

## 복잡한 식 인수분해 할 때~

1. 공통인수 있을 경우 → 공통인수로 묶는다
2. 적당한 항끼리 짝짓는다 → 공통인수가 생길도록 한다
3. 공통인수 또는 식 일부분 → 한 문자로 치환
4. 차수가 낮은 문자에 관하여 내림차순으로 정리



예제 ③ — 다음 식을 인수분해하여라.

(1)  $\underline{x^4} - 8\underline{x^2} - 9$

(2)  $\underline{a^2} + \underline{bc} - \underline{ca} - \underline{b^2}$

(3)  $2x^2 - xy - \underline{y^2} - 4x + \underline{y} + 2$

(4)  $\underline{x^4} - 6\underline{x^2y^2} + \underline{y^4}$

치환

내림차순

공통인수

공통인수



[풀이] (1)  $x^2 = X$ 로 놓고 인수분해하면

$$x^4 - 8x^2 - 9 = X^2 - 8X - 9 = (X+1)(X-9)$$

위의 식에서  $X = x^2$ 을 대입하여 정리하면

$$(X+1)(X-9) = (x^2+1)(x^2-9) = (x^2+1)(x+3)(x-3)$$

$$\therefore x^4 - 8x^2 - 9 = (x^2+1)(x+3)(x-3)$$

(2) 주어진 식을  $c$ 에 대한 내림차순으로 정리하면

$$\begin{aligned} a^2 + bc - ca - b^2 &= c(b-a) + a^2 - b^2 \\ &= -c(a-b) + (a-b)(a+b) \\ &= (a-b)(a+b-c) \end{aligned}$$



(3) 주어진 식을  $x$ 에 대한 내림차순으로 정리하면

$$\begin{aligned}2x^2 - xy - y^2 - 4x + y + 2 &= 2x^2 - (y+4)x - (y^2 - y - 2) \\ &= 2x^2 - (y+4)x - (y-2)(y+1) \\ &= [2x + (y-2)][x - (y+1)] \\ &= (2x + y - 2)(x - y - 1)\end{aligned}$$

(4)  $x^4 - 6x^2y^2 + y^4 = x^4 - 2x^2y^2 + y^4 - 4x^2y^2$

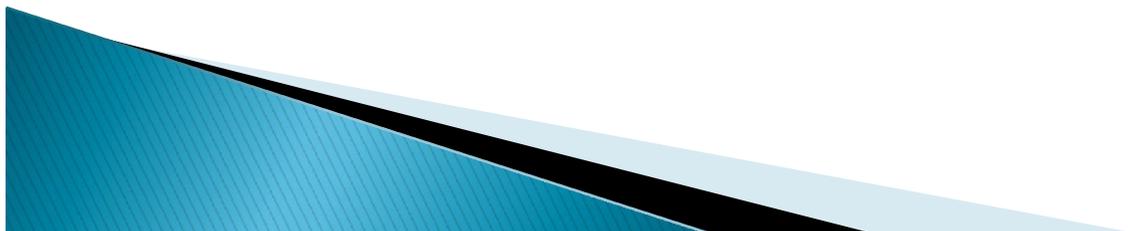
$$\begin{aligned}&= (x^2 - y^2)^2 - (2xy)^2 \\ &= (x^2 - y^2 + 2xy)(x^2 - y^2 - 2xy) \quad \dots \bullet\end{aligned}$$



## 2.2 나머지 정리와 고차식의 인수분해

방정식(equation) : 등식  $2x + 4 = 0$ 과 같이 문자에 특정한 값을 대입 했을 때에만 참이 되는 등식.

**항등식** : 등식  $(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$ 과 같이 문자에 어떤 값을 대입해도 **항상 참**이 되는 등식



**예제 1** — 등식  $ax^2 + bx + c = 0$ 이  $x$ 에 대한 항등식이 되기 위한 필요충분조건을 구하여라.



$x$ 에 어떤 값을 넣어도 성립!



**예제 1** — 등식  $ax^2 + bx + c = 0$ 이  $x$ 에 대한 항등식이 되기 위한 필요충분조건을 구하여라.

[풀이]  $ax^2 + bx + c = 0$ 이 항등식이면  $x$ 에 어떤 값을 대입하여도 성립하므로  $x$ 에 0, 1, -1을 대입할 때도 성립한다.

$$x = 0 \text{을 대입하면 } c = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$x = 1 \text{을 대입하면 } a + b + c = 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$x = -1 \text{을 대입하면 } a - b + c = 0 \quad \dots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2}, \textcircled{3} \text{에서 } a = 0, b = 0, c = 0$$

역으로  $a = b = c = 0$ 이면 모든  $x$ 의 값에 대하여  $ax^2 + bx + c = 0$ 이다.

$$\therefore a = b = c = 0$$

... ◉

**예제 2** — 등식  $3x^2 + 2x + 1 = a(x+1)^2 + b(x+1) + c$ 가  $x$ 에 관한 항등식이 되도록 상수  $a, b, c$ 의 값을 정하여라.

미정계수법 - 항등식의 성질을 이용해서 알지 못하는 계수의 값을 정하는 방법

1.  $x$ 에 관한 내림차순 정리
2. 항등식



**예제 2** — 등식  $3x^2 + 2x + 1 = a(x+1)^2 + b(x+1) + c$ 가  $x$ 에 관한 항등식이 되도록 상수  $a, b, c$ 의 값을 정하여라.

[풀이] 등식의 우변을  $x$ 에 관한 내림차순으로 정리하면

$$\begin{aligned} 3x^2 + 2x + 1 &= a(x+1)^2 + b(x+1) + c \\ &= ax^2 + (2a+b)x + (a+b+c) \end{aligned}$$

이 때, 주어진 식이 항등식이어야 하므로

$$a = 3 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$2a + b = 2 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$a + b + c = 1 \quad \dots \textcircled{3}$$

①을 ②에 대입하여 풀면

$$b = -4 \quad \dots \textcircled{4}$$

①과 ④를 ③에 대입하여 풀면  $c = 2$

$$\therefore a = 3, b = -4, c = 2 \quad \dots \bullet$$

$$2x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(2x + 1) + \underline{4}$$

나머지





II.

계수들만 아래와 같이 나열해 보면 몫과 나머지를 쉽게 구할 수 있다.

$$\begin{array}{r|rrr} -2 & 2 & 5 & 6 \\ & & -4 & -2 \\ \hline & 2 & 1 & 4 \end{array}$$

몫:  $2x+1$  나머지: 4

계수들만 이용하여 몫과 나머지를 구하는 방법을 조립제법



### III.

다항식  $f(x)$ 를 일차식  $x-a$ 로 나누었을 때의 나머지  
일차식으로 나누었으므로 나머지는 상수  $r$ 이다. 몫을  $q(x)$ 라 하면

$$f(x) = (x-a)q(x) + r$$

양변에  $x=a$ 를 대입하면

$$f(a) = r$$

$f(x)$ 를  $x-a$ 로 나누었을 때의 나머지는  $f(a)$



### 나머지 정리

다항식  $f(x)$ 를 일차식  $x-a$ 로 나누었을 때의 나머지는  $f(a)$ 이다.

---

나머지가 0이라는 것과 나누어떨어진다는 것은 같은 의미이므로 다음 정리가 성립한다.

### 인수정리

다항식  $f(x)$ 가  $x-a$ 로 나누어 떨어지기 위한 필요충분조건은  $f(a)=0$ 이다.

---



**예제 3** — 다항식  $f(x)$ 를 두 일차식  $x-1$ ,  $x-2$ 로 나눌 때의 나머지는 각각 2, 1이다. 이 때,  $f(x)$ 를  $x^2-3x+2$ 로 나눌 때의 나머지를 구하여라.

나머지는 1차식 이하  $\rightarrow ax+b$

$$f(1) = 2$$

$$f(2) = 1$$



[풀이] 다항식  $f(x)$ 를  $(x-1)(x-2)$ 로 나눌 때의 몫을  $q(x)$ 라 하고,  
 $f(x)$ 가 이차식으로 나누어지므로 나머지를 일차식  $ax+b$ 라고  
두면

$$f(x) = (x-1)(x-2)q(x) + ax + b$$

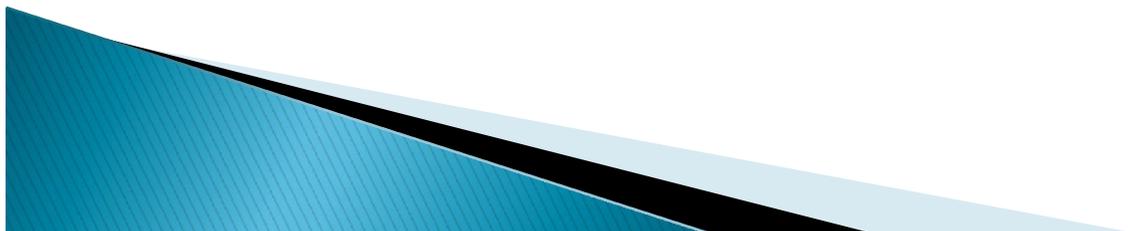
나머지정리에 의하여  $f(1) = 2$ ,  $f(2) = 1$ 이므로

$$a + b = 2 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$2a + b = 1 \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ②를 연립하여 풀면  $\therefore a = -1$ ,  $b = 3$

따라서 구하는 나머지는  $-x + 3$ 이다.  $\dots \bullet$



**예제 4** — 다항식  $x^3 + 5x^2 + kx - k$ 가 일차식  $x + 1$ 로 나누어떨어지도록 상수  $k$ 의 값을 정하여라.

$$f(-1) = 0$$



[풀이]  $f(x) = x^3 + 5x^2 + kx - k$ 라고 할 때,  $f(x)$ 가  $x+1$ 로 나누어 떨어지면 인수정리에 의해서  $f(-1) = 0$ 이 된다. 즉,

$$f(-1) = -1 + 5 - k - k = 0$$

$$\therefore k = 2$$

... 0

