수의 체계 1

1

1.1 실수의 연산과 대소관계

수의 분류

실수의 분류

실수
- 유리수
  - 정수
    - 양의 정수(자연수)
    - 0
    - 음의 정수
  - 정수가 아닌 유리수 **유한소수 순환소수**
- 무리수 **무한소수**

$1, 2, 3, \cdots$

$-1, -2, -3, \cdots$

$\sqrt{2} = 1.4142135\cdots$

$\sqrt{3} = 1.7320508\cdots$

$\pi = 3.1415926\cdots$

$\frac{1}{4} = 0.25, \quad \frac{27}{25} = 1.08 \quad \frac{1}{3} = 0.33333\cdots, \quad \frac{41}{33} = 1.242424\cdots$

유한소수 **순환소수** **무한소수**

분수꼴로 나타낼 수 있다

분수꼴로 나타낼 수 없다

두 정수의 합, 차, 곱은 정수

두 정수의 나눈 몫 →정수?
→유리수

실수의 집합

실수는 수직선 위의 점과 일대일 대응되어 수직선

→ 실직선(real line)

실직선의 부분집합으로 두 실수 a, b 사이의 실수 전체 집합 → 구간(interval)

$$(a,\ b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

x 는 R에 속한다.

$$[a,\ b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x < b\}$$

$$(a,\ b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \le b\}$$

$$[a,\ b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\}$$

$(a,\ b)$는 개구간(open interval), $[a,\ b]$는 폐구간(closed interval)

구간의 길이가 무한인 경우

$$(a,\ \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$$

$$(-\infty,\ a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \le a\}$$

$$(-\infty,\ \infty) = \mathbb{R}$$

예제 1 $\sqrt{2}$ 는 유리수가 아님을 증명하라.

[풀이] $\sqrt{2}$가 유리수라고 가정하면

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b} \; (a,\ b\text{는 서로소인 자연수}) \qquad \cdots ①$$

공약수가 1뿐인 둘 이상의 자연수

둘 이상의 수의 공통인 약수

와 같이 기약분수로 나타낼 수 있다.

①의 양변을 제곱하면

$$2 = \frac{a^2}{b^2} \text{ 즉 } a^2 = 2b^2 \qquad \cdots ②$$

여기서 a^2이 짝수이므로 a도 짝수여야 한다.

따라서 $a = 2k$ (k는 자연수)라 놓으면 ②는

$$(2k)^2 = 2b^2 \text{ 즉 } b^2 = 2k^2 \qquad \cdots ③$$

그런데 ③에서 b^2은 짝수이므로 b도 짝수여야 한다.

그러나 이것은 $a,\ b$가 서로소라는 가정에 모순이므로 $\sqrt{2}$는 유리수가 아니다. …○

예제 2 a, b가 유리수일 때, 다음이 성립함을 증명하여라.

$$a+b\sqrt{2}=0\text{이면 } a=b=0$$

[풀이] $b \neq 0$라고 가정하면 $\sqrt{2} = -\dfrac{a}{b}$

a, b는 유리수이고, 유리수는 나눗셈에 대하여 닫혀 있으므로

$-\dfrac{a}{b}$도 유리수이다. 그러므로 무리수 $\sqrt{2}$가 유리수라는 모순

이 나타나는데 이 모순은 $b \neq 0$라는 가정 때문이다.

따라서 $b = 0$이고, 이것을 $a + b\sqrt{2} = 0$에 대입하면 $a = 0$

$\therefore a = b = 0$ …❍

실수 전체의 집합에서 두 이항연산 덧셈과 곱셈 정의 :

(1) $a+b=b+a$ [덧셈에 관한 교환법칙]

(2) $(a+b)+c=a+(b+c)$ [덧셈에 관한 결합법칙]

(3) 임의의 실수 a에 대하여 $a+0=0+a=a$인 실수 0이 존재한다.
[덧셈에 대한 항등원의 존재]

(4) 임의의 실수 a에 대하여 $a+x=x+a=0$인 실수 x가 단 하나 존재한다. 이 x를 $-a$로 나타낸다. [덧셈에 대한 a의 역원]

(5) $ab=ba$ [곱셈에 관한 교환법칙]

(6) $(ab)c=a(bc)$ [곱셈에 관한 결합법칙]

(7) 임의의 실수 a에 대하여 $a\cdot 1=1\cdot a=a$인 실수 1이 존재한다.
[곱셈에 대한 항등원의 존재]

(8) 임의의 실수 $a\neq 0$에 대하여 $ay=ya=1$인 실수 y가 단 하나 존재한다. 이 y를 a^{-1} 또는 $\dfrac{1}{a}$로 나타낸다. [곱셈에 대한 a의 역원]

(9) $a(b+c)=ab+ac,\ (a+b)c=ac+bc$ [분배법칙]

실수 전체의 집합 에서 두 이항연산 뺄셈과 나눗셈 정의 :

$$a - b = a + (-b)$$

$$a \div b = ab^{-1} = a \cdot \frac{1}{b} \, (b \neq 0)$$

정리 1

임의의 실수 a, b, c에 대하여

(1) $a0 = 0a = 0$

(2) $-(-a) = a$, $(-a)b = a(-b) = -ab$, $(-a)(-b) = ab$

(3) $a + b = a + c \Rightarrow b = c$ [덧셈에 관한 소거법칙]

(4) $ab = ac$, $a \neq 0 \Rightarrow b = c$ [곱셈에 관한 소거법칙]

정리 2

임의의 실수 a, b에 대하여

(1) $a^2 \geq 0$

(2) $a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$

(3) $a > 0,\ b > 0$일 때 $a > b \Leftrightarrow a^2 > b^2$

정리 3

임의의 실수 a, b에 대하여

(1) $|ab| = |a|\,|b|$

(2) $|a+b| \le |a| + |b|$, $||a| - |b|| \le |a-b|$ [삼각부등식]

(3) $|a| < |b| \Leftrightarrow a^2 < b^2$

실수 a의 절대값 (absolute value)

$$|a| = \begin{cases} a, & a \ge 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$$

1.2 복소수의 연산과 기본성질

두 방정식

(1) $x^2-2=0$ → 실수 범위에서 해 → $x^2=2$ → $\therefore x=\pm\sqrt{2}$

(2) $x^2+2=0$ →실수 범위에서 해 → $x^2=-2$ → 모든 실수에서 $x^2\geq 0$

→ 실수 x는 존재하지 않는군…

→실수 밖의 새로운 수 → 제곱이 -1 → I (허수단위)로 표기

$i^2=-1$

→ $x=\pm\sqrt{2}\,i$

어떤 꼴인가요?

복소수

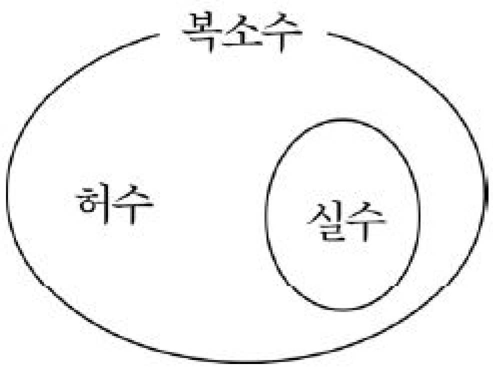
임의의 실수 a, b

$$a + bi$$

b=0 일때 : 실수

a=0 일때 : 허수

a=0, b≒0 일때 : 순허수



수의 분류?

복소수의 분류
a, b가 실수일 때

$$
\text{복소수}(a+bi)\begin{cases}\text{실수}(b=0)\\[2ex] \text{허수}\begin{cases}\text{순허수}(a=0,\ b\neq 0)\\[2ex] \text{순허수가 아닌 허수}(a\neq 0,\ b\neq 0)\end{cases}\end{cases}
$$

복소수의 덧셈, 뺄셈, 곱셈은?

복소수에서 덧셈, 뺄셈 → 실수부분과 허수부분끼리 계산

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$$

$$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$$

복소수에서 곱셈 → 허수단위 i를 문자와 같이 계산 (i^2 = -1)

$$(a+bi)(c+di)=ac+(ad+bc)i+bdi^2$$

$$=ac+(ad+bc)i-bd=(ac-bd)+(ad+bc)i$$

복소수의 나눗셈은?

복소수에서 나눗셈 → 켤레복소수를 분자, 분에 곱

→ 분모를 실수로 만들어 계산

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}$$

$$=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$$

$$=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i \quad (\text{단, } c+di\neq 0)$$

(켤레복소수 : 복소수에 대하여 허수부분 부호 바꾼 복소수)

a+bi의 켤레복소수 → a-bi

$$(a+bi)+(a-bi)=2a$$

$$(a+bi)(a-bi)=a^2-(bi)^2=a^2+b^2$$

예제 1 다음 등식을 만족하는 두 실수 x, y의 값을 구하여라.

$$2x-y+(x+3y)i=4-5i$$

[풀이] x, y가 실수이므로 $2x-y$, $x+3y$도 실수이다.

이 때, 복소수가 서로 같을 조건에 의해

$$2x-y=4,\ \ x+3y=-5$$

를 만족한다. 두 식을 연립하여 풀면

$$\therefore\ x=1,\ \ y=-2 \qquad\qquad \cdots ㅇ$$

예제 2 복소수 $\dfrac{4+3i}{1+2i}$를 $a+bi$의 꼴로 나타내어라.

[풀이] $\dfrac{4+3i}{1+2i}=\dfrac{(4+3i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}$

$$=\frac{(4\cdot 1+3\cdot 2)+(3\cdot 1-4\cdot 2)i}{1+4}$$

$$=\frac{10-5i}{5}$$

$$=2-i$$

연산의 성질

- 복소수 : 덧셈, 곱셈에 대해 교환법칙, 결합법칙, 분배법칙성립

- 복소수 : 덧셈에 대한 항등원 → 0
  곱셈에 대한 항등원 → 1

$$(a+bi)+0=0+(a+bi)=a+bi$$

$$(a+bi)\cdot 1=1\cdot (a+bi)=a+bi$$

덧셈에 대한 역원 → $a+bi$의 역원은 $-(a+bi)$

곱셈에 대한 역원 → $a+bi$의 역원은 $\dfrac{1}{a+bi}$

$$(a+bi)+\{-(a+bi)\}=0$$

$$(a+bi)\cdot\left(\frac{1}{a+bi}\right)=(a+bi)\cdot\left(\frac{a-bi}{a^2+b^2}\right)=1 \quad (\text{단, } a+bi\neq 0)$$

예제 3 복소수 $\dfrac{i}{1+2i}$의 덧셈과 곱셈에 대한 역원을 $a+bi$의 꼴로 나타내어라.

[풀이] $\frac{i}{1+2i}=\frac{i(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}=\frac{2+i}{5}$ 이므로 $\frac{i}{1+2i}$ 의 덧셈에 대한 역원은

$$-\frac{2+i}{5}=-\frac{2}{5}-\frac{1}{5}i$$

또, $\frac{i}{1+2i}$ 의 곱셈에 대한 역원은

$$\frac{1+2i}{i}=\frac{(1+2i)i}{i^2}=\frac{-2+i}{-1}=2-i$$

…ㅇ

예제 4 $x=1+i$, $y=1-i$일 때, x^2+y^2의 값을 구하여라.

[풀이] x, y의 합과 곱을 구하면

$$x+y=1+i+1-i=2$$

$$xy=(1+i)(1-i)=1-i^2=1+1=2$$

주어진 식에서 $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$이므로

$$x^2+y^2=2^2-2\cdot 2=0$$

$\therefore x^2+y^2=0$