제 11 장 로그함수와 지수함수

제 11 장 로그함수와 지수함수

본장에서는 로그함수와 지수함수의 미분법을 간략히 살펴본 뒤 자연지수 e의 응용문제에 대해 학습함. 자연지수 e를 이용한 지수함수는 연속적인 복리계산, 현가의 계산, 성장률의 추정 등 시간의 개념이 가미된 동태적 분석의 기본적인 도구로서 경영·경제 분야의 많은 응용에 사용됨.

제 1 절 로그함수와 자연지수 e

1 로그함수의 정의

- 지수함수 $y = a^x (a > 0,\ a \neq 1)$ 가 주어져 있을 때, 임의의 양수 b 에 대해 $a^x = b$를 만족하는 실수 x 를

$$x = \log_a b$$

로 나타내고, 이것을 a 를 밑으로 하는 b 의 로그라 함

로그함수의 특성 (단, $a>0,\ a\neq 1,\ c>0,\ c\neq 1,\ p>0,\ q>0,\ b>0$)

(a) $\log_a pq = \log_a p + \log_a q$

(b) $\log_a \frac{1}{p} = -\log_a p$

(c) $\log_a \frac{p}{q} = \log_a p - \log_a q$

(d) $\log_a p^r = r \log_a p$

(e) $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$

2 자연지수 e의 정의

- 자연지수 e

$$e \equiv \lim_{m \to \infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m}$$

- 무리수인 e의 실제값은 대략 2.7182818⋯이며

$$\frac{d(e^{x})}{dx} = e^{x}$$

a가 0보다 큰 값일 때 실수 x에 대해

$$a^{x} = e^{x \ln a}$$

가 성립한다.

예제 9. 1

다음에 주어진 함수를 자연지수 e를 이용하여 나타내어라.

(a) 3^x (b) 6^{x^2} (c) 2^{y+7}

풀이

(a) $3^x = e^{x\ln 3}$

(b) x^2을 x라 간주하면 $6^{x^2} = e^{x^2\ln 6}$이 된다.

(c) $y+7$을 x라 간주하면 $2^{y+7} = e^{(y+7)\ln 2}$가 된다.

예제 9. 2

$f(x) = ce^{mx}$라 하자. $f(0) = 7$, $f(3) = 20$일 때 c와 m을 구하여라.

풀이

$f(0) = ce^0 = c = 7$이며 $f(3) = ce^{3m} = (7)e^{3m} = 20$이므로

$$e^{3m} = \frac{20}{7} \Leftrightarrow 3m = \ln\frac{20}{7} \Leftrightarrow m = \frac{1}{3}\ln\frac{20}{7}$$

제 2 절 로그함수와 지수함수의 미분법

1 로그함수의 미분

함수 $f(x)$의 도함수가 존재할 때

(a) $y=\ln f(x)$의 도함수는 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$가 되며

(b) $y=\log_a f(x)$의 도함수는 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\ln a}\dfrac{f'(x)}{f(x)}$가 된다.

다음 함수의 도함수를 구하여라.

(a) $h(x) = \ln(3x-2)$ (b) $f(x) = x^2 \ln(3-x)$

풀이

(a) $h'(x) = \dfrac{\frac{d}{dx}(3x-2)}{3x-2} = \dfrac{3}{3x-2}$

(b) $f'(x) = x^2 \cdot \dfrac{d}{dx}[\ln(3-x)] + \ln(3-x)\dfrac{d}{dx}(x^2)$

$= x^2\left(\dfrac{-1}{3-x}\right) + [\ln(3-x)](2x)$

$= \dfrac{-x^2}{3-x} + 2x\ln(3-x)$

2 지수함수의 미분

함수 $f(x)$의 도함수가 존재할 때

$$\frac{d}{dx}e^{f(x)} = f'(x)\cdot e^{f(x)},\quad \frac{d\left[a^{f(x)}\right]}{dx} = a^{f(x)}\cdot f'(x)\cdot \ln a$$

제 3 절 자연지수 e의 응용

1 복리이자의 계산

- 1년에 m 번씩 이자를 계산하여 지급한다면 t 년 후의 원리금 합계는

$$10,000\left(1+\frac{0.1}{m}\right)^{mt}$$

- 1년 내내 계속적으로 이자를 계산하여 지급한다면, 다시 말해 m이 무한대로 커지게 되면 원리금 합계는 얼마가 될 것인가? $\frac{m}{0.1}=w$ 라면

$$10,000\left(1+\frac{0.1}{m}\right)^{mt}=10,000\left(1+\frac{1}{\omega}\right)^{(0.1)\omega t}$$

$$=10,000\left[\left(1+\frac{1}{\omega}\right)^{\omega}\right]^{0.1t}$$

- $m \to \infty$ 일 때의 원리금 합계는

$$\lim_{m\to\infty}(10,000)\left(1+\frac{0.1}{m}\right)^{mt}$$

$$=\lim_{\omega\to\infty}(10,000)\left[\left(1+\frac{1}{\omega}\right)^{\omega}\right]^{0.1t} \quad \left(\begin{array}{ll} m \to \infty & \text{이면} \\ w \to \infty & \text{가 성립함} \end{array}\right)$$

$$=(10,000)\,e^{0.1t}$$

- 원금을 A라 하고 연간이자율을 r이라 할 때 t년후의 원리금 합계 $V(m)$과 $\lim_{m\to\infty} V(m)$은 다음과 같음

$$V(m)=A\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mt}$$

$$V=\lim_{m\to\infty} V(m)=Ae^{rt}$$

200만원을 투자하면 연 6%의 이자율로 연속적으로 이자를 계산하여 원금에 합해진다고 한다. 16개월 후의 투자액의 가치는 얼마인가?

예제 9. 8

풀이

16개월은 $\frac{4}{3}$년이므로 투자액의 가치는 다음과 같다.

$$(200\text{만원})\,e^{(0.06)(\frac{4}{3})} = (200\text{만원})(1.0833) = 216.7\text{만원}$$

2 현가의 계산

- 현재가치(present value) 또는 현가란 미래에 발생할 비용 또는 수익을 현 시점에서 평가한 가치
- 미래에 발생할 비용이나 수익의 현가는 할인율에 의해 크게 변함. 할인율이 높을수록 미래에 얻을 수 있는 가치의 현가가 작아지고 이와 반대로 할인율이 낮을수록 현가가 커짐

목재용 나무를 키우고 있는 산림농장의 주인은 시간이 흘러감에 따라 산림의 가치가 어떻게 변화될지 궁금해 하고 있다. 현재시점을 $t=0$라 할 때 $f(t)$는 판매가능한 목재의 양이다. 단위당 목재판매가격은 p이고 이자율은 r이다. 여기서 p와 r은 모두 상수로 가정한다.

(a) 미래시점인 T에 벌채하여 목재로 판다면, $t=0$ 시점에서의 산림의 가치는 어떻게 표현되나?

(b) 매 T년마다 벌채하여 목재를 판매하고 같은 나무를 다시 심는다고 가정해 보자. $t=0$ 시점에서 이 산림의 총가치는 얼마인가?

풀이

(a) $t=0$ 시점에서 산림의 가치는 $\dfrac{pf(T)}{(1+r)^T}$

(b) $\dfrac{pf(T)}{(1+r)^T}+\dfrac{pf(T)}{(1+r)^{2T}}+\dfrac{pf(T)}{(1+r)^{3T}}+\cdots=\dfrac{pf(T)}{(1+r)^T-1}$

- 현가의 계산에 있어서도 복리이자의 계산에서와 같이 1년에 m번씩 할인가를 계산한다면 t년 뒤의 A는 현재가치로

$$A\left(1+\frac{r}{m}\right)^{-mt}$$

- 연속적으로 할인가를 계산한다면, 현재가치는 다음과 같음

$$\lim_{m\to\infty} A\left(1+\frac{r}{m}\right)^{-mt} = Ae^{-rt}$$

프랑스에서 최고급 포도주를 수입·판매하는 한국과소비통상은 포도주 1병당 50만원에 수입한다. 이 포도주의 판매가격은 숙성도가 높아짐에 따라 매년 20만원씩 상승한다고 한다. 연이자율을 10%로 설정하고 연속적으로 할인가를 계산한다는 가정하에 다음 물음에 답하여라.

(a) 5년 후에 판매할 경우에 기대할 수 있는 판매가격의 현가를 계산하여라.

(b) 이익을 최대화할 수 있는 최적판매시점을 구하여라.

풀이

(a) 5년 후의 판매가격은 50만원 + (20만원)(5) = 150만원이다. 미래의 판매가격은 10% 할인율을 연속적으로 적용하여 현가를 계산하면 다음과 같다.

$$(150)e^{(-0.1)(5)} = (150)(0.6065) = 90.98\text{만원}$$

(b) t년 후의 판매가격은 $V(t) = 50 + 20t$로 나타낼 수 있으므로 이를 현재가치로 계산하면 $f(t) = V(t)e^{-0.1t} = (50 + 20t)e^{-0.1t}$

가 된다. 최적판매시점이란 결국 $f(t)$를 최대화할 수 있는 t값을 의미하므로,

$$f'(t) = 20e^{-0.1t} + (-0.1)(50 + 20t)e^{-0.1t}$$
$$= (15 - 2t)e^{-0.1t} = 0$$

에서 $t^* = 7.5$가 도출된다.

$$f''(t) = -2e^{-0.1t} + (0.1)e^{-0.1t}(15 - 2t)$$
$$= (0.2t - 3.5)e^{-0.1t}$$

에서, $f''(7.5) < 0$이므로 $t^* = 7.5$일 때의 함수값 $f(7.5)$가 극대값임을 알 수 있다. 또한 $f'(t)$는 $t > 7.5$일 때 언제나 0보다 작으므로 $f(7.5)$가 최대값임을 알 수 있다.

어느 신도시의 인구는 연속적으로 같은 비율로 증가하였다. 2006년의 인구가 200,000명이었고, 2011년의 인구가 400,000명이었다.

(a) 연간증가율은 얼마인가?

(b) 2013년의 인구는 얼마가 될 것으로 추정할 수 있나?

풀이

(a) $200,000e^{(r)(5)} = 400,000$

$\rightarrow e^{5r} = 2$

$\rightarrow r = \dfrac{\ln 2}{5} = 0.1386$

(b) $400,000e^{(2)(0.1386)} = 527,772$