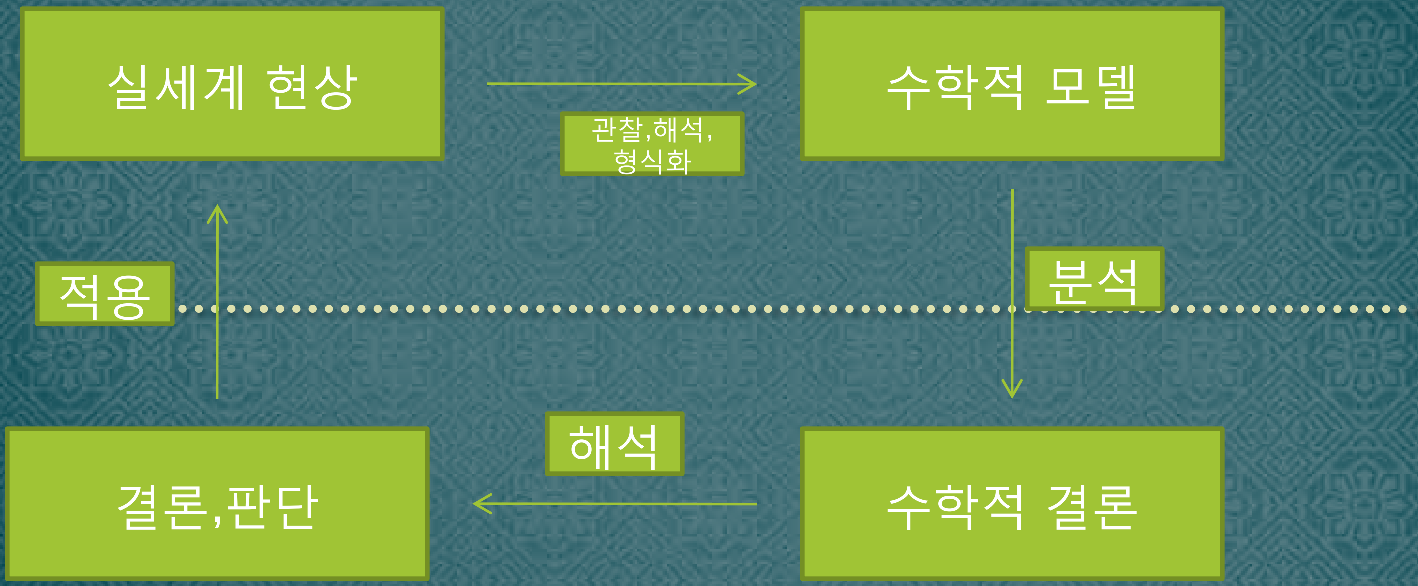
2.구성된 문제를 방정식, 그래프 등을 이용하여 수학적 모델로 나타낸다.

3.수학적 모델을 변형하여 수학적 해를 구한다.

4.수학적 해를 구성된 실제적 문제에 맞게 해설한다.

5.실제적 문제의 해가 실세계 문제 상황에 타당한지를 확인한다.

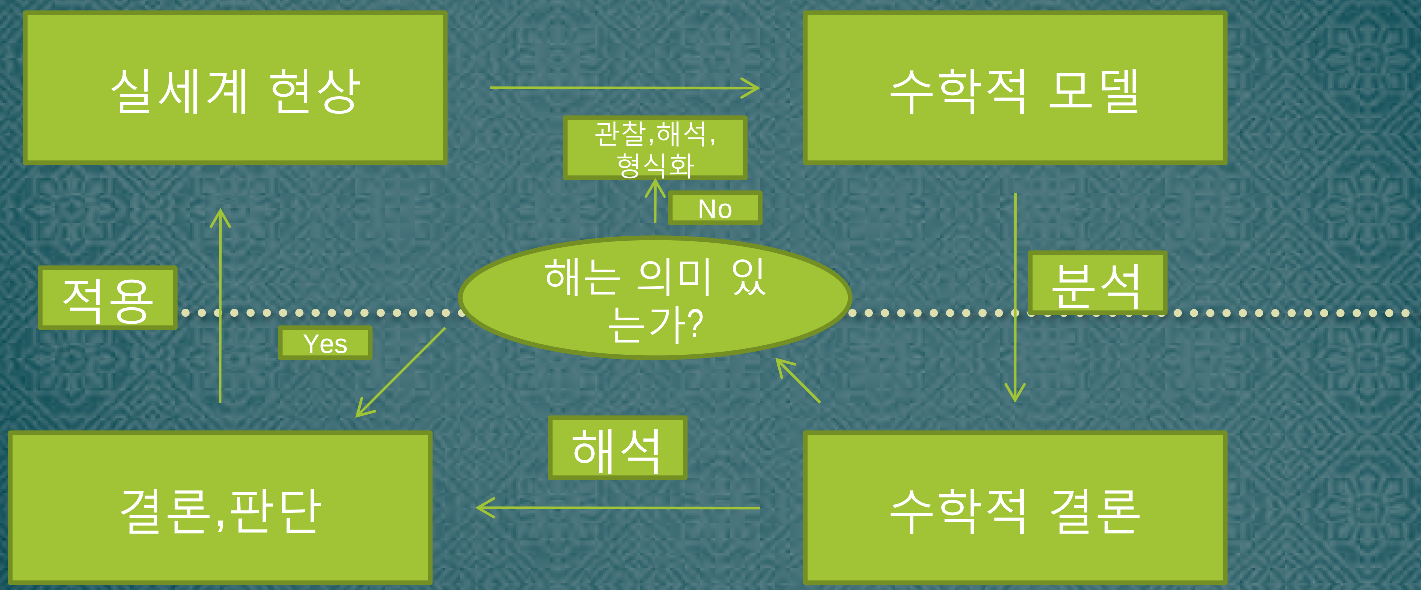
수학적 모델링 과정



수학적 모델링의 정교화

경우에 따라서는 문제 상황이 매우 복잡하여 이를 해결하기 위한 수학적 모델을 만들기가 어렵거나 복잡하여 이를 해결하기 위한 수학적 모델을 만들기가 어렵거나 복잡하여 수학적 모델링의 과정이 쉽지 않은 경우가 있다. 그러므로 수학적 모델을 구한 구한 다음 변인의 수를 점차적으로 늘리면서 더욱 정교한 해를 구할 수 있게 변형하는 것 즉 수학적 모델링의 정교화 과정을사용한다.

수학적 모델링 정교화 과정



수학적 모델링 정교화의 예

Q) 높은 빌딩에서 물체를 지면으로 떨어뜨리고 이를 관찰하여 떨어진 시간과 떨어진 거리의 관계를 알아보자

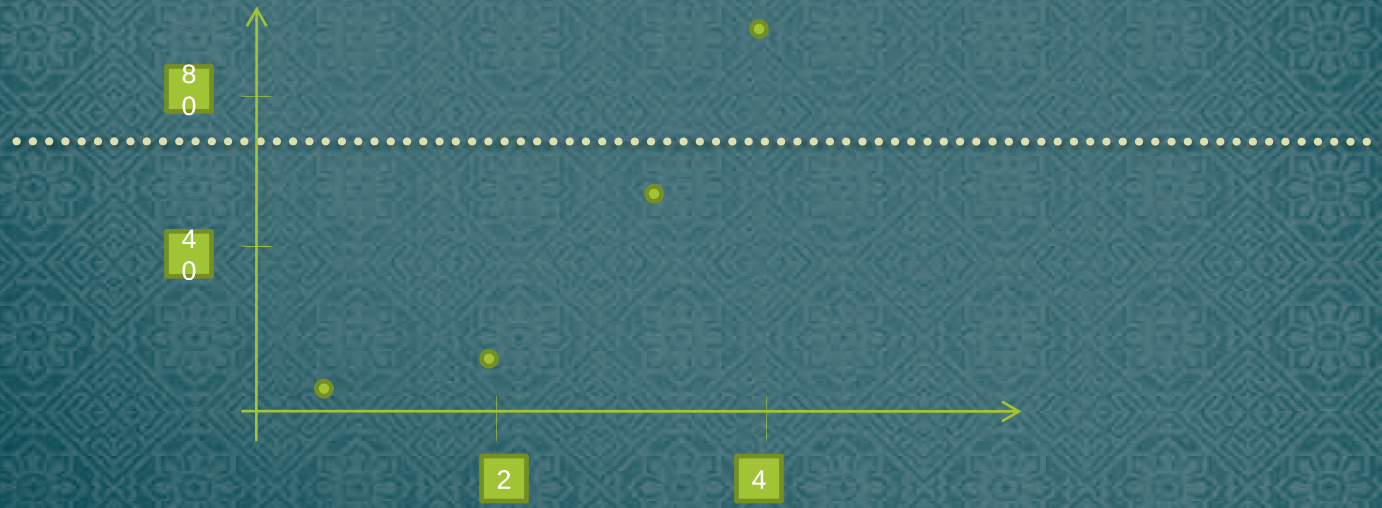
<실세계 상황> 높은 빌딩에서 플라스틱 볼을 지면으로 떨어뜨린 다음, 일정 시간 간격으로 공이 떨어진 거리를 관찰하고 그 결과를 표와 그래프로 나타내어본다.

<단계1 : 실제 문제>

x(초)	1	2	3	4	…
y(Cm)	5	20	44	78	…

문제1 . y를 x에 관한 식으로 나타내어라.
문제2 . 5초 후 볼의 위치는 출발 지점에서 몇 Cm 떨어진 곳에 있는가?
(가정) 볼이 떨어진 거리는 측정한 것이므로 근삿값이다.

<단계2: 수학적 모델>
x와 y의 관계를 파악하기가 어려우므로 이 자료를 좌표 평면에 그래프로 나타내 보면 다음 그림과 같다.



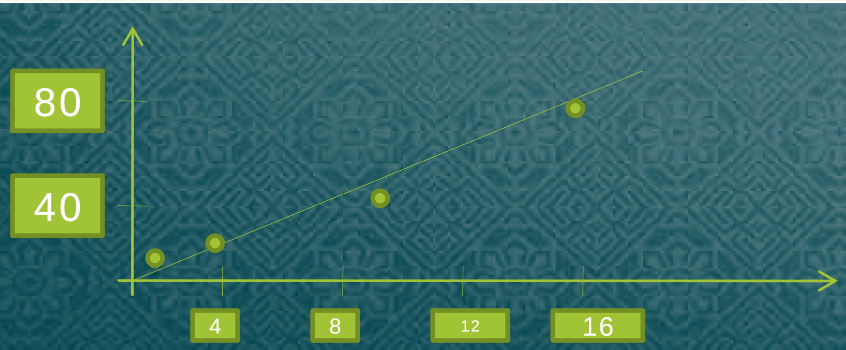
이 그래프는 원점을 지나는 포물선의 모양을 하고 있으므로 구하는 모델은 y=ax^2 일 것으로 예상된다. 이 모델에서 계수 a를 찾기 위하여 점(1,5)를 대입하면 a=5가 되고 y=5x^2에 도달한다.

<단계3 : 모델의 해>
문제 2의 해는 y=5 x 5^2 이 되어 해는 125Cm이다.

<단계4 : 해는 의미가 있는가?>
이 모델은 순서쌍 (2,20)은 만족하지만 (3,44) , (4,78)은 만족하지 못하므로 적절하다고 단언 할 수 없다.

<단계5 : 모델 정교화>
순서쌍 (x,y)를 표현한 그래프는 이차함수의 그래프의 모양을 하고 있으므로 x^2=X라 하면 X와 y의 관계는 아래 표와 같다.

X	1	4	9	16	…
y	5	20	44	78	…



위의 그래프에서 4개의 점은 한 직선을 중심으로 분포되어 있으며 그 직선은 원점(0, 0)과 점 (16, 78)을 지나는 것으로 보면, 이 직선의 기울기는 4.9이다.
따라서 X와y의 관계는 y=4.9X 로 나타내어진다.

이 식에서 X=x^2을 대입하면 문제 1의 답으로 y=4.9x^2을 얻는다
위의 식에서 x=5를 대입하면 y=4.9(5^2)=122.5 는 약 123
따라서 문제2의 답은 123Cm이다.

<단계6 : 해설,적용>
y=5x^2과 y=4.9x^2은 유사한 모델로서 어느 것이 더 정교하다고는 말할 수 없다. 그러나 다른 방법으로 모델 y=4.9x^2을 구해봄으로써 두 모델이 의미가 있음을 인식하게 된다.

일반적으로 지구 표면의 높은 곳에서 가만히 떨어뜨린 물체의 x초 후의 위치 y는 y=gx^2로 나타내어진다. G는 지구중력가속도이고 그 크기는 지구상의 위치에 따라 다르다.

메타인지란?

- 자신의 사고 과정에 대한 지식
- 조종 또는 자동조절
- 신념과 직관에 관한 범주의 지적 행동

(By Schoenfeld)

- 문제해결에서 요구하는 발견술적 전략을 세우기
- 자신의 사고활동을 조절하고 통제하는 능력

메타인지의 구성요소

- 메타인지적 지식
  - 문제를 효율적으로 해결하기 위해 필요한 기능, 전략, 지식
- 메타인지적 기능
  - 성공적인 문제해결을 위해 메타인지적 지식을 실행방법 및 시기를 결정하는 것과 관련된 결정능력

메타인지에 대한 학자들의 견해

- John Dewey, Jean Piaget, Richard R. Skemp
  - 메타인지라는 용어를 사용하지 않았지만, 반성적 사고, 반영적 추상화, 반성적 지능 등과 같은 메타인지적 기능을 강조하였다.
- Schoenfeld
  - 메타인지적 지식, 메타인지적 기능, 지적행동의 세가지 관련된 다른 영역에 초점을 둠.
  - 메타 인지적 지식과 메타인지적 기능을 신념체계와 함께 메타인지의 중요한 측면으로 강조

메타인지에 대한 학자들의 견해

- Joe, Garofalo & Frank K. Lester, JR.
  - 학생들의 문제해결력을 개선하려는 많은 연구가 실패한 이유가 발견술적 기능의 개발을 지나치게 강조하였기 때문임
- George Polya
  - 문제해결 4단계에 모두 영향을 미침
  - 특히 반성단계가 메타인지와 밀접한 관련을 갖음.

문제해결에서 메타인지를 위한 질문

- 우리가 할 수 있는 것이 무엇이지?
- 계획을 가지고 있니?
- 더 풀 … 를 이해 한 거 …
- 이것 …
- 지금 무엇을 하고 있니?
- 왜 그것을 하고 있니?
- 그것이 너에게 어떤 도움을 주지?

학생들 자기자신의 사고 반성 및 조정

메타인지 습관

- 성공적인 문제해결을 위해 수학적 지식뿐만 아니라 문제해결 메타인지 활동 또한 중요하므로, 메타인지 습관은 중요한 습관.
- 메타인지 습관을 기르기 위한 방법
  - 문제해결활동 후 학생들에게 메타인지 사용 여부 질문 및 토론.
  - 메타인지 체크리스트를 스스로 체크해 보게 함.(체크리스트는 책 P132 참고)

문제중심학습(PBL)

- 문제중심학습(Problem-based Learning)
  - 실생활에서 접하게 되는 문제와 유사한 비구

문제해결을 통한 학습
협동학습, 자기주도적 학습
문제해결능력 신장.

- 수학과PBL은 학습자가 가지고 있는 지식을 모두 활용하여 문제를 해결하여 수학적 개념과 원리를 학습시킴.

스태닉과 킬패트릭

- 문제 상황에 직면한 학생들이 그 문제를 해결하기 위하여 기존의 지식 사용한다는 점에 교수학적 기초를 둠.
- 문제해결과정에서 새로운 지식과 이해를 구성한다는 측면에서 문제중심학습과 같은 맥락을 가짐.

PBL의 주요 특징

- 문제로부터 시작
- 학습자 중심
- 교사의 역할은 조력자의 역할
- 협동학습과 자기 주도적 학습 강조
- 평가는 학습자 중심으로 다양한 방법으로 이루어짐.
- 지식획득의 출발점으로서 문제를 사용

PBL이 갖추어야 할 요소

- 학습의 시작으로서의 문제
- 실제적인 문제
- 비구조적인 문제
- 교육과정에 기초한 문제

(PBL문제의 예 - P135 참고)

수학과 PBL의 역할

- 학습하고자 하는 수학적 개념을 주어진 문제상황에서 수학적으로 해석하고 수학적으로 해결하는 과정을 통해 수학을 학습.(문제상황을 수학적 상황으로 이해, 중요한 내용을 수학적 개념과 연결)
- 학습자가 주도적으로 문제를 해결하고, 학습하고자 하는 수학적 개념이나 원리에 대한 정의와 학습하고자 하는 개념에 대한 정리과정 포함.

허난의 수학과 PBL 학습 모형

- 문제 이해하기
- 문제해결 계획 세우기
- 탐구하기
- 미니강의
- 문제해결하기
- 정리

허난의 수학과 PBL 학습 모형

문제 이해하기

흥미 유발
문제제시
수학적 문제 상황으로 이해하기

문제해결 계획세우기

과제수행계획서 작성하기
학습목표 공유 및 문제 재정의하기

탐색하기

미니 강의

문제해결하기

해결안 고안하기
해결안 발표 및 고안하기

정리

해결안에 대한 교사의 정리
해결안 점검 및 해결안 수정
성찰저널 작성