

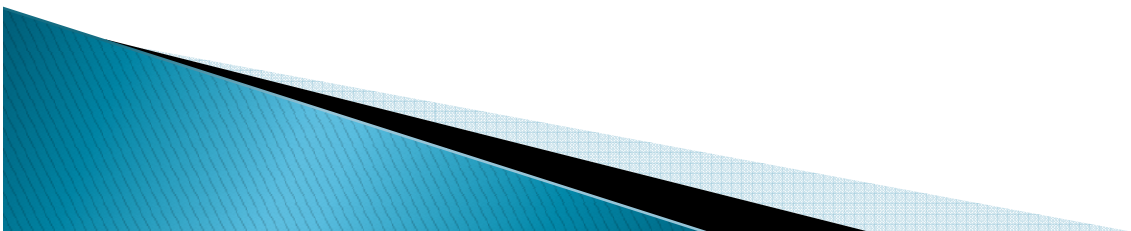
## 3.2 이차방정식

$a, b, c$ 가 상수이고  $a \neq 0$ 일 때

$$ax^2 + bx + c = 0$$

꼴의 식을 이차방정식(quadratic equation)이라 한다.

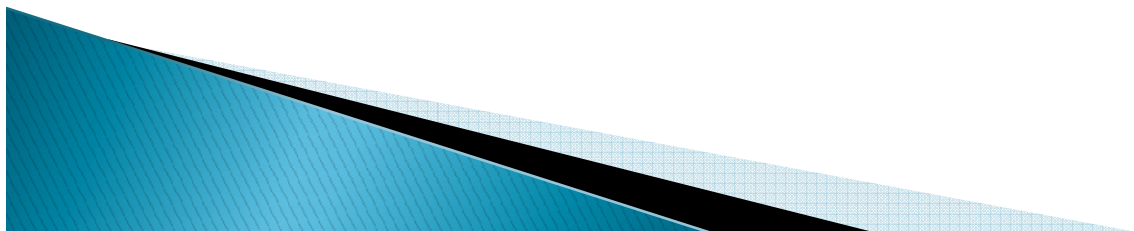
해는 복소수 범위 내에 존재 : 실근 또는 허근



**예제 1** — 다음 이차방정식의 해를 구하여라.

(1)  $x^2 - x - 2 = 0$

(2)  $x^2 + 2 = 0$



[풀이] (1)  $x^2 - x - 2 = 0$ 에서 좌변을 인수분해하면

$$(x+1)(x-2) = 0$$

$$x+1=0 \text{ 또는 } x-2=0$$

$$\therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 2$$

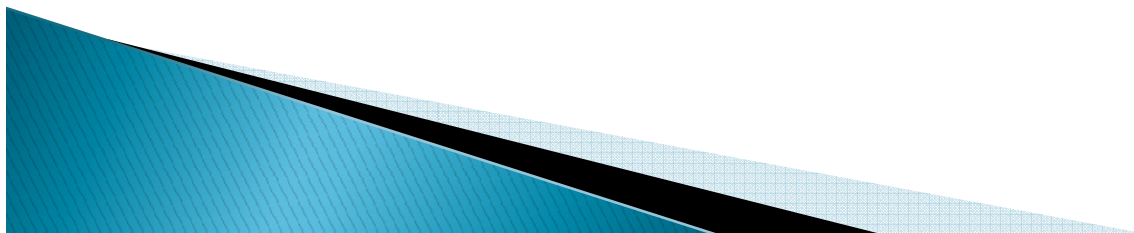
(2)  $x^2 + 2 = 0$ 에서 좌변을 인수분해하면

$$x^2 - (\sqrt{2}i)^2 = 0$$

$$(x - \sqrt{2}i)(x + \sqrt{2}i) = 0$$

$$x - \sqrt{2}i = 0 \text{ 또는 } x + \sqrt{2}i = 0$$

$$\therefore x = \sqrt{2}i \text{ 또는 } x = -\sqrt{2}i$$



## 이차방정식의 근의 공식(1)

이차방정식  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a \neq 0$ )의 근은

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

인수분해가 쉽지 않을 때

$$\begin{aligned}x^2 + 2x - 4 = 0 &\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 5 \\&\Leftrightarrow (x + 1)^2 = 5 \\&\Leftrightarrow x + 1 = \pm \sqrt{5} \\&\Leftrightarrow x = -1 \pm \sqrt{5}\end{aligned}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

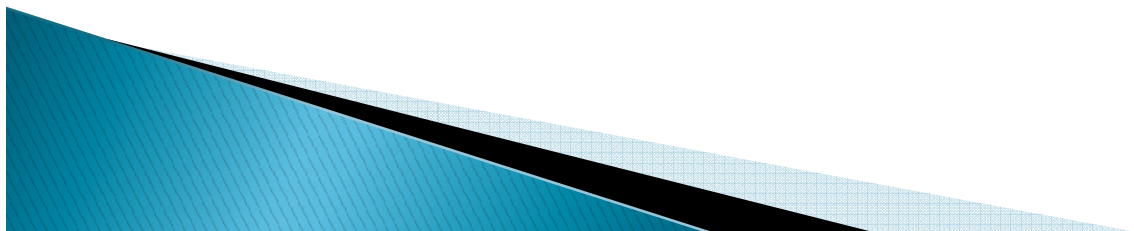
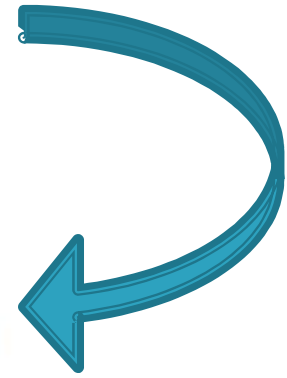
$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

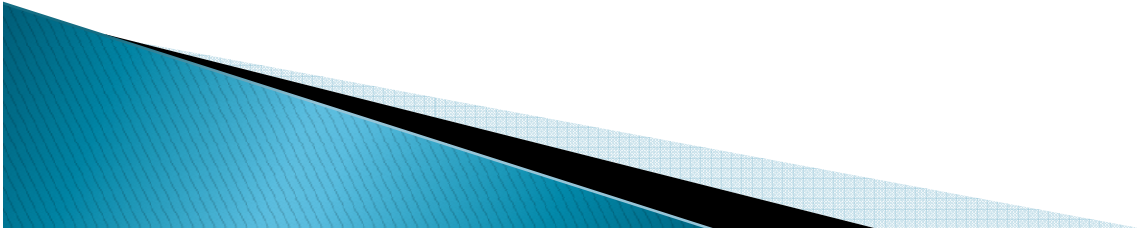
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$



**예제 2** 근의 공식을 이용하여 다음 이차방정식의 해를 구하여라.

(1)  $3x^2 + x - 2 = 0$

(2)  $x^2 - 2x + 3 = 0$



[풀이] (1) 근의 공식에서  $a = 3, b = 1, c = -2$ 이므로

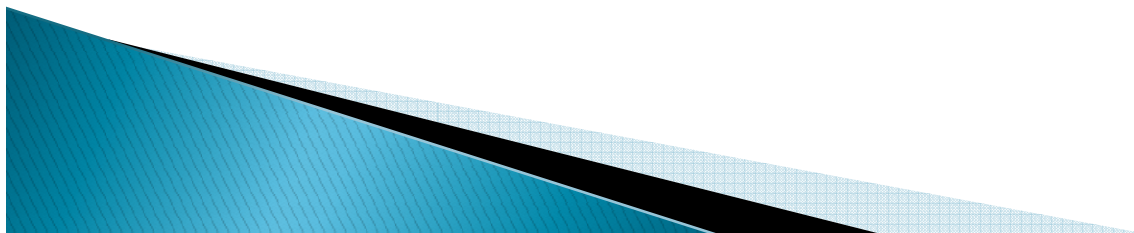
$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 3 \times (-2)}}{2 \times 3} = \frac{-1 \pm 5}{6}$$

$$\therefore x = \frac{2}{3} \text{ 또는 } x = -1$$

(2) 근의 공식에서  $a = 1, b = -2, c = 3$ 이므로

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times 1 \times 3}}{2 \times 1} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}i}{2}$$

$$\therefore x = 1 \pm \sqrt{2}i$$



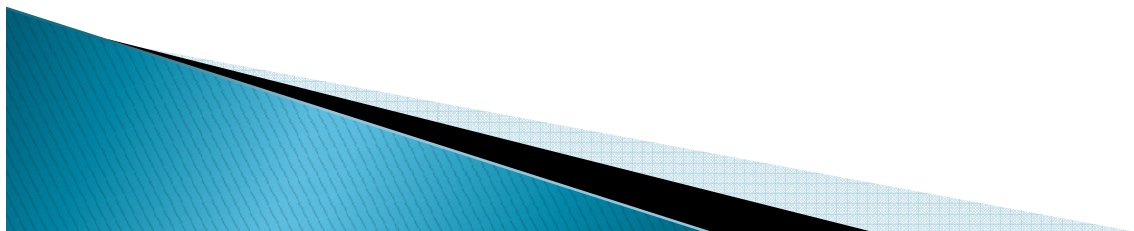
일차항의 계수가 짝수일 때 근의 공식

이차방정식의 근의 공식(2)

이차방정식  $ax^2 + 2b'x + c = 0 (a \neq 0)$ 의 근은

$$x = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a}$$

---



- (1)  $x^2 + 2x - 1 = 0$ 에서  $x = -1 \pm \sqrt{2}$   $\Rightarrow$  두 개의 실근
- (2)  $x^2 - 2x + 2 = 0$ 에서  $x = 1 \pm i$   $\Rightarrow$  두 개의 허근
- (3)  $x^2 - 4x + 4 = 0$ 에서  $x = 2$   $\Rightarrow$  중근

- $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ 가 실수인지 허수인지는 근호 안에 있는  $b^2 - 4ac$ 의 값의 부호에 따라 결정된다.

- **이차방정식의 근의 판별**

계수가 실수인 이차방정식  $ax^2 + 2b'x + c = 0 (a \neq 0)$ 에서 판별식을  $D = b'^2 - 4ac$ 라고 하면

- ①  $D > 0 \Leftrightarrow$  서로 다른 두 실근을 갖는다.
- ②  $D = 0 \Leftrightarrow$  중근을 갖는다.
- ③  $D < 0 \Leftrightarrow$  서로 다른 두 허근을 갖는다.



**예제 3** 이차방정식  $3x^2 - 6x + k = 0$ 이 실근을 갖도록 실수  $k$ 의 범위를 정하여라.

#### 이차방정식의 근의 판별

계수가 실수인 이차방정식  $ax^2 + 2b'x + c = 0 (a \neq 0)$ 에서 판별식을  $D = b'^2 - 4ac$ 라고 하면

- ①  $D > 0 \Leftrightarrow$  서로 다른 두 실근을 갖는다.
  - ②  $D = 0 \Leftrightarrow$  중근을 갖는다.
  - ③  $D < 0 \Leftrightarrow$  서로 다른 두 허근을 갖는다.
-

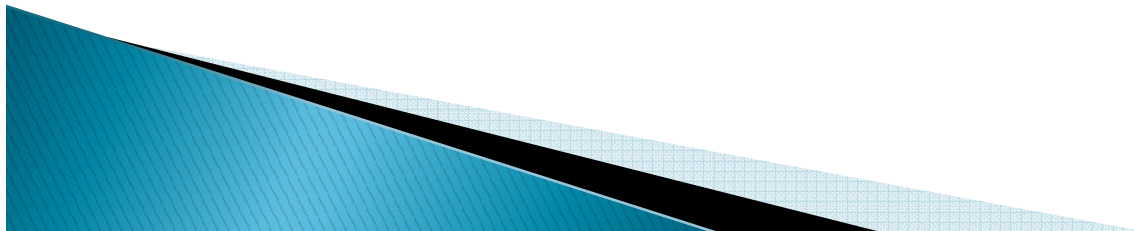
[풀이] 주어진 이차방정식이 실근을 가지려면  $D = b^2 - 4ac \geq 0$ 이어야 한다.

$3x^2 - 6x + k = 0$ 에서  $a = 3$ ,  $b = -6$ ,  $c = k$ 이므로

$$D = (-6)^2 - 4 \cdot 3 \cdot k \geq 0$$

$$\therefore k \leq 3$$

... ○



## 근과 계수의 관계

이차방정식  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a \neq 0$ )의 두 근을  $\alpha, \beta$ 라고 하면

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \quad \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

---

이차방정식  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a \neq 0$ )의 두 근  $\alpha, \beta$ 는

$$\alpha = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}, \quad \beta = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \quad (\text{단, } D = b^2 - 4ac)$$

이므로

$$\alpha + \beta = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

$$\alpha\beta = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{b^2 - D}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

## 두 수의 이차방정식의 근

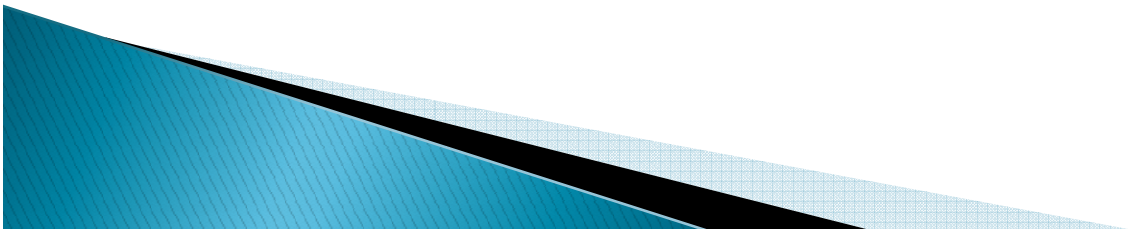
합이  $p$ , 곱이  $q$ 인 두 수는 다음 이차방정식의 근이다.

$$x^2 - px + q = 0$$

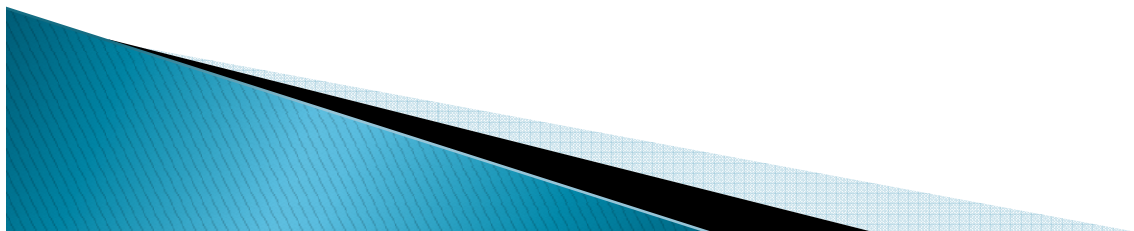
두 수  $\alpha, \beta$ 를 근으로 갖는 이차방정식 중 하나는  $(x - \alpha)(x - \beta) = 0$ 으로 나타내어지고 이 때, 이것의 좌변을 전개하면  $x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$ 이 된다.

$$q = \alpha\beta$$

$$p = \alpha + \beta$$



**예제 4** — 두 수  $1 + \sqrt{2}i$ ,  $1 - \sqrt{2}i$ 를 근으로 갖는 이차방정식을 구하여라.



[풀이] 두 수  $1 + \sqrt{2}i$ ,  $1 - \sqrt{2}i$ 의 합을  $p$ , 곱을  $q$ 라고 하면

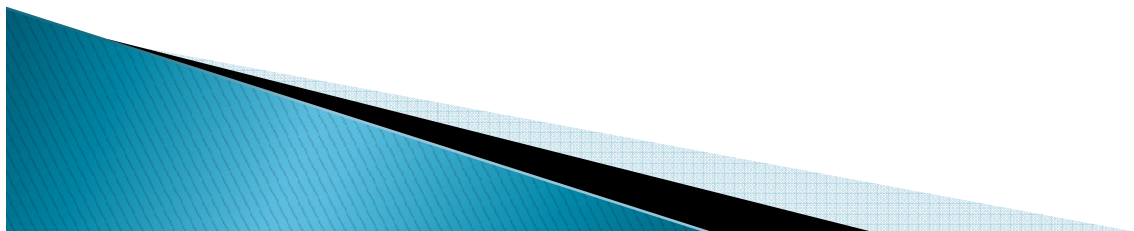
$$p = (1 + \sqrt{2}i) + (1 - \sqrt{2}i) = 2$$

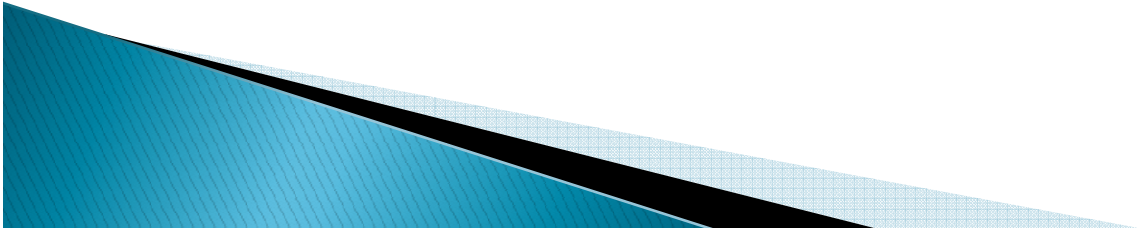
$$q = (1 + \sqrt{2}i)(1 - \sqrt{2}i) = 1 - (-2) = 3$$

이 때, 두 근의 합과 곱이 각각 2와 3이므로 구하는 방정식은 다음과 같다.

$$\therefore x^2 - 2x + 3 = 0$$

... ○





### 3.3 고차방정식과 연립방정식

해법



고차방정식 : 차수가 3차 이상

1. 인수분해 공식이용
2. 인수정리 이용 조립제법
3. 쉽게 인수분해 되지 않고 복잡  $\rightarrow$  치환하여  $\rightarrow$  인수분해  $\rightarrow$  원래 방정식의 해 구한다.



인수분해 공식

(0)  $ax + ay = a(x + y)$

(1)  $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2, a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$

(2)  $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

(3)  $x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$

(4)  $acx^2 + (ad + bc)x + bd = (ax + b)(cx + d)$

(5)  $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3,$

$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a - b)^3$

(6)  $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2),$

$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

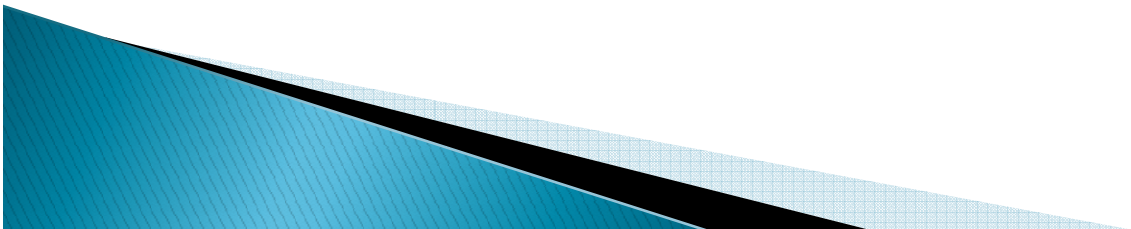
(7)  $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$   
 $= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$

$$\begin{aligned} & a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \\ &= (a + b)^3 - 3ab(a + b) + c^3 - 3abc \\ &= (a + b)^3 + c^3 - 3ab(a + b + c) \\ &= (a + b + c)\{(a + b)^2 - (a + b)c + c^2\} - 3ab(a + b + c) \\ &= (a + b + c)\{(a + b)^2 - (a + b)c + c^2 - 3ab\} \\ &= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \end{aligned}$$

(8)  $a^4 + a^2 + 1 = (a^2 + a + 1)(a^2 - a + 1) \Rightarrow a^4 + a^2b^2 + b^4 = (a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2)$

$$f(a) = 0$$

$$f(x) = (x - a)q(x)$$



$$\begin{array}{r|rrr} -2 & 2 & 5 & 6 \\ & & -4 & -2 \\ \hline & 2 & 1 & 4 \end{array}$$

몫:  $2x+1$  나머지: 4

계수들만 이용하여 몫과 나머지를 구하는 방법을 조립제법

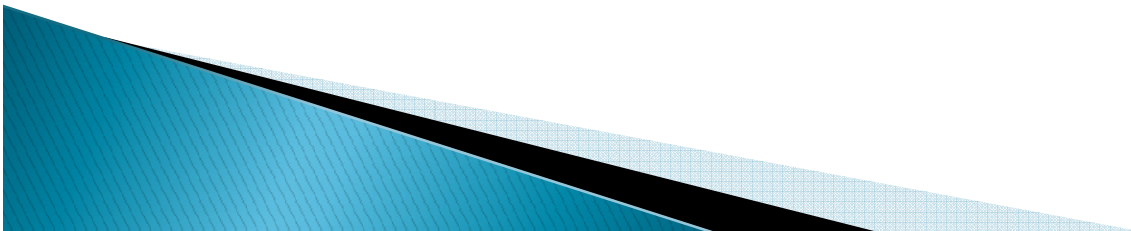
**예제 1** 다음 방정식을 풀어라.

$$(1) x^3 = 1 \longrightarrow x^3 - 1 = 0$$

$$(2) \underline{x^3 + 3x^2} - \underline{4x - 12} = 0$$

$$(3) x^3 - 5x - 2 = 0 \longrightarrow f(-2) = 0$$

$$(4) x^4 - 3x^3 + 3x^2 + x - 6 = 0 \longrightarrow f(-1) = 0$$



[풀이] (1) 주어진 방정식의 우변을 이항하면  $x^3 - 1 = 0$   
좌변을 인수분해하면  $(x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$   
그러므로  $x - 1 = 0$  또는  $x^2 + x + 1 = 0$

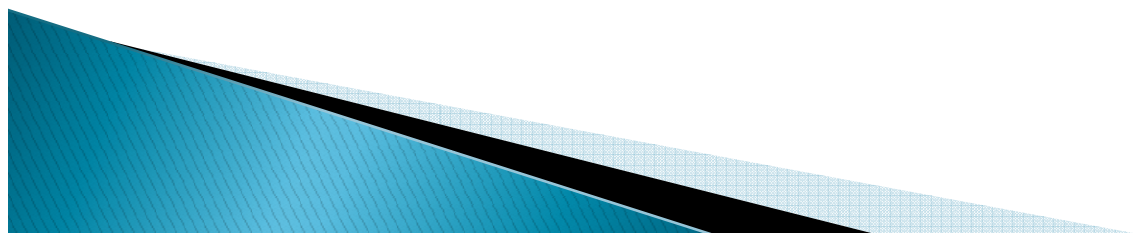
$$\therefore x = 1 \text{ 또는 } x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

(2) 좌변을 인수분해하면

$$x^2(x + 3) - 4(x + 3) = 0$$

$$(x + 3)(x + 2)(x - 2) = 0$$

$$\therefore x = -3, -2, 2$$



(3)  $f(x) = x^3 - 5x - 2$ 로 놓으면  $f(-2) = 0$ 이므로 인수정리에 의하여  $f(x)$ 는  $x+2$ 를 인수로 갖는다. 다음 조립제법에서

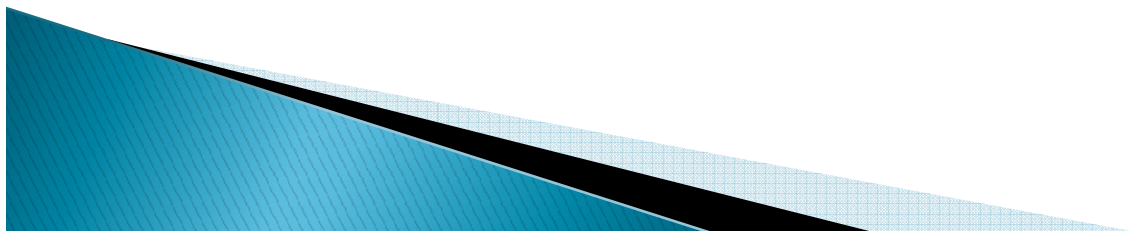
$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & 0 & -5 & -2 \\ & & -2 & 4 & 2 \\ \hline & 1 & -2 & -1 & 0 \end{array}$$

$$f(x) = (x+2)(x^2 - 2x - 1)$$

따라서 주어진 방정식은

$$(x+2)(x^2 - 2x - 1) = 0$$

$$\therefore x = -2 \text{ 또는 } 1 \pm \sqrt{2}$$



(4)  $f(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 + x - 6$ 이라 하면

$$f(-1) = 0$$

이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$f(x) = (x+1)(x^3 - 4x^2 + 7x - 6)$$

$$g(x) = x^3 - 4x^2 + 7x - 6$$

이라 하면

$$g(2) = 0$$

이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$g(x) = (x-2)(x^2 - 2x + 3)$$

따라서 주어진 방정식은

$$(x+1)(x-2)(x^2 - 2x + 3) = 0$$

이므로 구하는 해는

$$\therefore x = -1, 2 \text{ 또는 } 1 \pm \sqrt{2}i$$

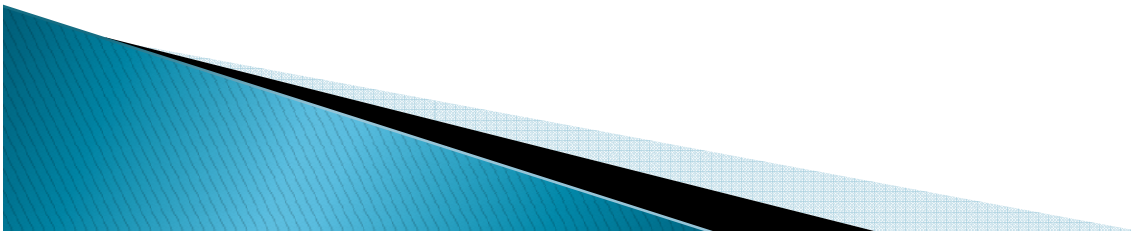
예제 ② — 다음 방정식을 풀어라.      치환

$$(1) \ x^4 - \underline{4x^2} + 3 = 0$$

$$(2) \ x^{1/3} - \underline{x^{1/6}} - 6 = 0$$

$$(3) \ (\underline{x^2 - 3x + 4})(\underline{x^2 - 3x - 3}) = 8$$

$$(4) \ \underline{x^4} - \underline{3x^3} + \underline{4x^2} - \underline{3x} + 1 = 0$$





[풀이] (1)  $x^2 = t$ 로 치환하면  $t^2 - 4t + 3 = 0$

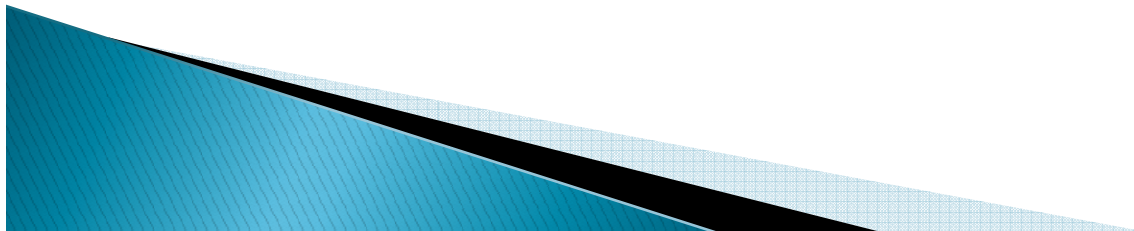
$t$ 에 관한 이차방정식이므로 좌변을 인수분해하면

$$(t-1)(t-3) = 0$$

$$t=1 \text{ 또는 } t=3$$

$t = x^2$ 이므로  $x^2 = 1$  또는  $x^2 = 3$

$$\therefore x = \pm 1 \text{ 또는 } x = \pm \sqrt{3}$$



(2)  $x^{1/6} = t$ 로 치환하면  $t^2 - t - 6 = 0$ 이다. 이 식을 인수분해하면

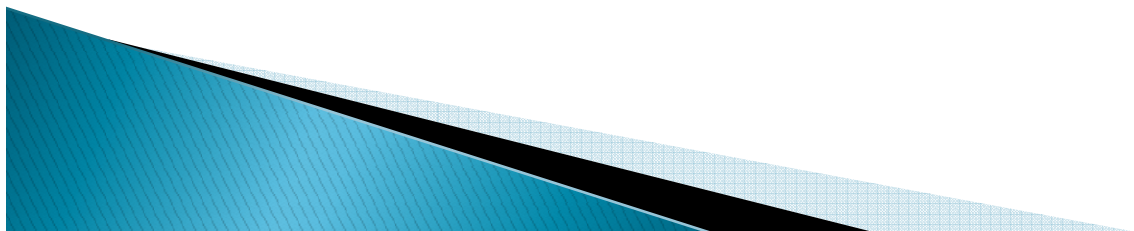
$$(t-3)(t+2) = 0$$

이지만  $t = x^{1/6}$ 은 음수가 될 수 없으므로  $t+2 \neq 0$ 이다.  
따라서

$$t = x^{1/6} = 3$$

이므로

$$\therefore x = 3^6 = 729$$



(3)  $x^2 - 3x = t$ 로 치환하면  $(t+4)(t-3) = 8$  즉  $t^2 + t - 20 = 0$   
인수분해하면  $(t+5)(t-4) = 0$

$$\therefore t = 4, t = -5$$

(i)  $x^2 - 3x = 4$ 에서  $(x+2)(x-4) = 0$

$$\therefore x = -1, x = 4$$

(ii)  $x^2 - 3x = -5$ 에서  $x^2 - 3x + 5 = 0$   
근의 공식을 이용하면

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 5}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{11}i}{2}$$

따라서 구하는 해는

$$\therefore x = -1, x = 4, x = \frac{3 \pm \sqrt{11}i}{2}$$

(4) 양변을  $x^2$ 으로 나누면

$$x^2 + \frac{1}{x^2} - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) + 4 = 0$$

그런데  $x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2$ 이므로 주어진 방정식은

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) + 2 = 0$$

$x + \frac{1}{x} = t$ 로 치환하면  $t^2 - 3t + 2 = 0$

인수분해하면  $(t-1)(t-2) = 0 \quad \therefore t = 1, t = 2$

(i)  $x + \frac{1}{x} = 1$ 에서  $x^2 - x + 1 = 0 \quad \therefore x = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

(ii)  $x + \frac{1}{x} = 2$ 에서  $x^2 - 2x + 1 = 0 \quad \therefore x = 1$

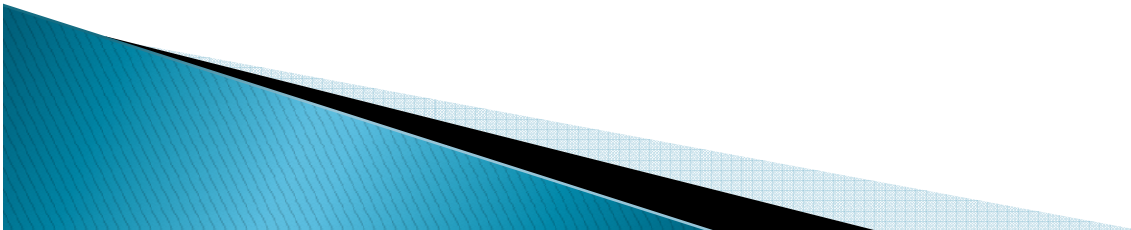
따라서 구하는 해는

$$\therefore x = 1(\text{중근}), x = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

... ○

**예제 3** — 방정식  $x^3 + x^2 + px + q = 0$ 의 한 근이  $1 - i$ 일 때, 실수  $p, q$ 의 값 및 나머지 두 근을 구하여라.

$1 - i$ 가 근이므로 대입하면 주어진 방정식을 만족



[풀이] (1)  $1-i$ 가 근이므로 대입하면 주어진 방정식을 만족시켜야 한다. 즉

$$(1-i)^3 + (1-i)^2 + p(1-i) + q = 0$$

전개하여  $i$ 에 관해서 정리하면  $(p+q-2) + (-p-4)i = 0$

$p, q$ 는 실수이므로  $p+q-2=0, -p-4=0$

$$\therefore p = -4, q = 6$$

이 때, 주어진 방정식은  $x^3 + x^2 - 4x + 6 = 0$

$f(-3) = 0$ 조립제법
---------------------

$$\therefore (x+3)(x^2 - 2x + 2) = 0$$

$$\therefore x = -3, x = 1 \pm i$$

따라서 구하는 답은  $p = -4, q = 6, x = -3, x = 1 + i$

(2) 주어진 방정식이 실계수 방정식이므로  $1+i$ 도 근이다. 인수정리에 의해 주어진 방정식은 다음을 인수로 갖는다.

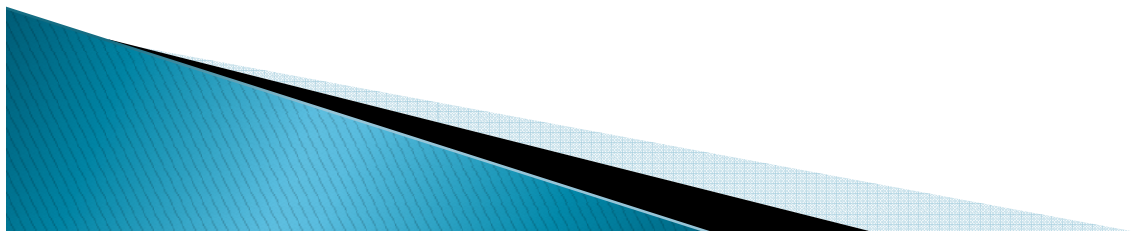
$$[x - (1 - i)][x - (1 + i)] = x^2 - 2x + 2$$

$x^3 + x^2 + px + q$ 를  $x^2 - 2x + 2$ 로 나누면 몫이  $x + 3$ 이고 나머지가  $(p + 4)x + (q - 6)$ 인데, 나누어떨어지므로

$$(p + 4)x + (q - 6) = 0 \quad \therefore p = -4, \quad q = 6$$

다음은 풀이 (1)과 같다.

... ◉

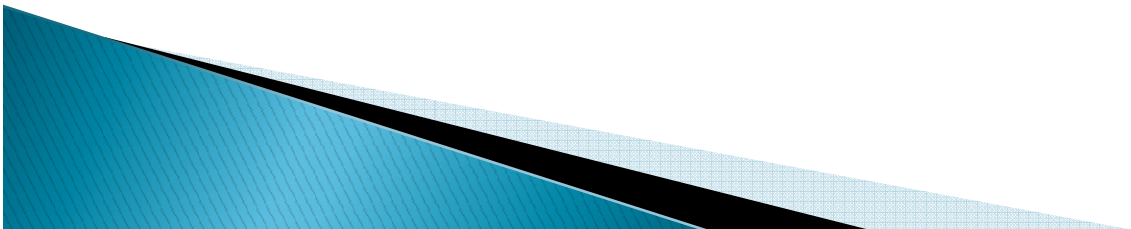


**예제 4** — 다음 연립방정식의 해를 구하여라.

$$(1) \begin{cases} 2x + y - z = 8 & \dots \textcircled{1} \\ x - y + 3z = -4 & \dots \textcircled{2} \\ 3x + 2y + z = 11 & \dots \textcircled{3} \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x + y = 1 & \dots \textcircled{1} \\ y + z = 3 & \dots \textcircled{2} \\ x + z = 8 & \dots \textcircled{3} \end{cases}$$

미지수가 **3개**인 연립 **일차**방정식

→ 한 변수를 소거하여 미지수가 2개인 연립일차 방정식으로 만든 후 푼다.





[풀이] (1) 먼저  $z$ 를 소거하기 위해서 ① $\times 3$ +②를 하면

$$7x + 2y = 20 \quad \dots \text{④}$$

①+③을 하면

$$5x + 3y = 19 \quad \dots \text{⑤}$$

④와 ⑤를 연립하여 풀면  $x = 2, y = 3$   
 $x = 2, y = 3$ 을 ①에 대입하면  $z = -1$

$$\therefore x = 2, y = 3, z = -1$$

(2) ①+②+③을 하면  $2x + 2y + 2z = 12$ 이므로

$$x + y + z = 6 \quad \dots \text{④}$$

$$\text{④} - \text{①} \text{하면 } z = 5$$

$$\text{④} - \text{②} \text{하면 } x = 3$$

$$\text{④} - \text{③} \text{하면 } y = -2$$

$$\therefore x = 3, y = -2, z = 5$$

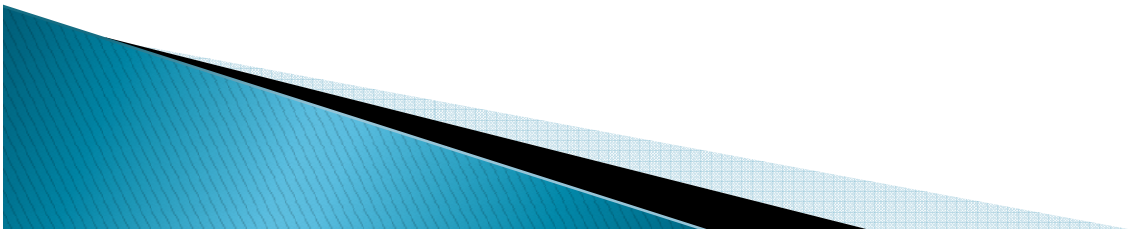
**예제 5** 다음 연립방정식의 해를 구하여라.

$$(1) \begin{cases} x - y = 2 & \dots \textcircled{1} \\ x^2 + y^2 = 10 & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} 2x^2 - 3xy - 2y^2 = 0 & \dots \textcircled{1} \\ 2x^2 + y^2 = 36 & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

미지수가 **2개**인 연립 **이차**방정식

→ 한 문자에 관해서 풀어서 다른 이차방정식에 대입하여 푼다.



[풀이] (1) ①을  $y$ 에 대하여 풀면  $y = x - 2$  ... ③

미지수  $y$ 를 소거하기 위하여 ③을 ②에 대입하면

$$x^2 + y^2 = 10 \Leftrightarrow x^2 + (x - 2)^2 = 10$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$$

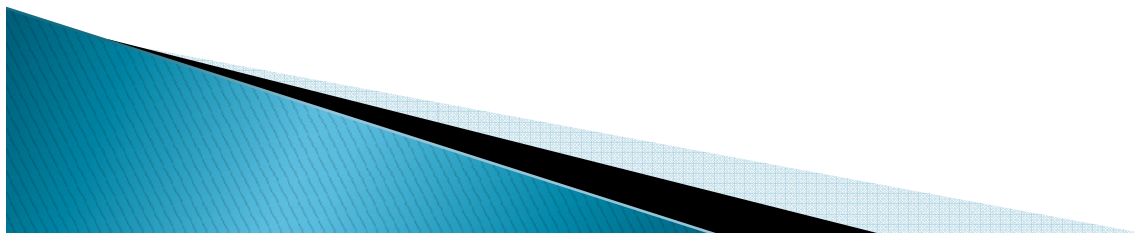
$$\Leftrightarrow (x - 3)(x + 1) = 0$$

$\therefore x = 3$  또는  $x = -1$

$x = 3$ 을 ③에 대입하면  $y = 1$

$x = -1$ 을 ③에 대입하면  $y = -3$

따라서 구하는 해는  $\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$  또는  $\begin{cases} x = -1 \\ y = -3 \end{cases}$



(2) ①의 좌변을 인수분해하면

$$(x-2y)(2x+y)=0 \quad \therefore x=2y \text{ 또는 } y=-2x$$

$x=2y$ 일 때, 이것을 ②에 대입하여 정리하면  $y^2=4$

$$\therefore y=2 \text{ 또는 } y=-2$$

$$\therefore x=4, y=2 \text{ 또는 } x=-4, y=-2$$

$y=-2x$ 일 때, 이것을 ②에 대입하여 정리하면  $x^2=6$

$$\therefore x=\sqrt{6} \text{ 또는 } x=-\sqrt{6}$$

$$\therefore x=\sqrt{6}, y=-2\sqrt{6} \text{ 또는 } x=-\sqrt{6}, y=2\sqrt{6}$$

따라서 구하는 해는

$$\begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=-4 \\ y=-2 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=\sqrt{6} \\ y=-2\sqrt{6} \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=-\sqrt{6} \\ y=2\sqrt{6} \end{cases} \dots \circ$$