

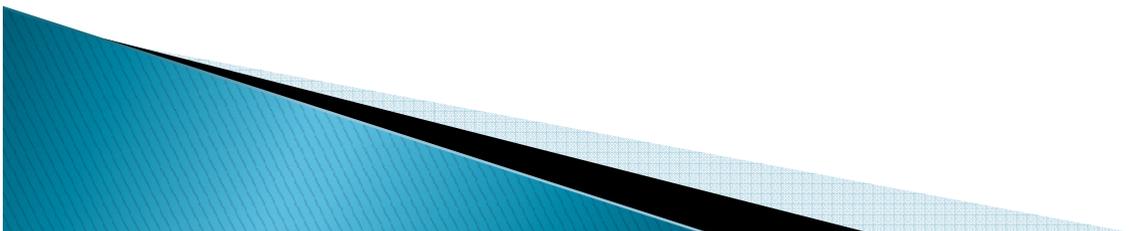
3.2 이차방정식

a, b, c 가 상수이고 $a \neq 0$ 일 때

$$ax^2 + bx + c = 0$$

꼴의 식을 이차방정식(quadratic equation)이라 한다.

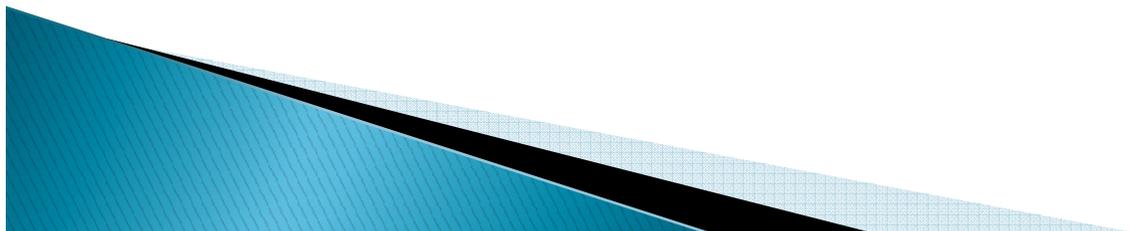
해는 복소수 범위 내에 존재 : 실근 또는 허근



예제 1 — 다음 이차방정식의 해를 구하여라.

(1) $x^2 - x - 2 = 0$

(2) $x^2 + 2 = 0$



[풀이] (1) $x^2 - x - 2 = 0$ 에서 좌변을 인수분해하면

$$(x+1)(x-2) = 0$$

$$x+1=0 \text{ 또는 } x-2=0$$

$$\therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 2$$

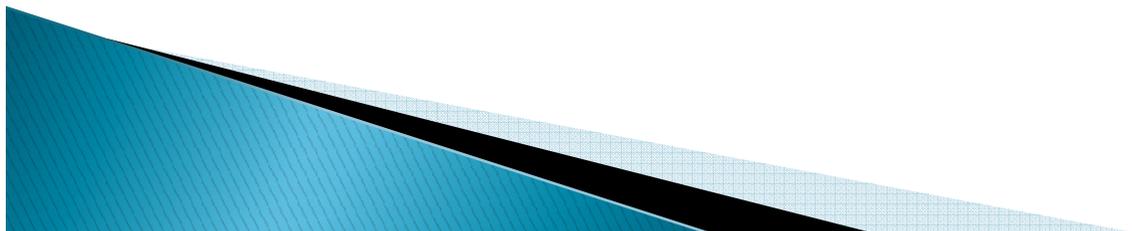
(2) $x^2 + 2 = 0$ 에서 좌변을 인수분해하면

$$x^2 - (\sqrt{2}i)^2 = 0$$

$$(x - \sqrt{2}i)(x + \sqrt{2}i) = 0$$

$$x - \sqrt{2}i = 0 \text{ 또는 } x + \sqrt{2}i = 0$$

$$\therefore x = \sqrt{2}i \text{ 또는 } x = -\sqrt{2}i$$



이차방정식의 근의 공식(1)

이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$)의 근은

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

인수분해가 쉽지 않을 때

$$\begin{aligned}x^2 + 2x - 4 = 0 &\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 5 \\&\Leftrightarrow (x + 1)^2 = 5 \\&\Leftrightarrow x + 1 = \pm \sqrt{5} \\&\Leftrightarrow x = -1 \pm \sqrt{5}\end{aligned}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

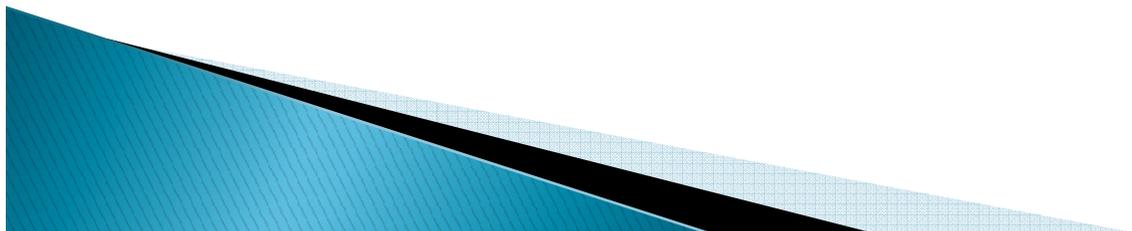
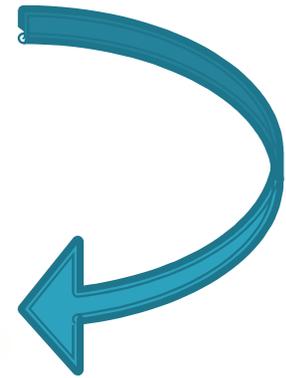
$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

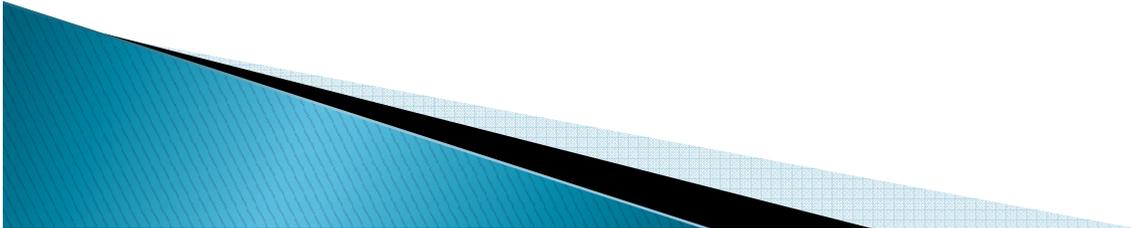
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$



예제 2 근의 공식을 이용하여 다음 이차방정식의 해를 구하여라.

(1) $3x^2 + x - 2 = 0$

(2) $x^2 - 2x + 3 = 0$



[풀이] (1) 근의 공식에서 $a = 3, b = 1, c = -2$ 이므로

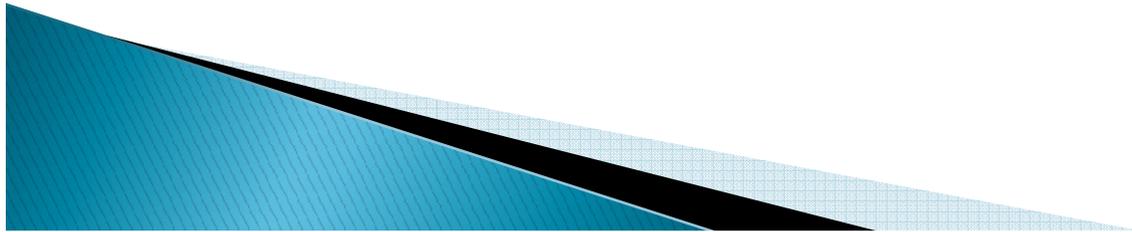
$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 3 \times (-2)}}{2 \times 3} = \frac{-1 \pm 5}{6}$$

$$\therefore x = \frac{2}{3} \text{ 또는 } x = -1$$

(2) 근의 공식에서 $a = 1, b = -2, c = 3$ 이므로

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times 1 \times 3}}{2 \times 1} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}i}{2}$$

$$\therefore x = 1 \pm \sqrt{2}i$$

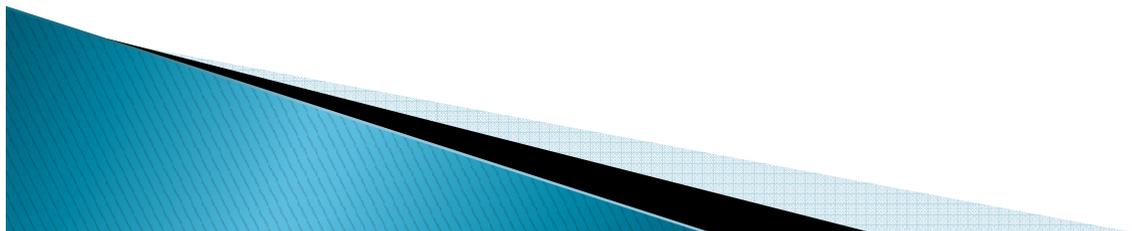


일차항의 계수가 짝수일 때 근의 공식

이차방정식의 근의 공식(2)

이차방정식 $ax^2 + 2b'x + c = 0 (a \neq 0)$ 의 근은

$$x = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a}$$



- (1) $x^2 + 2x - 1 = 0$ 에서 $x = -1 \pm \sqrt{2}$ \Rightarrow 두 개의 실근
- (2) $x^2 - 2x + 2 = 0$ 에서 $x = 1 \pm i$ \Rightarrow 두 개의 허근
- (3) $x^2 - 4x + 4 = 0$ 에서 $x = 2$ \Rightarrow 중근

- $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ 가 실수인지 허수인지는 근호 안에 있는 $b^2 - 4ac$ 의 값의 부호에 따라 결정된다.

- **이차방정식의 근의 판별**

계수가 실수인 이차방정식 $ax^2 + 2b'x + c = 0 (a \neq 0)$ 에서 판별식을 $D = b'^2 - 4ac$ 라고 하면

- ① $D > 0 \Leftrightarrow$ 서로 다른 두 실근을 갖는다.
- ② $D = 0 \Leftrightarrow$ 중근을 갖는다.
- ③ $D < 0 \Leftrightarrow$ 서로 다른 두 허근을 갖는다.

예제 3 이차방정식 $3x^2 - 6x + k = 0$ 이 실근을 갖도록 실수 k 의 범위를 정하여라.

이차방정식의 근의 판별

계수가 실수인 이차방정식 $ax^2 + 2b'x + c = 0 (a \neq 0)$ 에서 판별식을 $D = b'^2 - 4ac$ 라고 하면

- ① $D > 0 \Leftrightarrow$ 서로 다른 두 실근을 갖는다.
 - ② $D = 0 \Leftrightarrow$ 중근을 갖는다.
 - ③ $D < 0 \Leftrightarrow$ 서로 다른 두 허근을 갖는다.
-

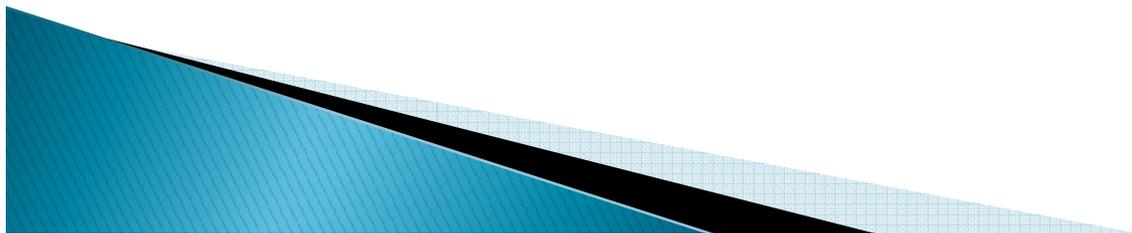
[풀이] 주어진 이차방정식이 실근을 가지려면 $D = b^2 - 4ac \geq 0$ 이어야 한다.

$3x^2 - 6x + k = 0$ 에서 $a = 3$, $b = -6$, $c = k$ 이므로

$$D = (-6)^2 - 4 \cdot 3 \cdot k \geq 0$$

$$\therefore k \leq 3$$

... ○



근과 계수의 관계

이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$)의 두 근을 α, β 라고 하면

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \quad \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$)의 두 근 α, β 는

$$\alpha = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}, \quad \beta = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \quad (\text{단, } D = b^2 - 4ac)$$

이므로

$$\alpha + \beta = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

$$\alpha\beta = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{b^2 - D}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

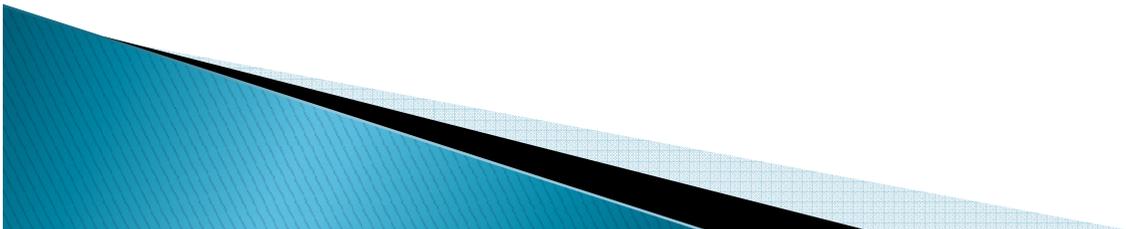
두 수의 이차방정식의 근

합이 p , 곱이 q 인 두 수는 다음 이차방정식의 근이다.

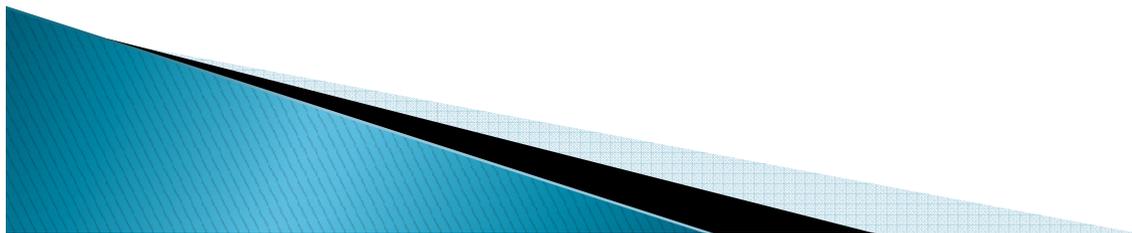
$$x^2 - px + q = 0$$

두 수 α, β 를 근으로 갖는 이차방정식 중 하나는 $(x - \alpha)(x - \beta) = 0$ 으로 나타내어지고 이 때, 이것의 좌변을 전개하면 $x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$ 이 된다.

$$q = \alpha\beta$$
$$p = \alpha + \beta$$



예제 4 — 두 수 $1 + \sqrt{2}i$, $1 - \sqrt{2}i$ 를 근으로 갖는 이차방정식을 구하여라.



[풀이] 두 수 $1 + \sqrt{2}i$, $1 - \sqrt{2}i$ 의 합을 p , 곱을 q 라고 하면

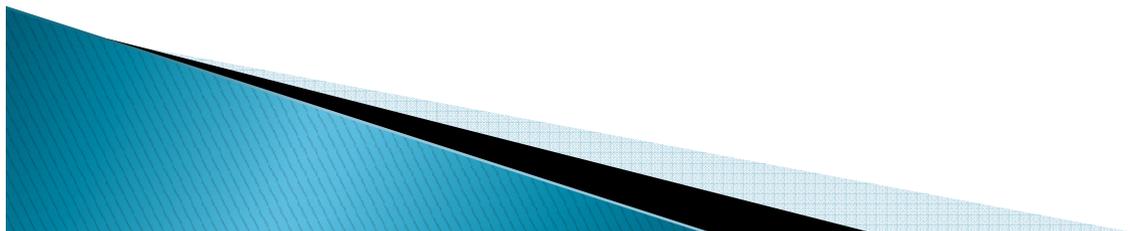
$$p = (1 + \sqrt{2}i) + (1 - \sqrt{2}i) = 2$$

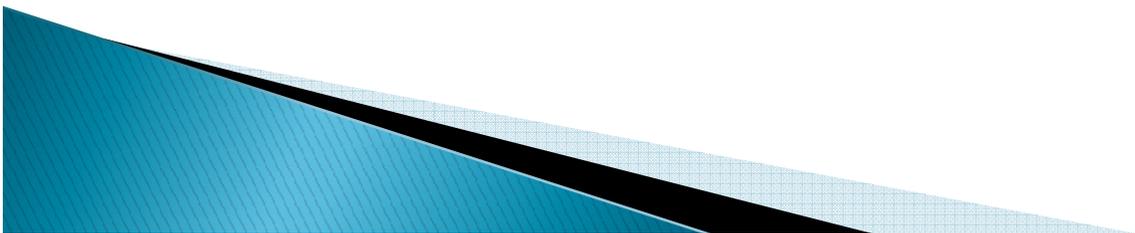
$$q = (1 + \sqrt{2}i)(1 - \sqrt{2}i) = 1 - (-2) = 3$$

이 때, 두 근의 합과 곱이 각각 2와 3이므로 구하는 방정식은 다음과 같다.

$$\therefore x^2 - 2x + 3 = 0$$

... ○





3.3 고차방정식과 연립방정식

해법



고차방정식 : 차수가 3차 이상

1. 인수분해 공식이용
2. 인수정리 이용 조립제법
3. 쉽게 인수분해 되지 않고 복잡 \rightarrow 치환하여 \rightarrow 인수분해 \rightarrow 원래 방정식의 해 구한다.

인수분해 공식

(0) $ax + ay = a(x + y)$

(1) $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2, a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$

(2) $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

(3) $x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$

(4) $acx^2 + (ad + bc)x + bd = (ax + b)(cx + d)$

(5) $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3,$

$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a - b)^3$

(6) $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2),$

$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

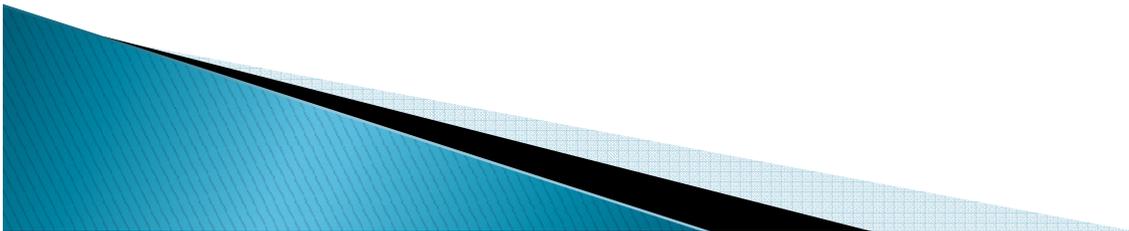
(7) $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$
 $= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$

$$\begin{aligned} & a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \\ &= (a + b)^3 - 3ab(a + b) + c^3 - 3abc \\ &= (a + b)^3 + c^3 - 3ab(a + b + c) \\ &= (a + b + c)\{(a + b)^2 - (a + b)c + c^2\} - 3ab(a + b + c) \\ &= (a + b + c)\{(a + b)^2 - (a + b)c + c^2 - 3ab\} \\ &= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \end{aligned}$$

(8) $a^4 + a^2 + 1 = (a^2 + a + 1)(a^2 - a + 1) \Rightarrow a^4 + a^2b^2 + b^4 = (a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2)$

$$f(a) = 0$$

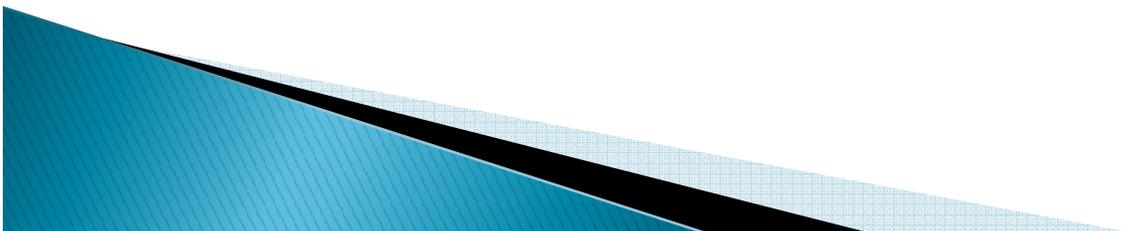
$$f(x) = (x - a)q(x)$$



$$\begin{array}{r|rrr} -2 & 2 & 5 & 6 \\ & & -4 & -2 \\ \hline & 2 & 1 & 4 \end{array}$$

몫: $2x+1$ 나머지: 4

계수들만 이용하여 몫과 나머지를 구하는 방법을 조립제법



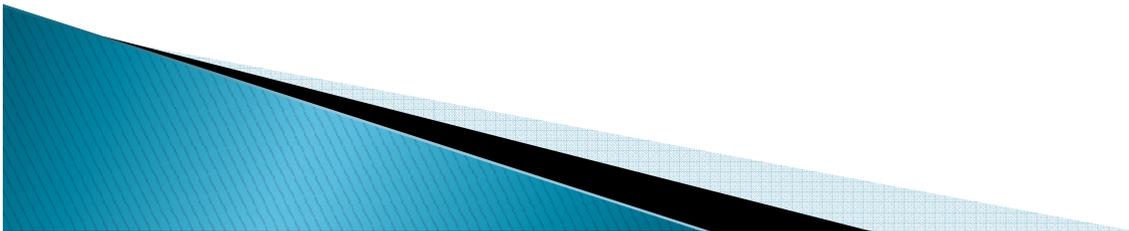
예제 1 다음 방정식을 풀어라.

$$(1) x^3 = 1 \longrightarrow x^3 - 1 = 0$$

$$(2) \underline{x^3 + 3x^2} - \underline{4x - 12} = 0$$

$$(3) x^3 - 5x - 2 = 0 \longrightarrow f(-2) = 0$$

$$(4) x^4 - 3x^3 + 3x^2 + x - 6 = 0 \longrightarrow f(-1) = 0$$



[풀이] (1) 주어진 방정식의 우변을 이항하면 $x^3 - 1 = 0$
좌변을 인수분해하면 $(x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$
그러므로 $x - 1 = 0$ 또는 $x^2 + x + 1 = 0$

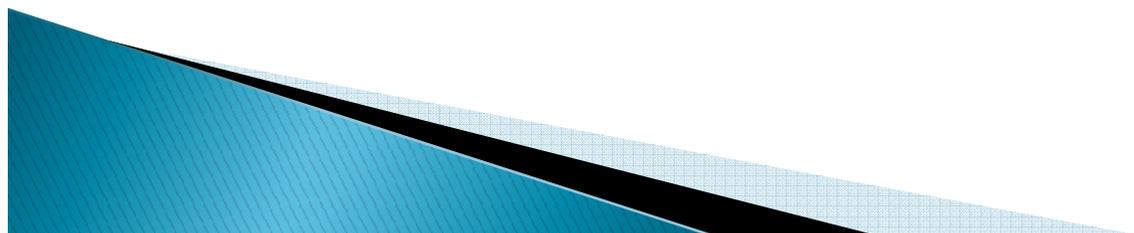
$$\therefore x = 1 \text{ 또는 } x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

(2) 좌변을 인수분해하면

$$x^2(x + 3) - 4(x + 3) = 0$$

$$(x + 3)(x + 2)(x - 2) = 0$$

$$\therefore x = -3, -2, 2$$



(3) $f(x) = x^3 - 5x - 2$ 로 놓으면 $f(-2) = 0$ 이므로 인수정리에 의하여 $f(x)$ 는 $x+2$ 를 인수로 갖는다. 다음 조립제법에서

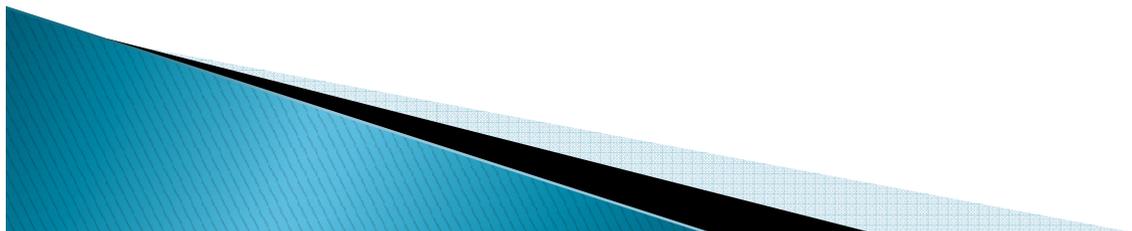
$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & 0 & -5 & -2 \\ & & -2 & 4 & 2 \\ \hline & 1 & -2 & -1 & 0 \end{array}$$

$$f(x) = (x+2)(x^2 - 2x - 1)$$

따라서 주어진 방정식은

$$(x+2)(x^2 - 2x - 1) = 0$$

$$\therefore x = -2 \text{ 또는 } 1 \pm \sqrt{2}$$



(4) $f(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 + x - 6$ 이라 하면

$$f(-1) = 0$$

이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$f(x) = (x+1)(x^3 - 4x^2 + 7x - 6)$$

$$g(x) = x^3 - 4x^2 + 7x - 6$$

이라 하면

$$g(2) = 0$$

이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$g(x) = (x-2)(x^2 - 2x + 3)$$

따라서 주어진 방정식은

$$(x+1)(x-2)(x^2 - 2x + 3) = 0$$

이므로 구하는 해는

$$\therefore x = -1, 2 \text{ 또는 } 1 \pm \sqrt{2}i$$

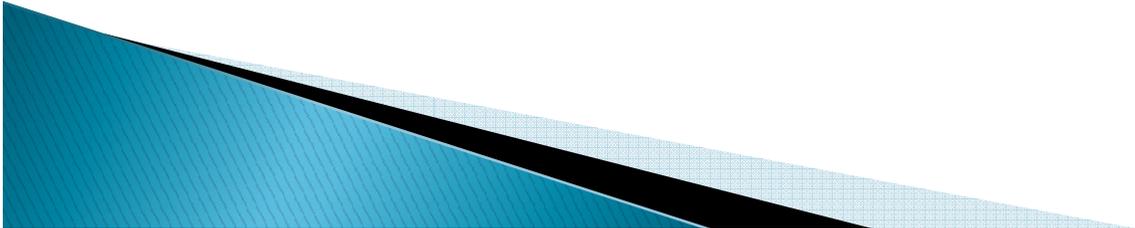
예제 ② — 다음 방정식을 풀어라. 치환

(1) $x^4 - \underline{4x^2} + 3 = 0$

(2) $x^{1/3} - \underline{x^{1/6}} - 6 = 0$

(3) $(\underline{x^2 - 3x + 4})(\underline{x^2 - 3x - 3}) = 8$

(4) $\underline{x^4} - \underline{3x^3} + \underline{4x^2} - \underline{3x} + 1 = 0$



[풀이] (1) $x^2 = t$ 로 치환하면 $t^2 - 4t + 3 = 0$

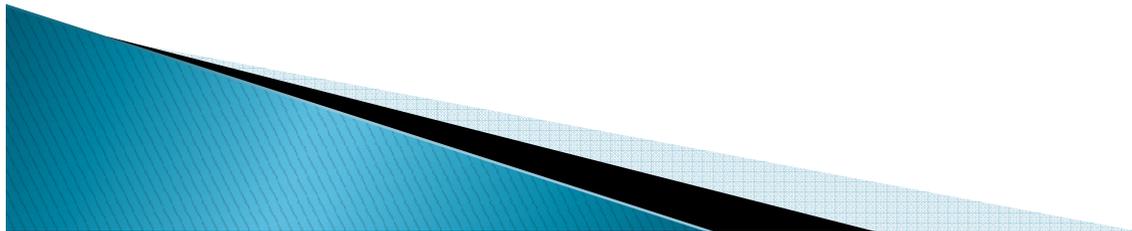
t 에 관한 이차방정식이므로 좌변을 인수분해하면

$$(t-1)(t-3) = 0$$

$$t = 1 \text{ 또는 } t = 3$$

$t = x^2$ 이므로 $x^2 = 1$ 또는 $x^2 = 3$

$$\therefore x = \pm 1 \text{ 또는 } x = \pm \sqrt{3}$$



(2) $x^{1/6} = t$ 로 치환하면 $t^2 - t - 6 = 0$ 이다. 이 식을 인수분해하면

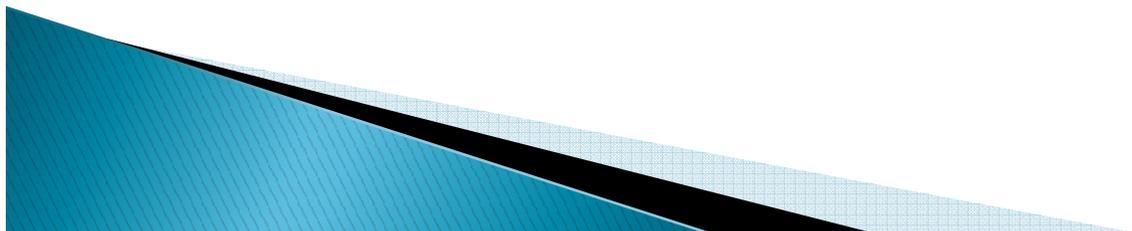
$$(t-3)(t+2) = 0$$

이지만 $t = x^{1/6}$ 은 음수가 될 수 없으므로 $t+2 \neq 0$ 이다.
따라서

$$t = x^{1/6} = 3$$

이므로

$$\therefore x = 3^6 = 729$$



(3) $x^2 - 3x = t$ 로 치환하면 $(t+4)(t-3) = 8$ 즉 $t^2 + t - 20 = 0$
인수분해하면 $(t+5)(t-4) = 0$

$$\therefore t = 4, t = -5$$

(i) $x^2 - 3x = 4$ 에서 $(x+2)(x-4) = 0$

$$\therefore x = -1, x = 4$$

(ii) $x^2 - 3x = -5$ 에서 $x^2 - 3x + 5 = 0$
근의 공식을 이용하면

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 5}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{11}i}{2}$$

따라서 구하는 해는

$$\therefore x = -1, x = 4, x = \frac{3 \pm \sqrt{11}i}{2}$$

(4) 양변을 x^2 으로 나누면

$$x^2 + \frac{1}{x^2} - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) + 4 = 0$$

그런데 $x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2$ 이므로 주어진 방정식은

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) + 2 = 0$$

$x + \frac{1}{x} = t$ 로 치환하면 $t^2 - 3t + 2 = 0$

인수분해하면 $(t-1)(t-2) = 0 \quad \therefore t = 1, t = 2$

(i) $x + \frac{1}{x} = 1$ 에서 $x^2 - x + 1 = 0 \quad \therefore x = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

(ii) $x + \frac{1}{x} = 2$ 에서 $x^2 - 2x + 1 = 0 \quad \therefore x = 1$

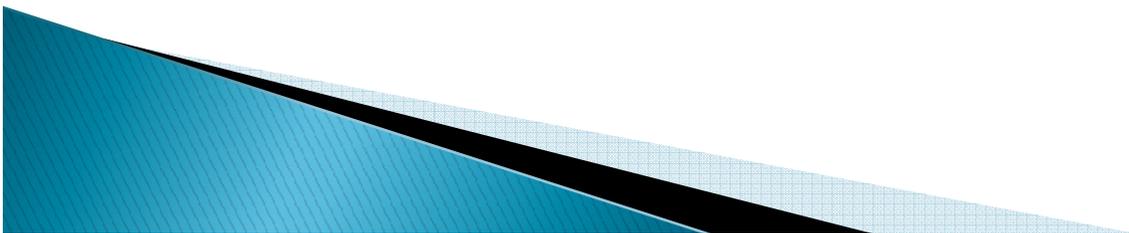
따라서 구하는 해는

$$\therefore x = 1(\text{중근}), x = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

... ○

예제 3 — 방정식 $x^3 + x^2 + px + q = 0$ 의 한 근이 $1 - i$ 일 때, 실수 p, q 의 값 및 나머지 두 근을 구하여라.

$1 - i$ 가 근이므로 대입하면 주어진 방정식을 만족



[풀이] (1) $1-i$ 가 근이므로 대입하면 주어진 방정식을 만족시켜야 한다. 즉

$$(1-i)^3 + (1-i)^2 + p(1-i) + q = 0$$

전개하여 i 에 관해서 정리하면 $(p+q-2) + (-p-4)i = 0$

p, q 는 실수이므로 $p+q-2=0, -p-4=0$

$$\therefore p = -4, q = 6$$

이 때, 주어진 방정식은 $x^3 + x^2 - 4x + 6 = 0$

$f(-3) = 0$
조립제법

$$\therefore (x+3)(x^2 - 2x + 2) = 0$$

$$\therefore x = -3, x = 1 \pm i$$

따라서 구하는 답은 $p = -4, q = 6, x = -3, x = 1 + i$

(2) 주어진 방정식이 실계수 방정식이므로 $1+i$ 도 근이다. 인수정리에 의해 주어진 방정식은 다음을 인수로 갖는다.

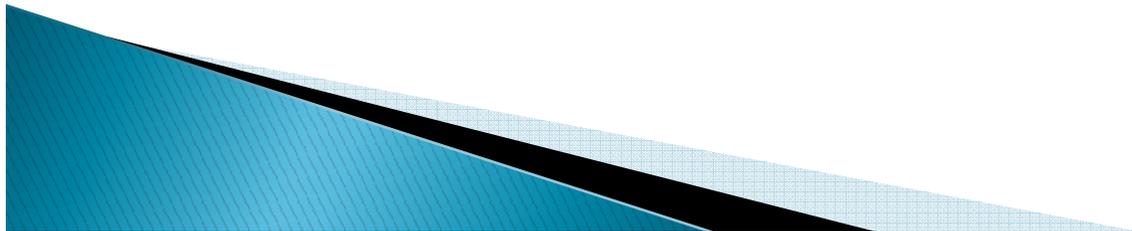
$$[x - (1 - i)][x - (1 + i)] = x^2 - 2x + 2$$

$x^3 + x^2 + px + q$ 를 $x^2 - 2x + 2$ 로 나누면 몫이 $x + 3$ 이고 나머지가 $(p + 4)x + (q - 6)$ 인데, 나누어떨어지므로

$$(p + 4)x + (q - 6) = 0 \quad \therefore p = -4, \quad q = 6$$

다음은 풀이 (1)과 같다.

... ◉

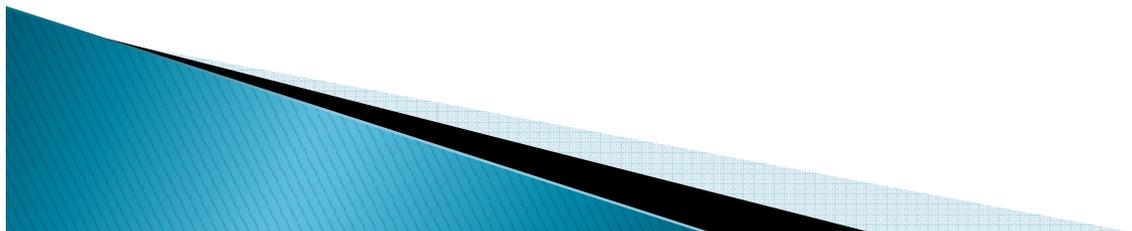


예제 4 — 다음 연립방정식의 해를 구하여라.

$$(1) \begin{cases} 2x + y - z = 8 & \dots \textcircled{1} \\ x - y + 3z = -4 & \dots \textcircled{2} \\ 3x + 2y + z = 11 & \dots \textcircled{3} \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x + y = 1 & \dots \textcircled{1} \\ y + z = 3 & \dots \textcircled{2} \\ x + z = 8 & \dots \textcircled{3} \end{cases}$$

미지수가 **3개**인 연립 **일차**방정식

→ 한 변수를 소거하여 미지수가 2개인 연립일차 방정식으로 만든 후 푼다.



[풀이] (1) 먼저 z 를 소거하기 위해서 ① $\times 3$ +②를 하면

$$7x + 2y = 20 \quad \dots \text{④}$$

①+③을 하면

$$5x + 3y = 19 \quad \dots \text{⑤}$$

④와 ⑤를 연립하여 풀면 $x = 2, y = 3$
 $x = 2, y = 3$ 을 ①에 대입하면 $z = -1$

$$\therefore x = 2, y = 3, z = -1$$

(2) ①+②+③을 하면 $2x + 2y + 2z = 12$ 이므로

$$x + y + z = 6 \quad \dots \text{④}$$

$$\text{④} - \text{①} \text{하면 } z = 5$$

$$\text{④} - \text{②} \text{하면 } x = 3$$

$$\text{④} - \text{③} \text{하면 } y = -2$$

$$\therefore x = 3, y = -2, z = 5$$

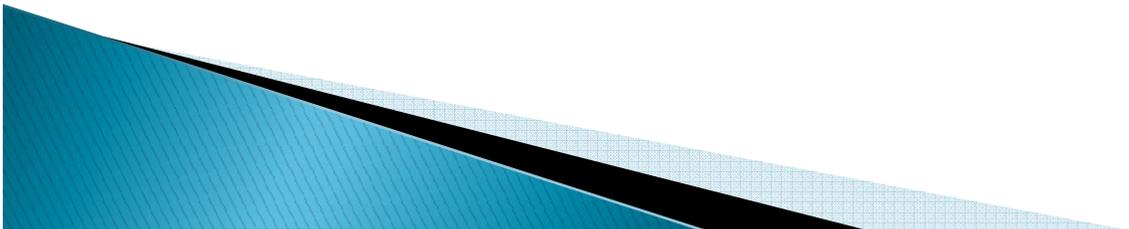
예제 5 다음 연립방정식의 해를 구하여라.

$$(1) \begin{cases} x - y = 2 & \dots \textcircled{1} \\ x^2 + y^2 = 10 & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} 2x^2 - 3xy - 2y^2 = 0 & \dots \textcircled{1} \\ 2x^2 + y^2 = 36 & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

미지수가 **2개**인 연립 **이차**방정식

→ 한 문자에 관해서 풀어서 다른 이차방정식에 대입하여 푼다.



[풀이] (1) ①을 y 에 대하여 풀면 $y = x - 2$... ③

미지수 y 를 소거하기 위하여 ③을 ②에 대입하면

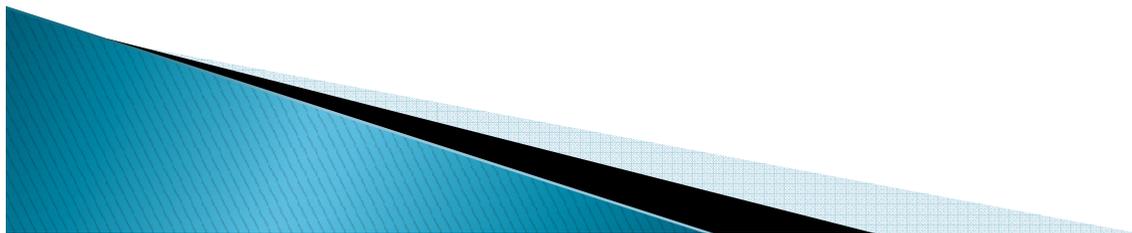
$$\begin{aligned}x^2 + y^2 = 10 &\Leftrightarrow x^2 + (x - 2)^2 = 10 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - 3)(x + 1) = 0\end{aligned}$$

$\therefore x = 3$ 또는 $x = -1$

$x = 3$ 을 ③에 대입하면 $y = 1$

$x = -1$ 을 ③에 대입하면 $y = -3$

따라서 구하는 해는 $\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x = -1 \\ y = -3 \end{cases}$



(2) ①의 좌변을 인수분해하면

$$(x-2y)(2x+y)=0 \quad \therefore x=2y \text{ 또는 } y=-2x$$

$x=2y$ 일 때, 이것을 ②에 대입하여 정리하면 $y^2=4$

$$\therefore y=2 \text{ 또는 } y=-2$$

$$\therefore x=4, y=2 \text{ 또는 } x=-4, y=-2$$

$y=-2x$ 일 때, 이것을 ②에 대입하여 정리하면 $x^2=6$

$$\therefore x=\sqrt{6} \text{ 또는 } x=-\sqrt{6}$$

$$\therefore x=\sqrt{6}, y=-2\sqrt{6} \text{ 또는 } x=-\sqrt{6}, y=2\sqrt{6}$$

따라서 구하는 해는

$$\begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=-4 \\ y=-2 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=\sqrt{6} \\ y=-2\sqrt{6} \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=-\sqrt{6} \\ y=2\sqrt{6} \end{cases} \dots \circ$$