


제6장 행렬의 응용

제 6 장 행렬의 응용

1. 마코브 분석

- 시간의 흐름에 따라 시스템의 상태가 확률적으로 변화하는 과정과 그 결과에 대하여 파악하는 기법
- **확률과정(stochastic process)**: 시스템의 상태가 시간에 따라 확률적으로 변해가는 과정 (예)시장점유율(상표전환문제), 재고관리, 노무관리, 외상매출금 관리 등
- **마코브 과정(Markov process)**
확률과정 중에서 시스템의 현재의 상태만 주어지면 과거의 상태와는 무관하게 시스템의 미래 상태가 결정되는 성질(마코브 특성)을 가지는 확률과정
 - 마코브과정은 확률과정의 가장 대표적 사례
 - 마코브 특징: 미래는 현재의 상태에 의해서만 결정되며 전달이나 그 이전의 상황과는 무관한 특징.
- **마코브 연쇄(Markov chain)**
: 마코브 과정에서 시간의 변화를 연속적으로 고려하지 않고 이산적인 경우만 고려한 경우

- 상표전환문제 - 소비자들의 상표 선호에 있어서의 변화가능성을 간단한 표로 요약하면 다음과 같음

상표 선호패턴의 요약

		다음 期		
		한국맥주	고려맥주	
이번 期	한국맥주	0.6	0.4	1.0
	고려맥주	0.2	0.8	1.0

- 위의 표는 현재의 특정 브랜드 맥주를 선호하는 사람이 다음기에 어떤 브랜드의 맥주를 선호할 확률을 나타내는 상표전환 문제와 관련된 것임.
- 첫 행의 의미는 이번 달에 한국맥주를 마신 사람이 다음달에 한국맥주를 그대로 마실 확률은 0.6(60%)이며 고려맥주로 브랜드를 전이(교체)할 확률이 40%이다. 각각의 상태에 따른 확률을 전이확률이라 하며 이러한 현재상태의 전이확률이 행렬로 만들어 진 것을 전이행렬이라고 함.
- 문제: 현재 한국맥주를 마시는 사람이 9개월 후에 한국맥주를 마실 확률은 얼마일까?

- 전이확률: 현재 시점(단계)의 상태에서 다음 시점의 상태로 될 확률
- 전이행렬: 특정상태들이 가질 수 있는 모든 전이확률을 행렬로 만든 것
- 상태확률: 특정시점에서 발생하는 상태의 확률로 상태확률의 합은 1임. 특정시점의 상태확률은 시작시점의 상태확률과 특정시점의 전이행렬의 곱으로 계산됨.
- 안정상태: 상태확률에 전이행렬을 곱해도 상태확률이 변하지 않는 상태로써 장기간 고정된 시장점유율 등을 말함.

- $A_A(i)$ = 현재 한국맥주(A)를 선호하는 소비자가 i 번째 기간에도 한국맥주(A)를 선호할 확률

- $B_A(i)$ = 현재 한국맥주(A)를 선호하는 소비자가 i 번째 기간에는 고려맥주(B)를 선호할 확률

- $A_B(i)$ = 현재 고려맥주(B)를 선호하는 소비자가 i 번째 기간에는 한국맥주(A)를 선호할 확률

- $B_B(i)$ = 현재 고려맥주(B)를 선호하는 소비자가 i 번째 기간에도 고려맥주(B)를 선호할 확률

- 현재 한국맥주를 선호하는 소비자는 $[A_A(1) = 1 \quad B_A(1) = 0]$ 으로 정의할 수 있으며, 현재 고려맥주를 선호하는 소비자는 $[A_B(1) = 0 \quad B_B(1) = 1]$ 로 정의
- 어느 소비자가 현재 한국맥주를 선호한다면, 즉 $[A_A(1) = 1 \quad B_A(1) = 0]$ 이라면 다음 달에는 다음과 같이 변함.

$$\begin{aligned}
 [A_A(2) \quad B_A(2)] &= [A_A(1) \quad B_A(1)] \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix} \\
 &= [1 \quad 0] \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix} = [0.6 \quad 0.4]
 \end{aligned}$$

- 이와 같은 방법으로 $A_A(k)$, $B_A(k)$, $k \geq 3$ 을 계산해 보면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} [A_A(3) \quad B_A(3)] &= [A_A(2) \quad B_A(2)] \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix} \\ &= [0.6 \quad 0.4] \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix} \\ &= [0.44 \quad 0.56] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [A_A(4) \quad B_A(4)] &= [0.44 \quad 0.56] \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix} \\ &= [0.38 \quad 0.62] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [A_A(5) \quad B_A(5)] &= [0.38 \quad 0.62] \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix} \\ &= [0.35 \quad 0.65] \end{aligned}$$

$$[A_A(6) \quad B_A(6)] = [0.34 \quad 0.66]$$

$$[A_A(7) \quad B_A(7)] = [0.34 \quad 0.66]$$

$$[A_A(8) \quad B_A(8)] = [0.33 \quad 0.67]$$

$$[A_A(9) \quad B_A(9)] = [0.33 \quad 0.67]$$

- 이 과정을 계속 반복하게 되면 확률치의 변화는 점점 작아져 $[0.33 \ 0.67]$ 에 수렴
- 이 분석과정에서 $\begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}$ 과 같은 행렬을 **전이행렬(transition matrix)**이라 하며 최종적인 확률값인 $[0.33 \ 0.67]$ 과 같은 확률을 안정상태하의 확률 (steady-state probabilities)이라 부름.
- 일정기간이 지나게 되면

$$[A_A(n) \ B_A(n)] = [A_A(n+1) \ B_A(n+1)]$$

$$[A_B(n) \ B_B(n)] = [A_B(n+1) \ B_B(n+1)]$$

이 성립하게 되어 괄호 안의 기간표시가 불필요해지므로

$$A_A + B_A = 1$$

인 점과 다음 식을 이용하면 안정상태하의 확률을 쉽게 구할 수 있음.

$$[A_A \ B_A] = [A_A \ B_A] \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}$$

새로 입주할 시작한 아파트촌에 햇님과 달님의 2개 아이스크림가게가 입주하여 치열한 경쟁을 벌이고 있다. 이번 주와 다음 주 사이의 고객들의 아이스크림 브랜드 선호패턴을 요약하면 다음 표와 같다.

		다음 주			
		햇님	달님		
이번 주	햇님	[0.9	0.1]
	달님	[0.8	0.2]

장기적으로 보아 각 아이스크림가게의 점유율은 어느 수준에 달할 것으로 보이는가?

풀이

$$[a \ b] = [a \ b] \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.8 & 0.2 \end{bmatrix}$$

이를 정리하면

$$a = (0.9)a + (0.8)b$$

$$b = (0.1)a + (0.2)b$$

$$a + b = 1$$

안정상태의 확률은 $a = 0.89$, $b = 0.11$ 이 되어, 햇님의 시장점유율은 89%에 달하나 달님은 11%에 그칠 것으로 전망된다.

2. 분산, 공분산, 상관계수 행렬

- p 개의 서로 다른 변수에 관한 관측치가 n 개의 관찰대상 각각에 대해 주어졌을 때, j 번째 관찰대상의 i 번째 변수를 x_{ij} 라 정의한다면, 주어진 자료는 다음과 같이 $p \times n$ 행렬로 나타낼 수 있으며 각 변수의 평균값도 계산 가능

$$\begin{aligned}
 \mathbf{X} &= \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{p1} & x_{p2} & \cdots & x_{pn} \end{bmatrix} = [\mathbf{X}_1 \mathbf{X}_2 \cdots \mathbf{X}_n] \\
 & \quad \quad \quad \begin{matrix} (p \times n) & & (n \times 1) \\ & & \text{합벡터} \\ & & (p \times 1) \end{matrix} \\
 \bar{\mathbf{X}} &= \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \vdots \\ \bar{x}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n x_{1i}/n \\ \sum_{i=1}^n x_{2i}/n \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n x_{pi}/n \end{bmatrix} = \frac{1}{n} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{p1} & x_{p2} & \cdots & x_{pn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{n} \mathbf{X} \mathbf{1}
 \end{aligned}$$

- $\mathbf{X}_i = [x_{1i} \ x_{2i} \ \dots \ x_{ji}]^T$, $\mathbf{1} = [1 \ 1 \ \dots \ 1]^T$ 로 정의. 평균값이 구해지면 분산과 공분산은 다음 과정을 거침.

$$\mathbf{S} = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (\mathbf{X}_j - \bar{\mathbf{X}})(\mathbf{X}_j - \bar{\mathbf{X}})^T$$

$$= \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n \begin{bmatrix} x_{1j} - \bar{x}_1 \\ x_{2j} - \bar{x}_2 \\ \vdots \\ x_{dj} - \bar{x}_d \end{bmatrix} [x_{1j} - \bar{x}_1 \quad x_{2j} - \bar{x}_2 \quad \dots \quad x_{dj} - \bar{x}_d]$$

$$= \frac{1}{n-1} \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n (x_{1j} - \bar{x}_1)(x_{1j} - \bar{x}_1) & \sum_{j=1}^n (x_{1j} - \bar{x}_1)(x_{2j} - \bar{x}_2) & \dots & \sum_{j=1}^n (x_{1j} - \bar{x}_1)(x_{dj} - \bar{x}_d) \\ \sum_{j=1}^n (x_{2j} - \bar{x}_2)(x_{1j} - \bar{x}_1) & \sum_{j=1}^n (x_{2j} - \bar{x}_2)(x_{2j} - \bar{x}_2) & \dots & \sum_{j=1}^n (x_{2j} - \bar{x}_2)(x_{dj} - \bar{x}_d) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{j=1}^n (x_{dj} - \bar{x}_d)(x_{1j} - \bar{x}_1) & \sum_{j=1}^n (x_{dj} - \bar{x}_d)(x_{2j} - \bar{x}_2) & \dots & \sum_{j=1}^n (x_{dj} - \bar{x}_d)(x_{dj} - \bar{x}_d) \end{bmatrix}$$

- 행렬 $\mathbf{X}\mathbf{1}^T$, $\mathbf{X} - \frac{1}{n} \bar{\mathbf{X}}\mathbf{1}\mathbf{1}^T$, $(\mathbf{X} - \frac{1}{n} \bar{\mathbf{X}}\mathbf{1}\mathbf{1}^T)(\mathbf{X} - \frac{1}{n} \bar{\mathbf{X}}\mathbf{1}\mathbf{1}^T)^T$ 를 구해보면

$$\mathbf{X}\mathbf{1}^T = \frac{1}{n} \bar{\mathbf{X}}\mathbf{1}\mathbf{1}^T = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 & \bar{x}_1 & \cdots & \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 & \bar{x}_2 & \cdots & \bar{x}_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \bar{x}_j & \bar{x}_j & \cdots & \bar{x}_j \end{bmatrix}$$

평균행렬

$$\mathbf{X} - \frac{1}{n} \bar{\mathbf{X}}\mathbf{1}\mathbf{1}^T = \begin{bmatrix} x_{11} - \bar{x}_1 & x_{12} - \bar{x}_1 & \cdots & x_{1n} - \bar{x}_1 \\ x_{21} - \bar{x}_2 & x_{22} - \bar{x}_2 & \cdots & x_{2n} - \bar{x}_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{j1} - \bar{x}_j & x_{j2} - \bar{x}_j & \cdots & x_{jn} - \bar{x}_j \end{bmatrix}$$

편차행렬

$$\left(\mathbf{X} - \frac{1}{n} \mathbf{X} \mathbf{1} \mathbf{1}^T\right) \left(\mathbf{X} - \frac{1}{n} \mathbf{X} \mathbf{1} \mathbf{1}^T\right)^T \quad \text{편차곱의 합 행렬}$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n (x_{1j} - \bar{x}_1)(x_{1j} - \bar{x}_1) & \sum_{j=1}^n (x_{1j} - \bar{x}_1)(x_{2j} - \bar{x}_2) & \cdots & \sum_{j=1}^n (x_{1j} - \bar{x}_1)(x_{dj} - \bar{x}_d) \\ \sum_{j=1}^n (x_{2j} - \bar{x}_2)(x_{1j} - \bar{x}_1) & \sum_{j=1}^n (x_{2j} - \bar{x}_2)(x_{2j} - \bar{x}_2) & \cdots & \sum_{j=1}^n (x_{2j} - \bar{x}_2)(x_{dj} - \bar{x}_d) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{j=1}^n (x_{dj} - \bar{x}_d)(x_{1j} - \bar{x}_1) & \sum_{j=1}^n (x_{dj} - \bar{x}_d)(x_{2j} - \bar{x}_2) & \cdots & \sum_{j=1}^n (x_{dj} - \bar{x}_d)(x_{dj} - \bar{x}_d) \end{bmatrix}$$

따라서

$$\left(\mathbf{X} - \frac{1}{n} \mathbf{X} \mathbf{1} \mathbf{1}^T\right) \left(\mathbf{X} - \frac{1}{n} \mathbf{X} \mathbf{1} \mathbf{1}^T\right)^T = (n-1) \mathbf{S}$$

- $(AB)^T = B^T A^T$ 의 특성을 이용하면

$$\left(X - \frac{1}{n} X \mathbf{1} \mathbf{1}^T \right) \left(X - \frac{1}{n} X \mathbf{1} \mathbf{1}^T \right)^T$$

$$= X \left(I - \frac{1}{n} \mathbf{1} \mathbf{1}^T \right) \left(I - \frac{1}{n} \mathbf{1} \mathbf{1}^T \right)^T X^T$$

$$= X \left[I - \frac{1}{n} \mathbf{1} \mathbf{1}^T - \frac{1}{n} \mathbf{1} \mathbf{1}^T + \frac{1}{n^2} (\mathbf{1} \mathbf{1}^T) (\mathbf{1} \mathbf{1}^T) \right] X^T$$

$$= X \left(I - \frac{1}{n} \mathbf{1} \mathbf{1}^T \right) X^T$$

- 평균행렬 $\bar{\mathbf{X}} = \frac{1}{n} \mathbf{X} \mathbf{1}$

분산 · 공분산 행렬 $\mathbf{S} = \frac{1}{n-1} \mathbf{X} (\mathbf{I} - \frac{1}{n} \mathbf{1} \mathbf{1}^T) \mathbf{X}^T$

상관계수행렬 \mathbf{R} 은 다음 과정을 거쳐 도출

$$\mathbf{D}^{-\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{S_{11}}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{S_{22}}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\sqrt{S_{dd}}} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \frac{S_{11}}{\sqrt{S_{11}}\sqrt{S_{11}}} & \frac{S_{12}}{\sqrt{S_{11}}\sqrt{S_{22}}} & \cdots & \frac{S_{1j}}{\sqrt{S_{11}}\sqrt{S_{jj}}} \\ \frac{S_{21}}{\sqrt{S_{11}}\sqrt{S_{22}}} & \frac{S_{22}}{\sqrt{S_{22}}\sqrt{S_{22}}} & \cdots & \frac{S_{2j}}{\sqrt{S_{22}}\sqrt{S_{jj}}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{S_{1j}}{\sqrt{S_{11}}\sqrt{S_{jj}}} & \frac{S_{2j}}{\sqrt{S_{22}}\sqrt{S_{jj}}} & \cdots & \frac{S_{jj}}{\sqrt{S_{jj}}\sqrt{S_{jj}}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & r_{12} & \cdots & r_{1j} \\ r_{12} & 1 & \cdots & r_{2j} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_{1j} & r_{2j} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \mathbf{D}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{S} \mathbf{D}^{-\frac{1}{2}}$$

다음과 같이 자료행렬이 주어져 있을 때 평균, 분산, 공분산, 상관계수를 구하여라.

$$\mathbf{X} = \begin{array}{ccc} \text{관측치 1} & \text{관측치 2} & \text{관측치 3} \\ \left[\begin{array}{ccc} 4 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{array} \right] & \begin{array}{l} \text{변수 1} \\ \text{변수 2} \end{array} \end{array}$$

풀이

$$\text{평균행렬 } \bar{\mathbf{X}} = \frac{1}{n} \mathbf{X} \mathbf{1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

분산 · 공분산 행렬

$$\mathbf{S} = \frac{1}{n-1} \mathbf{X} (\mathbf{I} - \frac{1}{n} \mathbf{1} \mathbf{1}^T) \mathbf{X}^T$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{3-1} \begin{bmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \left[\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} [1 \ 1 \ 1] \right] \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

상관계수 행렬 $\mathbf{R} = \mathbf{D}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{S} \mathbf{D}^{-\frac{1}{2}}$

$$\begin{aligned} &= \begin{bmatrix} 0.378 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.378 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -0.189 \\ -0.189 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$