8장 함수의 극한과 연속성

1. 함수의 극한

1) 함수의 수렴과 발산

- 함수 f(x)에서 x가 a와 다른 값을 가지면서, a에 한없이 가까워질 때, f(x)의 값이 일정한 값 α에 한없이 가까워지면 x→a 일때 함수 f(x)는 α에 수렴한다고 하고

  x→a 일때 f(x)→α 또는 $\lim_{x \to a} f(x) = \alpha$

  로 나타내며 α를 f(x)의 극한값 또는 극한이라 함.
- 극한은 좌극한과 우극한이 일치할 때 존재(유일)

$$\lim_{x \to a-} f(x) = \alpha \to \text{좌극한}$$
$$\lim_{x \to a+} f(x) = \alpha \to \text{우극한}$$

- 함수의 발산
  - 함수 f(x)에서 x→a일 때 f(x)의 값이 한없이 커지면 x→a일 때 f(x)는 양의 무한대로 발산 x→a일 때 f(x)→∞ 또는

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

  - 함수 f(x)에서 x→a일 때 f(x)의 값이 음수로서 그 절대값이 한없이 커지면 x→a일 때 f(x)는 음의 무한대로 발산 x→a일 때 f(x)→−∞ 또는

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

2) 함수의 극한의 성질

$\lim_{x \to a} f(x) = \alpha, \quad \lim_{x \to a} g(x) = \beta$, ($\alpha, \beta$는 일정)이면

▷ $\lim_{x \to a} C = C$, (C는 상수)

▷ $\lim_{x \to a} x = a$

▷ $\lim_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x) = \alpha \pm \beta$

$$\lim_{x\to a} f(x) = \alpha, \quad \lim_{x\to a} g(x) = \beta, (\alpha, \beta\text{는 일정})\text{이면}$$

▷ $\lim_{x\to a} f(x) = f(a) = \alpha$

▷ $\lim_{x\to a} g(x) = g(\mathrm{a}) = \beta$

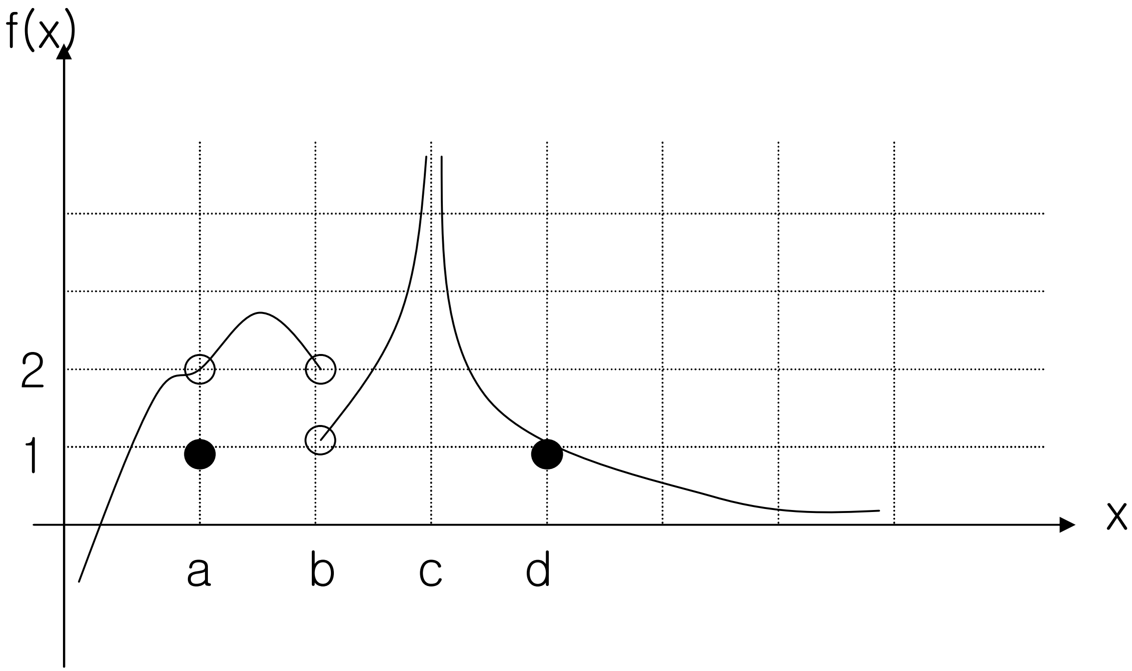
▷ $\lim_{x\to a} kf(x) = \mathrm{k} \lim_{x\to a} f(x) = k\alpha$

▷ $\lim_{x\to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x) = \alpha\beta$

▷ $\lim_{x\to a} [\frac{f(x)}{g(x)}] = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \frac{\alpha}{\beta} (\beta \neq 0)$

▷ $\lim_{x\to a} x^n = a^n$

▷ $\frac{k}{\infty} = 0 \quad (k = \text{상수}), \quad \frac{k}{0^+} = \infty, \quad \frac{k}{0^-} = -\infty \quad (0\text{은 무한소})$



$$f(a) = 1$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = 2 \quad \lim_{x \to b^+} f(x) = 1 \quad \lim_{x \to b} f(x) = \text{극한값이 없다.}$$

$$\lim_{x \to c} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \to d} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0 \quad \lim_{x \to 0} f(x) = -\infty$$

3) 극한값의 계산

- 0/0꼴의 극한값
  - 분수식은 분모 분자를 인수분해하여 약분 계산
  - 무리식은 분모 분자 중 무리식이 있는 쪽을 유리화하여 계산
- ∞/∞꼴
  - 분수식은 분모의 최고차항으로 분모와 분자를 나눈 후 계산
    - ✓ 분모 분자의 차수가 같으면 최고차항의 분모 분자의 계수가 극한
    - ✓ 분자의 차수가 높으면 양(또는 음)의 무한대로 발산
    - ✓ 분모의 차수가 높으면 0에 수렴
  - 무리식은 근호 밖의 최고차항으로 분모 분자를 나눈 후 계산

예제)

$$\lim_{x\to 1}(x^3 - x^2 + 2x + 3) = 5$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{2}{x-1} = \left[\begin{array}{l} \lim_{x\to 1^+}\frac{2}{x-1} = \infty \\ \lim_{x\to 1^-}\frac{2}{x-1} = -\infty \end{array}\right] \therefore \text{극한값은 없다}$$

▷ 부정형의 극한값($\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty-\infty, \infty\times\infty$꼴)

[$\frac{\infty}{\infty}$꼴]

예) $\lim_{x\to\infty}\frac{2x+3}{x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}=0$

예) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3}{2x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x+\frac{1}{x}}{2+\frac{1}{x}}=\frac{\infty}{2}=\infty$

예) $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+3}{5x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{3}{x^2}}{5+\frac{1}{x^2}}=\frac{2}{5}$

$[\frac{0}{0}$꼴$]$-식변형을 통하여 구한다(인수분해, 유리화, 통분, 약분 등)

예) $\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to1}(x+1)=2$

예) $\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2}=\frac{1}{4}$

$\infty-\infty$꼴

예) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)=\lim_{x\to1}\frac{x}{(\sqrt{x^2+x}+x}$

$$=\lim_{x\to1}\frac{1}{(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}=\frac{1}{2}$$

예) $\lim_{x\to0}\frac{1}{x}(1-\frac{1}{(x+1)^2})=2$

1) $\lim_{x\to 1} 3 =$

2) $\lim_{x\to 0} \mathrm{e}^{x} =$

3) $\lim_{x\to 3}[\mathrm{x}^{2}-\mathrm{x}] =$

4) $\lim_{x\to 1}[\mathrm{e}^{x-1}\cdot \ln \mathrm{x}] =$

5) $\lim_{x\to 2}\dfrac{2x^{2}}{x+1} =$

6) $\lim_{x\to 3}\dfrac{2x^{2}-6x}{2x-6} =$

7) $\lim_{x\to \infty}(1+\dfrac{1}{x}) =$

8) $\lim_{x\to \infty}\dfrac{1-x}{x} =$

9) $\lim_{x\to 2^{+}}\dfrac{3}{x-2} =$

10) $\lim_{x\to 1^{-}}\dfrac{1}{x-1} =$

2. 함수의 연속성

1) 기본용어

▷ $a \le x \le b$ (폐구간) $\Leftrightarrow$ 구간$[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$

▷ $a < x < b$ (개구간) $\Leftrightarrow$ 구간(a, b)

▷ $\mathrm{a} \le \mathrm{x} < b$(반폐구간 또는 반개구간) $\Leftrightarrow [\mathrm{a}, \mathbf{b})$

▷ $a \le x \Leftrightarrow [a, \infty)$

▷ $x < b \Leftrightarrow (-\infty, b)$

▷ $-\infty < x < \infty \Leftrightarrow (-\infty, \infty)$

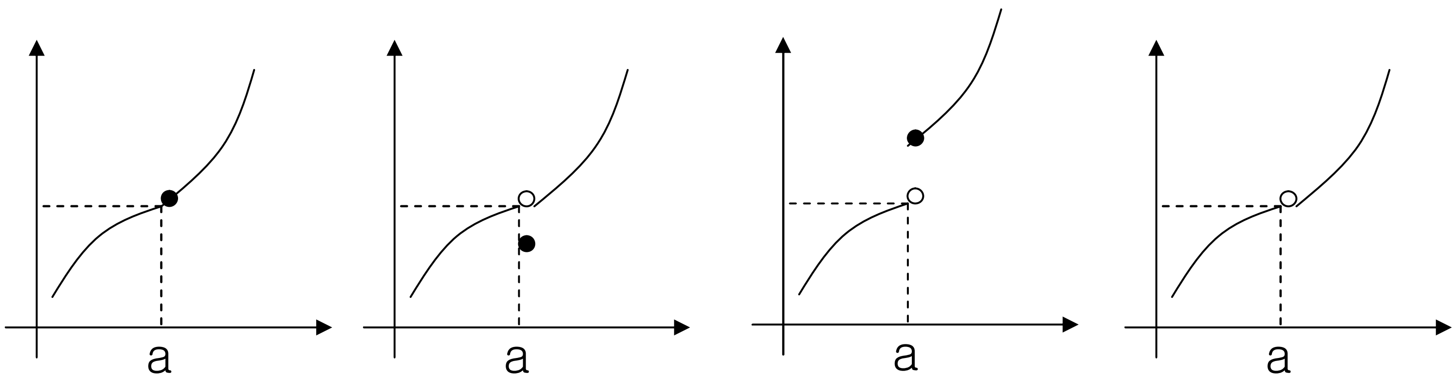
2) 함수의 연속성에 대한 정의

y=f(x)가 x=a에서 연속이기 위해서는

a) 함수 f(x)가 정의되고

b) $\lim_{x \to a} f(x)$ 가 존재하고

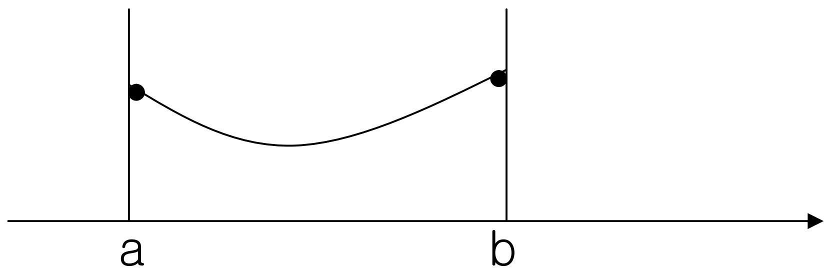
c) $f(\mathrm{a}) = \lim_{x \to a} f(x)$



a,b,c 모두 충족 a에서 연속 | a,b만 충족 | a만 충족 | b만 충족

3) 구간에서의 연속

y=f(x)가 구간 [a,b]에서 정의되고[a,b]에서 연속이기 위해서는 구간의 모든 점에서 연속조건을 만족하고 정의구간의 양끝점 a와 b에서 f(a)와 우극한 a가 일치하고 f(b)와 좌극한 b가 일치할 때 구간[a,b]에서 연속함수임.



예) $f(x)=\begin{bmatrix} \dfrac{x^2-1}{x+1} & (x\neq -1) \\ -1 & (x=-1) \end{bmatrix}$일때 연속성을 조사하라.

(풀이) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{x+1}=-2\neq f(-1)$이므로 $x=-1$에서 불연속

예제) $f(x)=x^2+\dfrac{x^2}{(1+x^2)}+\dfrac{x^2}{(1+x^2)^2}+\cdots$일 때

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$를 구하고 연속성을 밝히시오.

(풀이)--무한등비수열의 합

$$if\ \ x\neq 0 \qquad f(x)=\frac{x^2}{1-\dfrac{1}{(1+x^2)}}=\frac{x^2(1+x^2)}{x^2}=1+x^2$$

$if\ \ x=0 \qquad f(0)=0$ 이므로 $x=0$에서 불연속

예제) $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x(x^{2n}-1)}{x^{2n}+1}$의 연속성을 조사하라.

참고) $\lim_{n\to\infty} r^n = \left[\begin{array}{ll} r>1 & :\infty \\ r=1 & :1 \\ -1<r<1 & :0 \\ r\le -1 & :\text{진동} \end{array}\right]$

r^n의 분수식: $|r|>1, |r|<1, r=1, r=-1$로 구분하여 해결

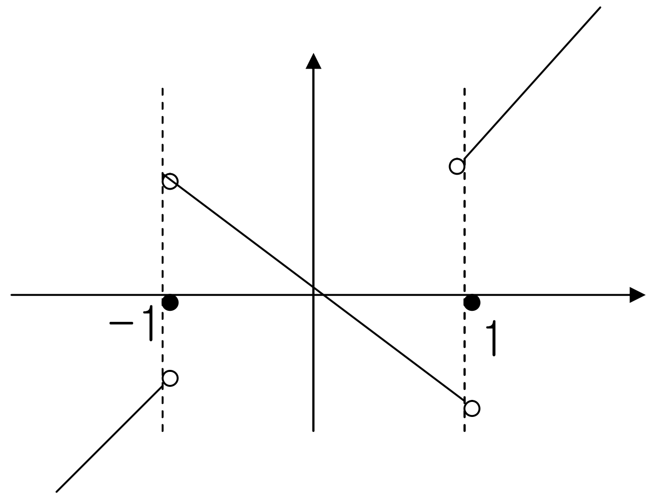
$if\ |x|>1 \qquad f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x(1-\frac{1}{x^{2n}})}{(1+\frac{1}{x^{2n}})}=x$

$if\ |x|<1 \qquad f(x)=-x$

$if\ x=1 \qquad f(x)=0$

$if\ x=-1 \qquad f(x)=0$

$\therefore x=\pm1$에서 불연속

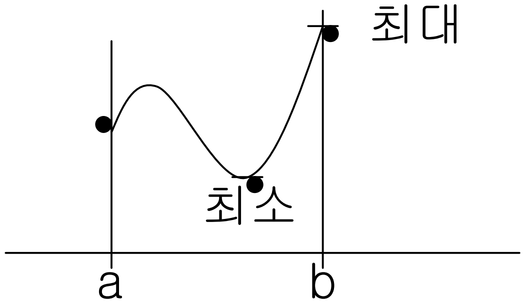


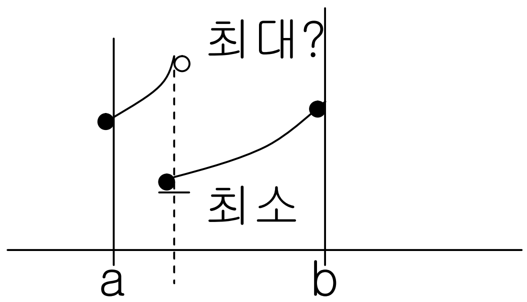
4) 함수의 연속성의 성질

- 연속함수 끼리 연산을 하여도 연속함수가 됨
- 여러 가지 함수의 연속
  - ✓ 다항함수: 모든 실수에서 연속
  - ✓ 분수함수: 분모가 0이 아닌 상태에서 연속
  - ✓ 무리함수: 근호안이 0보다 크거나 같을 때 연속
  - ✓ 로그함수: 진수가 0보다 클 때 연속

5) 함수의 최대 최소의 정리

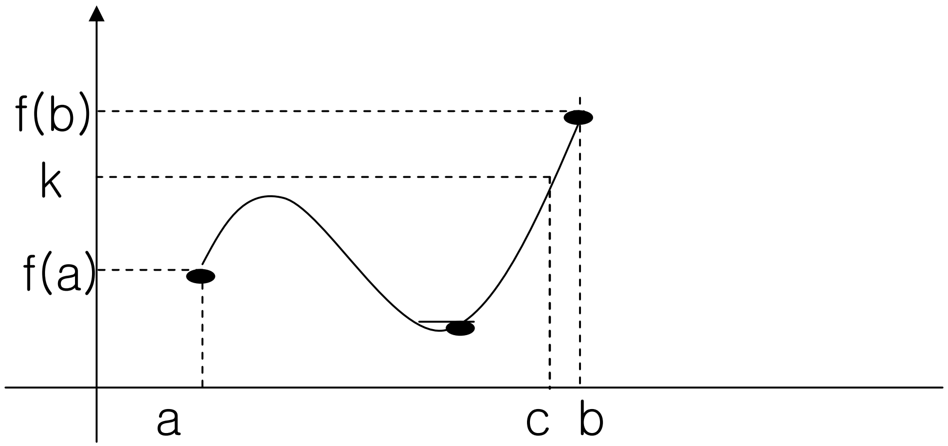
- 함수 f(x)가 [a,b]에서 <u>연속이면</u> f(x)는 구간 [a,b]에서 최대값과 최소값을 반드시 갖는다.





6) 중간값의 정리

- 함수 $f(x)$가 구간$[a,b]$에서 연속이고 $f(a) \neq f(b)$일 때 $f(a)$와 $f(b)$사이의 임의의 값을 k라 하면 $f(c)=k$가 되는 c가 구간(a,b)에 적어도 하나 존재한다.



예제) $\log_2 x + x - 2 = 0$에 대하여 구간[1,8]에서 실근이 존재함으로 증명하라.

증명) $f(x)=\log_2 x + x - 2$는 로그함수와 다항함수의 합으로로 이루어진 함수이므로 구간[1,8]에서 연속이다.

$f(1) = -1 < 0$이고

$f(8) = 9 > 0$이므로 중간값 정리에 의하여

$f(x) = 0$으로 만드는 x값이 구간$(1,8)$에 적어도 하나 존재한다.

예제) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} & (0<|x|\le 1) \\ a & (x=0) \end{cases}$가 연속함수가 될 수 있도록 a값을 정하시오.

<풀이>

$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$이어야 함 따라서 $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} = a$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} = 1$$

$\therefore a = 1$