3.9 변형률증분과 변형률 속도

- 큰 변형률을 고려할 때, 바로 미소변형률(지금까지의 변형률 기본 전제)을 적용할 수 없다.

- 하지만 실제 변형은 변형시간을 두고 점진적으로 일어나기 때문에, 어떤 변형시각을 기준으로 하여 미소시간(dt) 동안의 변형률증분(strain increment)과 변위증분을 합산하면 된다.

  → 미소변형률 개념을 사용할 수 있음.

$$
\begin{aligned}
\epsilon_{total\,(t=t_0)} &= \epsilon_{(t=t_0)} = \epsilon_0 \\
\epsilon_{total\,(t=t_1)} &= \epsilon_0 + d\epsilon_{(t=t_1)} \\
&\vdots \qquad\qquad \vdots \\
\epsilon_{total\,(t=t_n)} &= \epsilon_{n-1} + \underline{d\epsilon_{(t=t_n)}}
\end{aligned}
$$

▸ 변형률증분량 → 물리적 의미: 변형률 성분의 미분이 아님

※좌표계는 주어진 요소에 고정

- 여기서

$$
\begin{aligned}
d\epsilon_x &= \frac{\partial(du)}{\partial x}, \quad d\gamma_{yz} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial(dv)}{\partial z} + \frac{\partial(dw)}{\partial y}\right] \\
d\epsilon_y &= \frac{\partial(dv)}{\partial y}, \quad d\gamma_{zx} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial(dw)}{\partial x} + \frac{\partial(du)}{\partial z}\right] \\
d\epsilon_x &= \frac{\partial(dw)}{\partial z}, \quad d\gamma_{xy} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial(du)}{\partial y} + \frac{\partial(dv)}{\partial x}\right]
\end{aligned}
$$

※ du, dv, dw는 변위의 증분임

(참고: 여기서 쓰인 $dgamma_{ij}$는 공칭전단변형률이 아닌 전단변형률, $d\gamma_{ij} = d\epsilon_{ij}$)

$$
\therefore\ d\gamma_{xy} = \frac{1}{2}\,d\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial y}du_i + \frac{\partial}{\partial x}du_j\right), \quad i, j = 1, 2, 3
$$

- 일정시간동안 총 변형률

＊ 좌표축이 일정(고정)될 때

ex) 단축 인장, $d\epsilon_1 = \frac{dl}{l}$

$$\epsilon_1 = \int_{l_0}^{l} d\epsilon_1 = \ln\left(\frac{l}{l_0}\right)$$

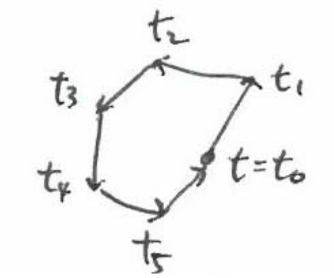
(l : $t = t_n$일 때의 길이, l_0 : $t = t_0$일 때의 길이, 초기 길이)

→ 변형중 주축이 변하지 않으므로 중첩의 원리에 의해

$$\epsilon_1 = \sum_i^n \ln\left(\frac{l_i}{l_0}\right)$$ 이다.

＊ 일반적인 경우(좌표축(변형주축)이 변경되는 경우)

$\int d\epsilon_{ij}$을 계산할 수도 없으며 물리적 의미도 없다.

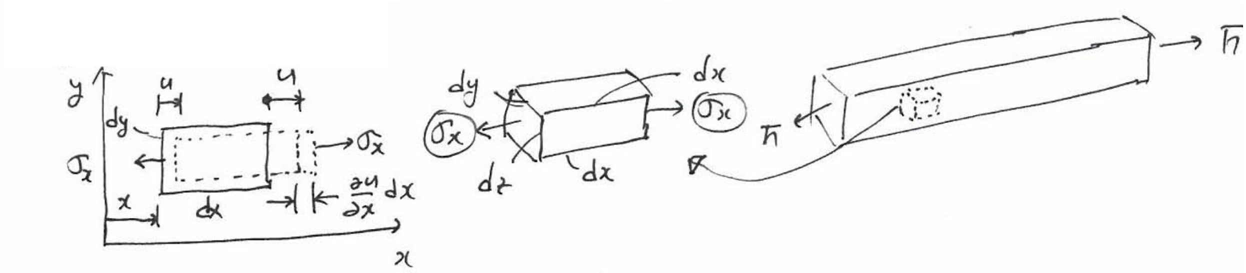


: 원래 길이로 돌아오면 변형률 $=0$?

→ 그러나 변형경로(deformation path)를 알 수 있는 경우는 계산이 가능하며 물리적 의미도 있음.

⁎ Strain Energy

- The work done by external force in causing deformation is stored within the body in the form of Strain energy
  In an ideal elastic case, no dissipation of energy takes place, and all the stored energy is recoverable upon unloading



- force : σ_x • $dydz$

$$dW = dU = \int_0^{\epsilon_x} \sigma_x\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx\right)dydz = \int_0^{\epsilon_x} \sigma_x d\epsilon_x (dxdydz)$$

(dW: work done by on $dxdydz$, dU: the corresponding increase in strain energy)

Let, U_0 : the strain energy per unit volume(strain energy density)

$$U_0 = \int_0^{\epsilon_x} \sigma_x d\epsilon_x = \int_o^{\epsilon_x} E\epsilon_x d\epsilon_x$$ (※ $E\epsilon_x$: linear elastic material(가정))

$$\therefore\ U_0 = \frac{1}{2}E\epsilon_x^2 = \frac{1}{2}\epsilon_x = \frac{1}{2E}\sigma_x^2$$

- In the case in which σ_x, σ_y, σ_z act simultaneously,

$$\therefore\ U_0 = \frac{1}{2}\left(\sigma_x\epsilon_x + \sigma_y\epsilon_y + \sigma_z\epsilon_z\right)$$

- 속도성분을 고려하면, $(v_x,\, v_y,\, v_z)$

→ 변형증분 $du = v_x dt$, $dv = v_y dt$, $dw = v_z dt$

-따라서

$$\dot{\epsilon}_x = \frac{d\epsilon_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial x} \quad \left(\leftarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{v_x dt}{\partial x}\right) \right)$$

$$\dot{\gamma}_{yz} = \frac{d\gamma_{yz}}{dt} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\right)$$

$$\dot{\epsilon}_y = \frac{\partial v_y}{\partial y} \text{ , } \dot{\gamma}_{zx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z}\right)$$

$$\dot{\epsilon}_z = \frac{\partial v_z}{\partial z} \text{ , } \dot{\gamma}_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right)$$

$\therefore\ \dot{\epsilon}_{ij} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_i}{\partial x_j} + \dfrac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$ ← 고온 성형 조건에서 매우 중요.

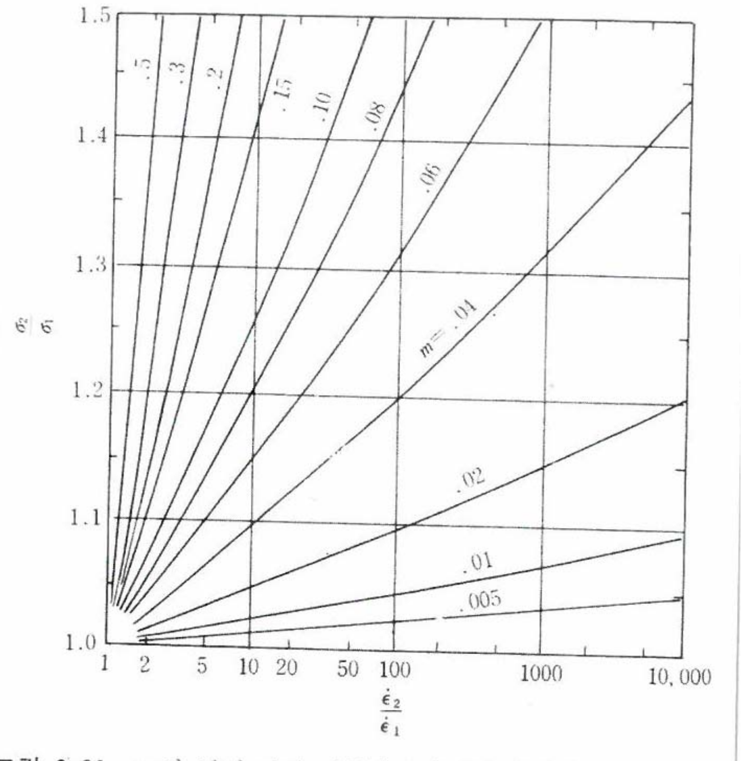


그림 3-31 m 의 값에 따라 변형속도가 유동응력에 미치는 영향

- m값에 따른 유동응력 영향 $\frac{\sigma_2}{\sigma_1}$

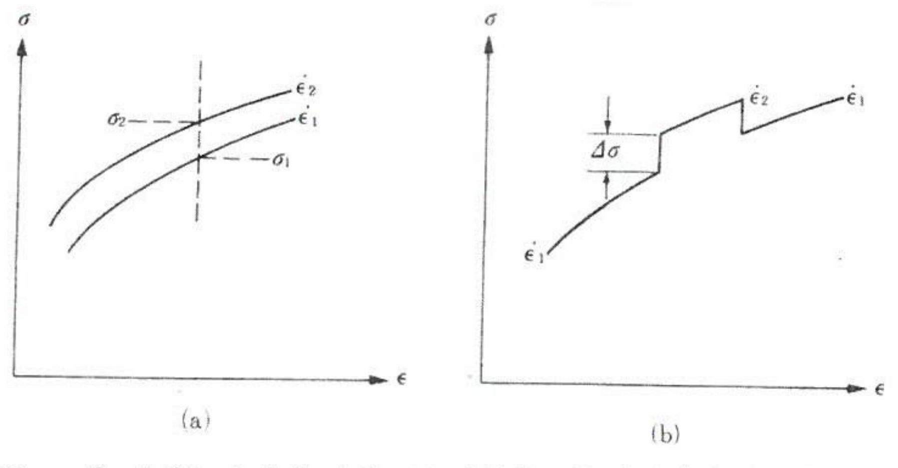


그림 3-32 m을 구하는 2가지 방법. (a) 변형속도를 달리하여 연속적인 응력-변형률 곡선을 구하고 같은 변형률에서의 응력을 이용하여 $m=\ln(\sigma_2/\sigma_1)/\ln(\dot{\epsilon}_2/\dot{\epsilon}_1)$으로 계산함. (b) 한 시편으로 변형속도를 갑자기 변화시켜 $m=(\Delta\sigma/\sigma)/\ln(\dot{\epsilon}_2/\dot{\epsilon}_1)$으로 계산함.

- m값을 구하는 법

＊ 변형률속도가 유동에 미치는 영향

변형률속도가 증가할수록 유동응력이 증가

$$\sigma = c\dot{\epsilon}^{m}|_{T,\epsilon}$$

C : 변형, 온도, 재료에 따라 결정되는 상수

m : 변형속도 민감도(상온에서는 일반적으로 매우 작은 값, $0 \sim 0.03$)

ex) 실온에서 변형률속도 차이에 따른 유동응력 차이 비교

- $\dot{\epsilon}_2 > \dot{\epsilon}_1$ 인 경우

- $\dfrac{\sigma_2}{\sigma_1} = \left(\dfrac{\dot{\epsilon}_2}{\dot{\epsilon}_1}\right)^m$, $\ln\left(\dfrac{\sigma_2}{\sigma_1}\right) = m\ln\left(\dfrac{\dot{\epsilon}_2}{\dot{\epsilon}_1}\right)$

- 실온에서 σ_2가 σ_1과 거의 유사하므로, $\sigma_1 + \triangle\sigma$(작은 값)$= \sigma_2$

$$\ln\left(\frac{\sigma_1 + \triangle\sigma}{\sigma_1}\right) = \ln\left(1 + \frac{\triangle\sigma}{\sigma_1}\right) \approx \frac{\triangle\sigma}{\sigma_1} = m\ln\left(\frac{\dot{\epsilon}_2}{\dot{\epsilon}_1}\right)$$

- In case of $m = 0.01$, $\dot{\epsilon}_2 = 10\dot{\epsilon}_1$ (변형률속도가 10배)

$$\frac{\triangle\sigma}{\sigma_1} = 0.01\ln(10) = 0.23$$

$$\therefore \triangle\sigma = 0.23\sigma_1$$

약 2.3% 정도 유동응력이 증가됨

→ 따라서 실온에서는 변형률속도 영향을 일반적으로 무시함

- m값이 클 경우 → 변형이 좁은 영역에 국한되는 것을 막게 되어
  전체적으로 큰 변형을 유도할 수 있음.

⇒ 이러한 상태를 초소성(Superplastic)이라 함. ($m = 0.5$ 이상)

＊ 조건

① 결정립이 수 μm 이하, 미세 등축 결정
② 고온 $T > 0.4\,T_m$
③ 변형속도가 작아야 함 ($10^{-2}/\mathrm{sec}$ 이하)
④ 변형 중 현미경 조직이 안정성이 필요