집합과 함수 5

5.1 집합

집합(set) : 어떤 조건에 의하여 그 대상이 분명한 모임.
원소(element) : 집합을 이루고 있는 대상 하나하나.

$a \in A,\ \ b \notin A$

A : 집합
a, b : 원소
a : A의 원소
b : A의 원소가 아님

$\varnothing$ 공집합(empty set) : 원소가 하나도 없는 집합

5 이하의 자연수의 집합 A

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$: 원소나열법

$A = \{x \mid x \le 5,\ x\text{는 자연수}\}$: 조건제시법

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$: 자연수(natural number)의 집합

$\mathbb{Z} = \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2 \cdots\}$: 정수(integer)의 집합

$\mathbb{Q} = \left\{\dfrac{p}{q} : p, q\text{는 정수}, q \neq 0\right\}$: 유리수(rational number)의 집합

$\mathbb{Q}^c$: 무리수(irrational number)의 집합

$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^c$: 실수(real number)의 집합

$\mathbb{C}$: 복소수(complex number)의 집합

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^c$$

합집합

A^c : U-A , A의 여집합(complement)

U는 전체집합
A는 전체집합 U에 대한 부분집합

* 집합 A에 대하여 $\varnothing \subset A$이고 $A \subset A$

* $A \subset B$: A의 모든 원소가 B에 포함된다.
A는 B의 부분집합이다.

* $A \subset B$ 이고 $B \subset A$: 두 집합은 서로 같다.
$A = B$

*두 집합 A, B에 대하여 $A \subset B$이고 $A \neq B$일 때 : A는 B의 진부분집합

진부분집합의 예 :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

두 집합 A, B에 대하여

$A \cup B = \{x : x \in A$ 또는 $x \in B\}$: **합집합** (union)

$A \cap B = \{x : x \in A$ 이고 $x \in B\}$: **교집합** (intersection)

$A - B = \{x : x \in A$ 또는 $x \notin B\}$: **차집합** (difference)

A^c : U-A , A의 여집합(complement)

U는 전체집합
A는 전체집합 U에 대한 부분집합

$A \cap B = \varnothing$: A와 B는 서로소

집합의 연산법칙

(1) $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$(교환법칙)

(2) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$,

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$(결합법칙)

(3) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$,

$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$(분배법칙)

(4) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$, $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

(드 모르간의 법칙)

$A = \{1, 2\}$, $B = \{x, y\}$일 때, $A \times B$와 $B \times A$를 구해보면

$$A \times B = \{(1, x), (1, y), (2, x), (2, y)\}$$

$$B \times A = \{(x, 1), (x, 2), (y, 1), (y, 2)\}$$

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A,\ b \in B\}$$

$B \times A = \{(b, a) : b \in B, a \in A\}$

$$A \times B \neq B \times A$$

A x B : A의 원소와 B의 원소의 순서쌍들의 집합
A와 B의 데카르트 곱(Cartesian product)

$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ $\mathbb{R}^2$: 평면위의 모든 점들의 집합

$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ $\mathbb{R}^3$: 공간의 모든 점들의 집합

유한집합 A의 원소의 개수를 $n(A)$라 하면 다음이 성립한다.

유한집합 A, B에 대하여 다음 성질이 성립한다.

(1) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

(2) $A \cap B = \varnothing$ 이면 $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$이다.

(3) $n(A \times B) = n(A)n(B)$

예제 1 한 마을 50가구의 집에서는 a, b의 두 가지 신문 중 적어도 한 신문은 반드시 구독하고 있다. a 신문을 구독하는 가구의 수가 35이고 b 신문을 구독하는 가구의 수가 31이라 할 때,

(1) a, b 신문 모두를 구독하는 가구의 수를 구하여라.

(2) a 신문만을 구독하는 가구의 수를 구하여라.

(1) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

(2) $n(A) - n(A \cap B)$

$= n(A \cap B^c)$

[풀이] a 신문을 구독하는 가구의 집합을 A라 하고, b 신문을 구독하는 가구의 집합을 B라 하면,

$$n(A \cup B) = 50,\ n(A) = 35,\ n(B) = 31$$

(1) a, b 신문 모두를 구독하는 가구의 수 $n(A \cap B)$는

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

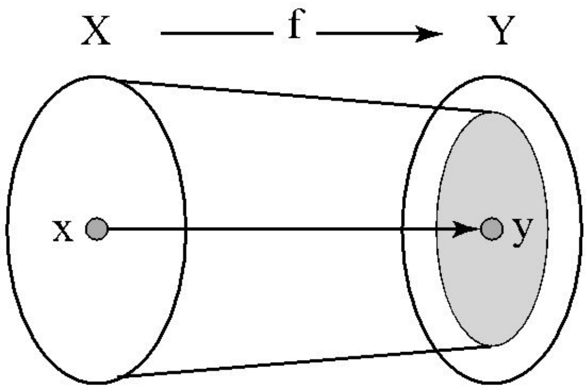
에서 $50 = 35 + 31 - n(A \cap B)$

$$\therefore n(A \cap B) = 16$$

(2) a 신문만을 구독하는 가구의 수 $n(A \cap B^c)$은

$$n(A \cap B^c) = n(A) - n(A \cap B) = 35 - 16 = 19 \qquad \cdots ⭘$$

5.2 함수



$f : X \rightarrow Y$

: 두 집합 X,Y에서 **X의 각 원소에 Y의 원소가 하나씩만 대응한다.**

X에서 Y로의 함수(function)

X – 함수 f의 정의역(domain)

Y – 함수 f의 공역(codomain)

$y = f(x)$

y를 f에 의한 x의 상(image) 또는 f의 x에서의 함수값(value)

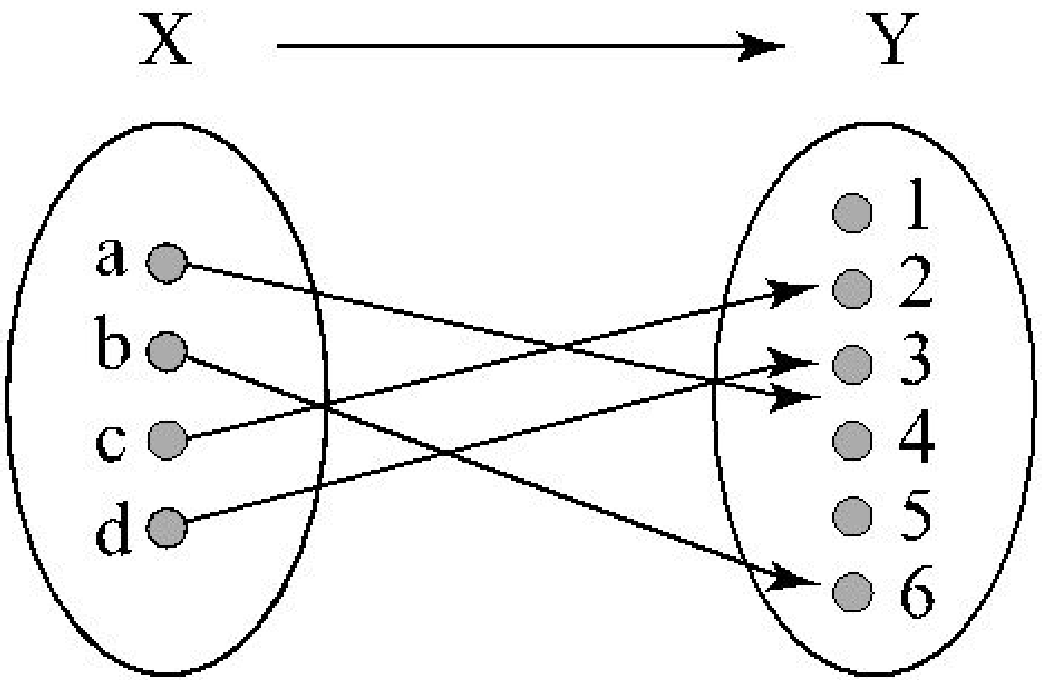
치역(range, $f(X)$)–집합 X안의 모든 원소 x에 대한 함수값들의 집합

x – 독립변수(independent variable)

y – 종속변수 (dependent variable)

$\{f(x) : x \in X\}$: 함수 f에 의한 함수값 전체의 집합

함수 f의 치역(range)



1대 1대응이므로 $f : X \rightarrow Y$ 는 함수이다

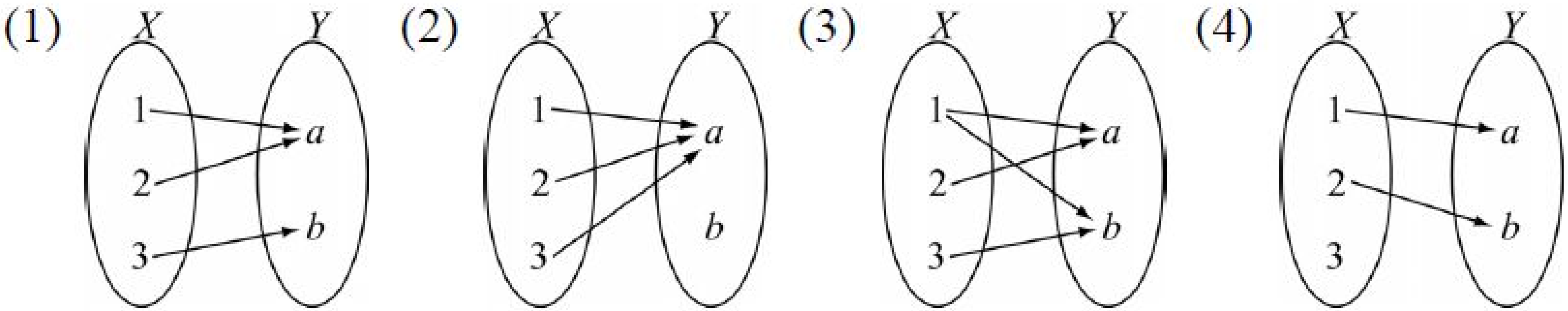
정의역

공변역

치역

보기 1

다음과 같은 4개의 대응 중 함수를 찾아보자.



(1)과 (2)는 집합 X의 각 원소에 집합 Y의 원소가 오직 하나씩 대응되므로 함수이다.

(3)은 1에 대응되는 집합 Y의 원소가 2개이므로 함수가 아니다.

(4)는 3에 대응되는 집합 Y의 원소가 없으므로 함수가 아니다.

예제 1 다음 함수의 정의역을 구하여라.

(1) $f(x) = x+1$

(2) $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$

(3) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-3x}$

(4) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$

[풀이] (1) 모든 실수 x에 대하여 정의되므로 정의역은 $\mathbb{R}$

(2) $x=2$에서 정의되지 않으므로 정의역은 $\mathbb{R}-\{2\}$

(3) $x^2-3x \neq 0$이어야 하므로 $x \neq 0,\ 3$. 따라서 정의역은 $\mathbb{R}-\{0,\ 3\}$

(4) $4-x^2>0$이어야 하므로 정의역은 $(-2,\ 2)$ …○

항등함수(I, identity function) : 정의역과 치역이 같고 f(x) = x인 함수

$I(x) = x$

상수함수(constant function) : 정의역의 모든 원소가 공역의 한 원소에 대응하는 함수

두 함수의 합, 차, 곱, 몫

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$$

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)$$

$$(fg)(x)=f(x)g(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$$

(정의역은 g(x) = 0인 x를 제외)

합성함수

$$(f \circ g)(x)=f(g(x))$$

g의 정의역의 원소 중에서 g(x)가 f의 정의역에
속하는 x의 집합

$f(x) = 2x - 1,\ g(x) = -x + 1$

함수들의 사칙연산

$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = (2x-1) + (-x+1) = x$

$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = (2x-1) - (-x+1) = 3x-2$

$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = (2x-1)(-x+1) = -2x^2 + 3x - 1$

$(f/g)(x) = f(x)/g(x) = (2x-1)/(-x+1)$, 단 $x \neq 1$

예제 2 $f(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=x-3$일 때, 다음을 구하여라.

(1) $(f\circ g)(4)$와 $(g\circ f)(4)$

(2) 함수 $f\circ g$, $g\circ f$ 와 각각의 정의역

[풀이] (1) $(f \circ g)(4) = f(g(4)) = f(1) = 1$

$(g \circ f)(4) = g(f(4)) = g(2) = -1$

(2) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x-3) = \sqrt{x-3}$ 이고 그 정의역은 $x \geq 3$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = \sqrt{x} - 3$ 이고 그 정의역은 $x \geq 0$ $\cdots$ ㅇ

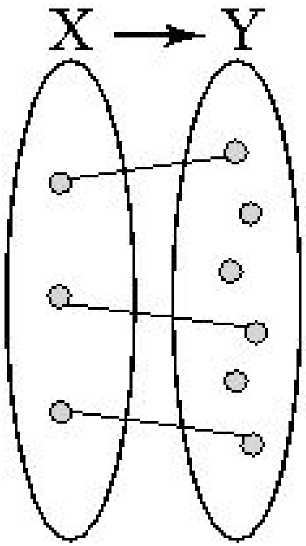
합성함수 : 교환법칙은 성립하지 않는다.

$$f \circ g \neq g \circ f$$

결합법칙은 성립한다.

$$\begin{aligned}(f \circ (g \circ h))(x) &= f((g \circ h)(x)) = f(g(h(x))) \\ &= (f \circ g)(h(x)) = ((f \circ g) \circ h)(x)\end{aligned}$$

일대일 함수



1대1 대응

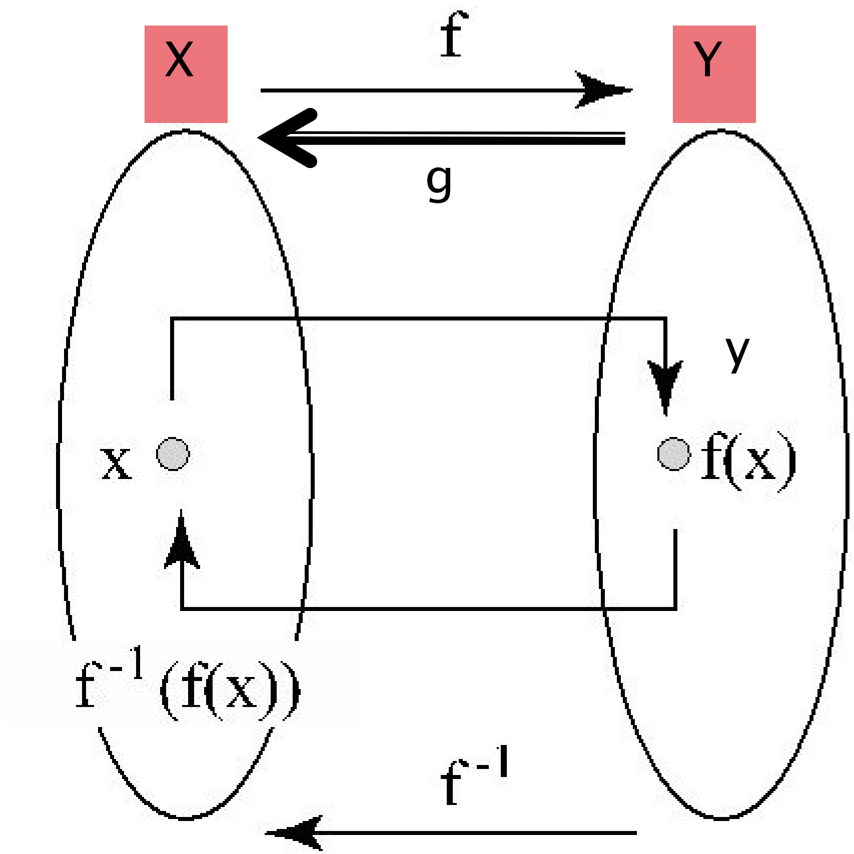
함수 $f : X \to Y$ 에서

(1) 치역과 공역이 같고

(2) X의 임의의 두 원소 $x_1,\ x_2$에 대하여

$$x_1 \neq x_2 \text{이면 } f(x_1) \neq f(x_2)$$

역함수 – 함수 y=f(x) 의 치역을 정의역으로 가지는 함수
g: Y → X를 f:X →Y의 역함수라고 한다.



y = f(x)의 역함수 $x = f^{-1}(y)$

함수 $y = f(x)$의 역함수가 존재하면

$$y = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = f^{-1}(y)$$

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x \quad (x \in X)$$

$$(f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = f(x) = y \quad (y \in Y)$$

예제 3

3. 다음 함수의 역함수를 구하여라.

(1) $f(x) = 2x + 3$

(2) $f(x) = \dfrac{x}{x+4}$

[풀이] (1) 주어진 함수를 $y = f(x)$라 놓으면 $y = 2x + 3$이다.

이것을 x에 대하여 풀면 $x = \frac{1}{2}y - \frac{3}{2}$

여기서 두 변수 x, y를 서로 바꾸어서 나타내면

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$$

따라서, 구하는 역함수는

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$$

(2) $y = \frac{x}{x+4}$라 하고 x에 대하여 풀면

$$(x+4)y = x$$

$$(1-y)x = 4y$$

$$x = \frac{4y}{1-y}$$

x, y를 서로 바꾸어서 나타내면 $y = \frac{4x}{1-x}$

따라서 $f^{-1}(x) = \frac{4x}{1-x}$ …o

예제 4 두 함수 f, g의 역함수가 존재할 때, 다음을 증명하라.

$$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$$

예제 4 두 함수 f, g의 역함수가 존재할 때, 다음을 증명하라.

$$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$$

[풀이] 함수의 합성은 결합법칙이 성립하므로

$$\begin{aligned}(g^{-1} \circ f^{-1}) \circ (f \circ g) &= g^{-1} \circ (f^{-1} \circ f) \circ g \\ &= g^{-1} \circ I \circ g = g^{-1} \circ g = I\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(f \circ g) \circ (g^{-1} \circ f^{-1}) &= f \circ (g \circ g^{-1}) \circ f^{-1} \\ &= f \circ I \circ f^{-1} = f \circ f^{-1} = I\end{aligned}$$

따라서 $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$ …○

예제 5 두 집합 $X=\{a, b, c\}$, $Y=\{1, 2, 3\}$에 대하여

(1) X에서 Y로의 함수는 몇 개 있는가?

(2) X에서 Y로의 일대일대응은 몇 개 있는가?

[풀이] (1) Y의 원소 1,2,3에서 세 개를 뽑아 다음의 □안에 늘어 놓는 방법의 수를 구하는 것이다.

$$a \to \square,\ b \to \square,\ c \to \square$$

이 때, 뽑은 세 개의 수가 모두 다를 때는 말할 것도 없지만, 어느 두 수가 같거나 세 수가 모두 같아도 좋다.

따라서 a에는 1,2,3의 세 가지, b에는 a에 온 수가 와도 좋으므로 역시 세 가지, 마찬가지로 c에는 a, b에 온 수가 와도 좋으므로 세 가지씩이 있다.

$$\therefore\ 3 \times 3 \times 3 = 27(\text{개})$$

(2) a에 온 수가 b에 와서는 안 되고, a, b에 온 수가 c에 와서는 안되므로

$$\therefore 3 \times 2 \times 1 = 6(\text{개}) \qquad \cdots ⓞ$$

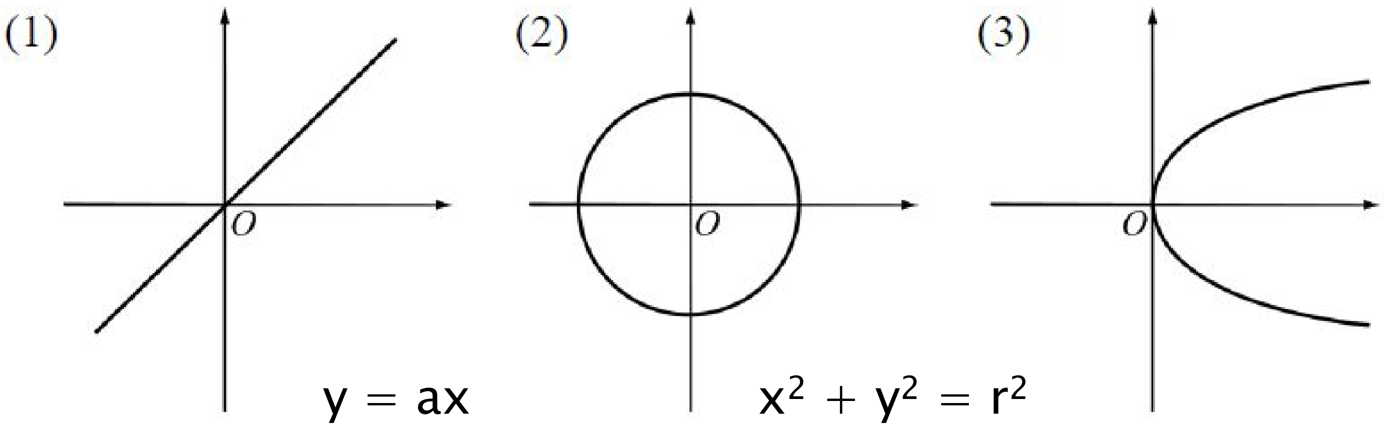
5.3 함수의 그래프

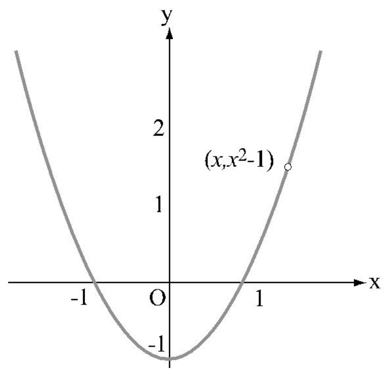
함수 $f : X \to Y$ 에 대하여, 정의역 X의 원소 x와 이에 대응하는 함수값 $f(x)$의 순서쌍 $(x, f(x))$ 전체의 집합

$$G = \{(x, f(x)) : x \in X\}$$

를 함수 f 의 **그래프**(graph)라고 한다.

다음 그림에서 함수의 그래프를 나타내고 있는 것은 (1)뿐이고 (2)와 (3)은 함수의 그래프가 아니다. f(x)

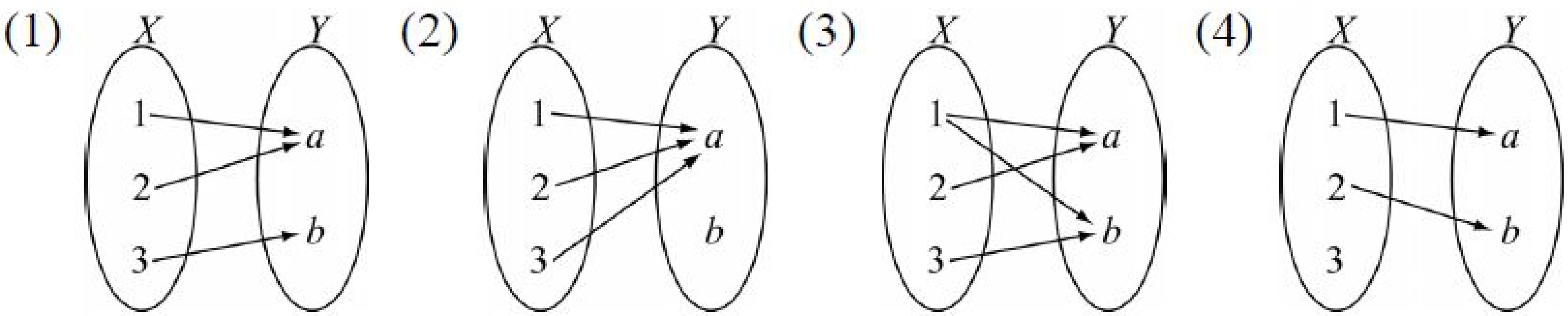




$y = ax$ $x^2 + y^2 = r^2$ $x = ay^2$ $y=x^2-1$

보기 1

다음과 같은 4개의 대응 중 함수를 찾아보자.



(1)과 (2)는 집합 X의 각 원소에 집합 Y의 원소가 오직 하나씩 대응되므로 함수이다.

(3)은 1에 대응되는 집합 Y의 원소가 2개이므로 함수가 아니다.

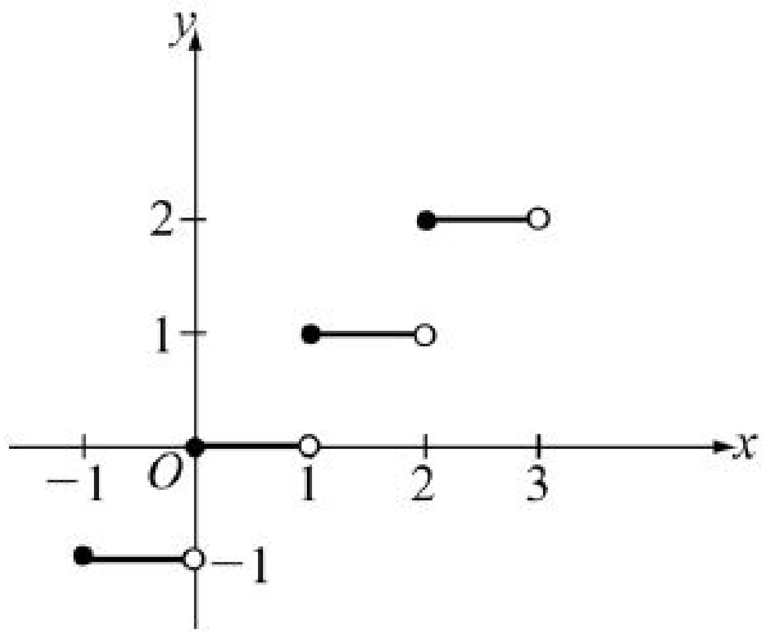
(4)는 3에 대응되는 집합 Y의 원소가 없으므로 함수가 아니다.

가우스 함수 $y=[x]$는 다음과 같이 정의되는 함수이다.

$[x]$는 x를 넘지 않는 최대 정수

예를 들면, $[2]=2$, $[2.5]=2$, $[\pi]=3$, $[-1.5]=-2$이다.

예제 1 가우스 함수 $y=[x]$의 그래프를 그려라.



y
2
1
x
−1
O
1
2
3
−1

절편

x 절편 : x축과 만나는 점 → y = f(x)에서 y = 0일때
y 절편 : y축과 만나는 점 → y = f(x)에서 x = 0일때

보기 2

곡선 $y = x^2 + 3x - 4$의 x절편과 y절편을 구해보자.

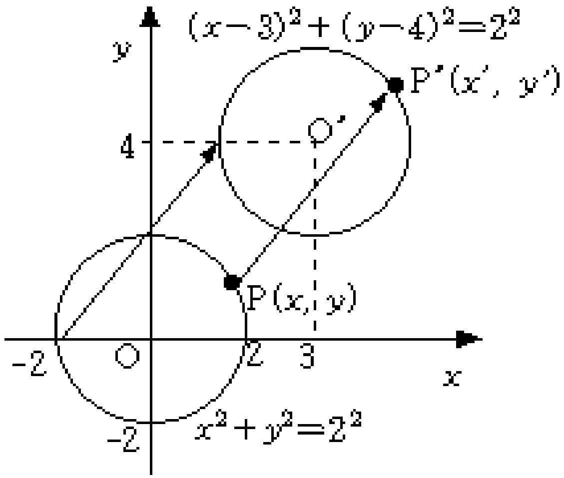
$$x^2 + 3x - 4 = 0$$
$$(x+4)(x-1) = 0$$
$$x = -4,\ 1$$

따라서 x절편은 $-4, 1$이다. 그리고 $x=0$이라 하면 $y=-4$이므로 y절편은 -4이다.

도형의 방정식(또는 도형) : 점 (x, y)의 집합은 방정식 f(x,y) = 0의 그래프이고
이 그래프의 방정식을 도형이라 한다.

직선 $x - 2y + 1 = 0$
원 $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$

도형의 평행이동
도형 $f(x, y)=0$을 x축의 방향으로 a, y축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 도형의 방정식은 $f(x-a, y-b)=0$



도형의 대칭이동

도형 $f(x,\ y)=0$을

(1) x축에 대하여 대칭이동한 도형은 $f(x,\ -y)=0$

(2) y축에 대하여 대칭이동한 도형은 $f(-x,\ y)=0$

(3) $y=x$에 대하여 대칭이동한 도형은 $f(y,\ x)=0$

(4) 원점에 대하여 대칭이동한 도형은 $f(-x,\ -y)=0$

함수 f 가 정의역의 모든 x에 대하여

$f(-x)=f(x)$이면 **우함수** (even function)

$f(-x)=-f(x)$이면 **기함수** (odd function)

우함수는 x에서의 함수값과 -x에서의 함수값이 같다 → y축에 대칭
기함수는 x에서의 함수값과 -x에서의 함수값의 부호가 반대 → 원점에 대칭

$$y=x^2$$

$$y=x$$

예제 2 다음을 증명하라.

(1) f 가 우함수이고 g가 기함수이면 fg는 기함수이다.

(2) f 와 g가 기함수이면 $f+g$는 기함수이고 fg는 우함수이다.

(3) f 와 g가 우함수이면 $f+g$와 fg는 우함수이다.

[풀이] (1) $(fg)(-x) = f(-x)g(-x)$

$$= f(x)(-g(x))$$

$$= -f(x)g(x)$$

$$= -(fg)(x)$$

(2) $(f+g)(-x) = f(-x) + g(-x)$

$$= -f(x) - g(x)$$

$$= -(f+g)(x)$$

$$(fg)(-x) = f(-x)g(-x)$$

$$= (-f(x))(-g(x))$$

$$= f(x)g(x)$$

$$= (fg)(x)$$

(3) $(f+g)(-x) = f(-x) + g(-x)$

$$= f(x)g(x)$$

$$= (f+g)(x)$$

$$(fg)(-x) = f(-x)g(-x)$$

$$= f(x)g(x)$$

$$= (fg)(x)$$

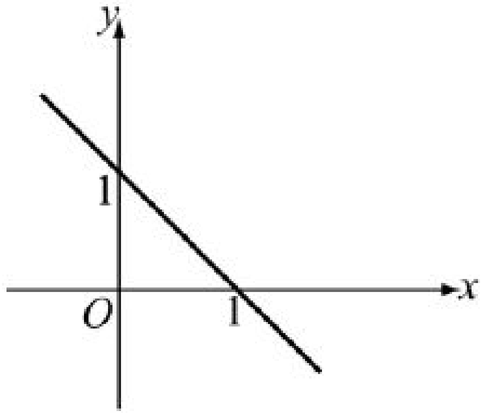
$y = f(x)$, $y = f(|x|)$, $y = |f(x)|$, $|y| = f(x)$, $|y| = f(|x|)$의 그래프 그리기

1. $y = f(|x|)$의 그래프는 $x \geq 0$에서 $y = f(x)$의 그래프를 그리고 $x < 0$에서는 y축에 대하여 대칭이동시킨다.
2. $y = |f(x)|$의 그래프는 $y \geq 0$에서 $y = f(x)$의 그래프를 그리고 $y < 0$인 부분은 x축 위로 꺾어 올린다.
3. $|y| = f(x)$의 그래프는 $y \geq 0$에서 $y = f(x)$의 그래프를 그리고 $y < 0$에서는 x축에 대하여 대칭이동시킨다.
4. $|y| = f(|x|)$의 그래프는 $x \geq 0$, $y \geq 0$에서 $y = f(x)$의 그래프를 그리고 x축과 y축에 대하여 대칭이동시킨다.

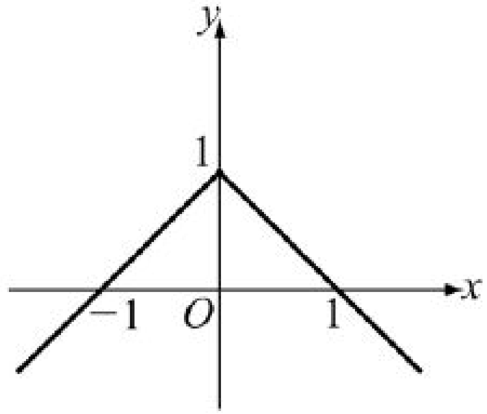
$y = -x + 1$

$y = f(x)$, $y = f(|x|)$, $y = |f(x)|$, $|y| = f(x)$, $|y| = f(|x|)$의 그래프를 그려라.

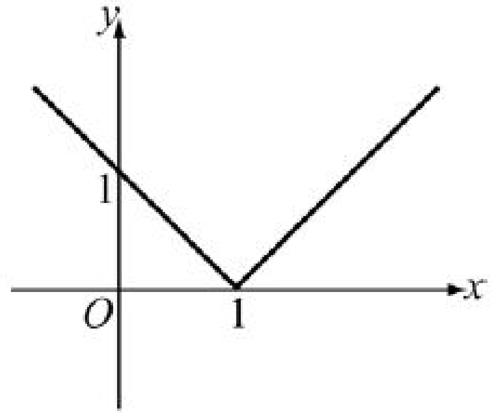
y = f(x), y = f(|x|), y = |f(x)|, | y | = f(x), | y | = f(|x|)의 그래프를 그려라.



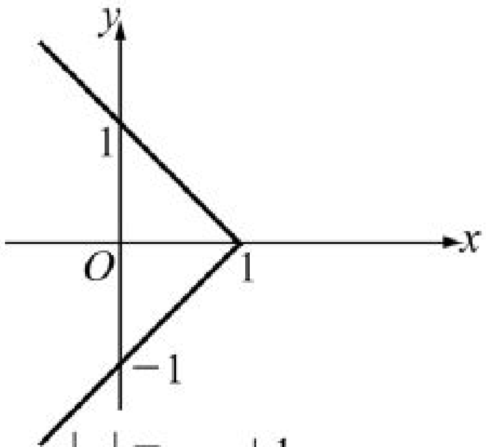
$y = -x + 1$



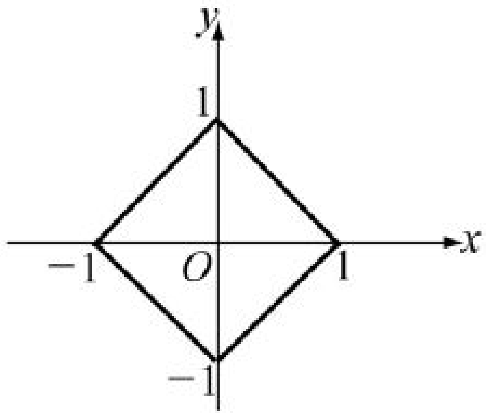
$y = -|x| + 1$



$y = |-x + 1|$



$|y| = -x + 1$



$|y| = -|x| + 1$

5.4 & 5.5

다항함수 $y = x$

유리함수 $y = 1/x$

무리함수 $y = \sqrt{x}$

5.4 다항함수

함수 y = f(x)에서 f(x)가 x에 대한 다항식일 때

$y = 2x - 3$은 일차함수

$y = x^2 - x + 4$는 이차함수

$y = x^3 + x - 1$은 삼차함수

$f(x) = c$(c는 상수).

이차함수의 그래프

- $y = ax^2$, $a > 0$ → 아래로 볼록한 포물선
  $y = ax^2$, $a < 0$ → 위로 볼록한 포물선

: $y = ax^2$ 그래프를 x축으로 m만큼, y축으로 n만큼 평행이동
→ $y = a(x-m)^2 + n$

: 이차함수 $y = ax^2 + bx + c\ (a \neq 0)$를 완전제곱식을 이용하여 변형하면

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

이므로, 그 그래프는 $y = ax^2$의 그래프를

x축의 방향으로 $-\dfrac{b}{2a}$

y축의 방향으로 $-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$

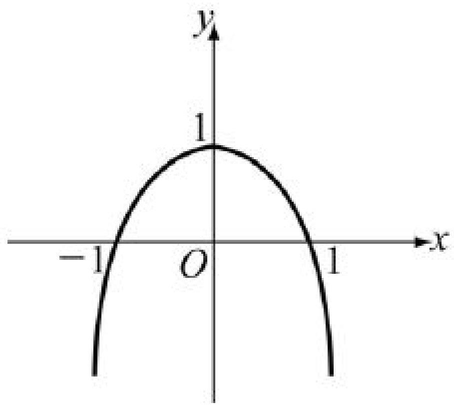
축의 방정식이 $x = -\dfrac{b}{2a}$

꼭지점의 좌표가 $\left(-\dfrac{b}{2a},\ -\dfrac{b^2-4ac}{4a}\right)$

함수의 최대값 최소값 : 어떤 함수의 치역에 속하는 값 중에서
가장 큰 값을 그 함수의 최대값,
가장 작은 값을 최소값이라 한다.

실수 전체의 집합 $\mathbb{R}$ 에서 $\mathbb{R}$ 로의 이차함수

$$f(x) = -x^2 + 1$$



치역은 $\{y \mid y \leq 1\}$ 이다.

이 때, 치역의 원소 중 가장 큰 값은 1이다.

정의역이 실수 전체의 집합 일 때, 함수의 최대값은 1

정의역이 {0≤ x≤1}일 때, 함수의 최대는 1, 최소는 0

예제 1 정의역이 $\{0 \le x \le 5\}$일 때, 이차함수 $y = x^2 - 4x + 3$의 최대값과 최소값을 구하여라.

[풀이] 주어진 식을 변형하면

$$y = -4x^2 - 4x + 3 = (x-2)^2 - 1$$

따라서 이 함수의 그래프는 $(2,\ -1)$을 꼭지점으로 하는 아래로 볼록한 포물선이고, 주어진 정의역에서는 포물선에서 두 점 $(0,\ 3)$, $(5,\ 8)$ 사이의 부분이다.

따라서 구하는 최대값은 $x=5$일 때 8이고, 최소값은 $x=2$일 때 -1이다. $\cdots$ ○

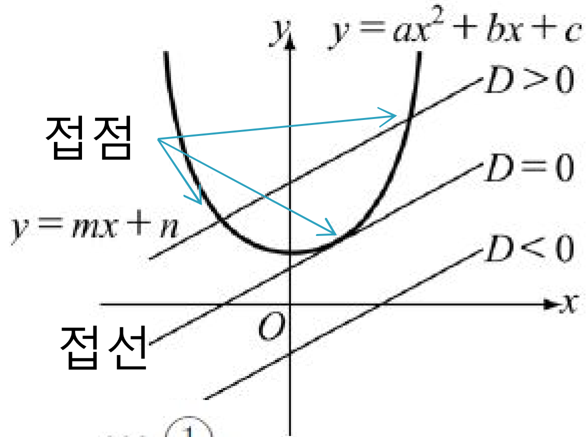
참고로, 예제 1에서, 정의역이 실수 전체의 집합일 때에는 최대값은 없고, 최소값은 $x=2$일 때 -1이다.

2차 함수의 그래프와 직선의 위치 관계

(i) $D>0 \Leftrightarrow$ 서로 다른 두 점에서 만난다.

(ii) $D=0 \Leftrightarrow$ 한 점에서 만난다.

(iii) $D<0 \Leftrightarrow$ 만나지 않는다.



$$y=ax^2+bx+c \qquad \cdots ①$$

$$y=mx+n \qquad \cdots ②$$

②를 ①에 대입하여 y를 소거하면

$$ax^2+bx+c=mx+n$$

즉,

$$ax^2+(b-m)x+(c-n)=0 \qquad \cdots ③$$

이 이차방정식 ③의 판별식을 D라고 하면

$$D=(b-m)^2-4a(c-n)$$

이차방정식의 근의 판별

계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+2b'x+c=0(a\neq 0)$에서 판별식을 $D=b^2-4ac$라고 하면

① $D>0 \Leftrightarrow$ 서로 다른 두 실근을 갖는다.

② $D=0 \Leftrightarrow$ 중근을 갖는다.

③ $D<0 \Leftrightarrow$ 서로 다른 두 허근을 갖는다.

예제 2 이차함수 $y=-x^2+3x-k$의 그래프가 직선 $y=x+2$에 접하도록 실수 k의 값을 정하여라.

예제 2 이차함수 $y = -x^2 + 3x - k$의 그래프가 직선 $y = x + 2$에 접하도록 실수 k의 값을 정하여라.

[풀이] 주어진 이차함수와 직선의 방정식에서 y를 소거하면

$$-x^2 + 3x - k = x + 2$$

$$\therefore x^2 - 2x + (k+2) = 0 \qquad \cdots ①$$

직선이 이차함수의 그래프에 접하려면, 방정식 ①이 중근을 가져야 한다. 따라서

$$\frac{D}{4} = (-1)^2 - (k+2) = 0$$

$$\therefore k = -1 \qquad \cdots \circ$$

삼차함수의 그래프

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

a>0, 오른쪽 위로 올라가는 모양
a<0, 오른쪽 아래로 내려가는 모양

삼차함수를 인수분해 했을 때

$$y = a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma),\ (\alpha < \beta < \gamma)$$

$$y = a(x-\alpha)^2(x-\beta),\ (\alpha < \beta)$$

$$y = a(x-\alpha)^3$$

a>0일 때 그래프를 그려라.

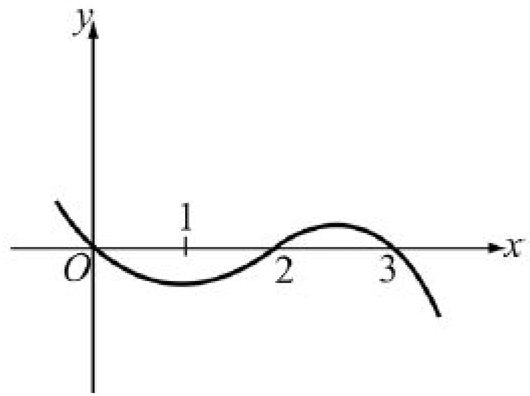
예제 3 다음 삼차함수의 그래프를 그려라.

(1) $y=-x^3+5x^2-6x$ (2) $y=x^3-2x^2-4x+8$

[풀이] (1) 인수분해하면

$$y = -x(x^2 - 5x + 6) = -x(x-2)(x-3)$$

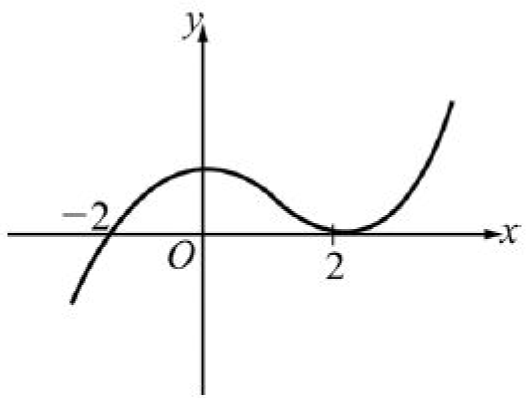
이므로 그래프는 다음과 같다.



(2) 인수분해하면

$$y = x^2(x-2) - 4(x-2) = (x-2)(x^2-4) = (x-2)^2(x+2)$$

이므로 그래프는 다음과 같다.



$\cdots$ ㅇ

예제 4 다음 부등식의 해를 구하여라.

(1) $-x^3+5x^2-6x \geq 0$ (2) $x^3-2x^2-4x+8>0$

[풀이] (1) 예제 3. (1)의 그래프에서 $y \geq 0$인 범위를 찾으면

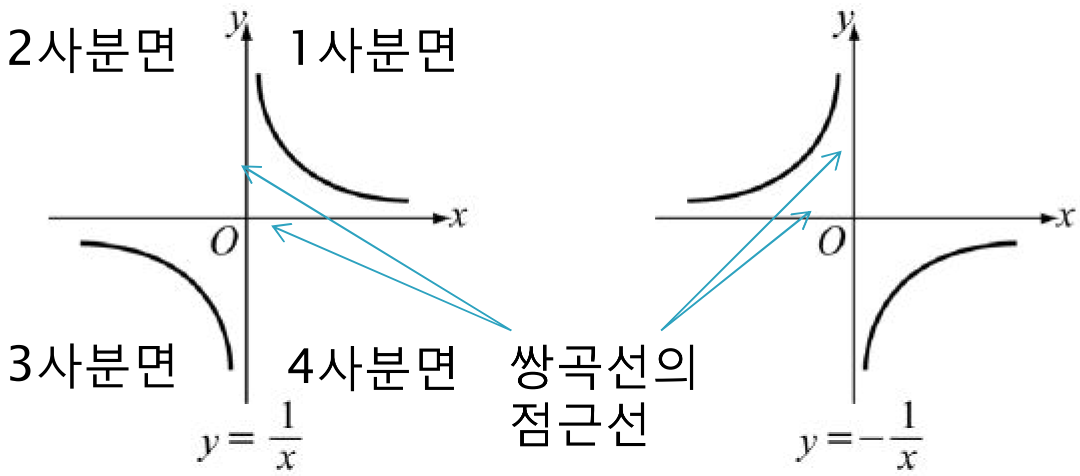
$$x \leq 0 \text{ 또는 } 2 \leq x \leq 3$$

(2) 예제 3. (2)의 그래프에서 $y > 0$인 범위를 찾으면

$$-2 < x < 2 \text{ 또는 } x > 2 \qquad \cdots \circ$$

5.5 유리함수와 무리함수

유리함수 : 함수 y = f(x)에서 f(x)가 x에 대한 유리식일 때.
분모를 0으로 하는 x의 값을 제외한 실수 전체의 집합이 정의역.



함수 y = k/x에서 k>0 이면 그래프는 1사분면과 3사분면을 지나는 쌍곡선이다.
함수 y = k/x에서 k<0 이면 그래프는 2사분면과 4사분면을 지나는 쌍곡선이다.

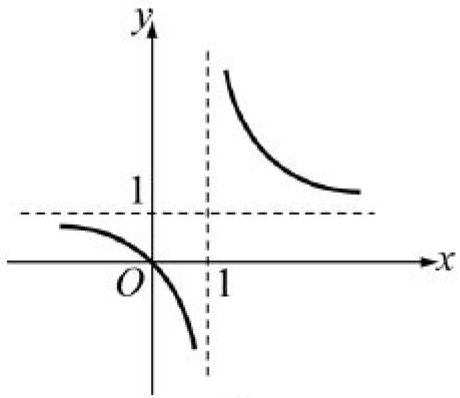
$$y = \frac{k}{x-p} + q$$

y=k/x의 그래프를 x축으로 p만큼, y축으로 q만큼 평행이동
점근선 : x = p, y = q

예제 1 다음 함수의 점근선을 구하고 그래프를 그려라.

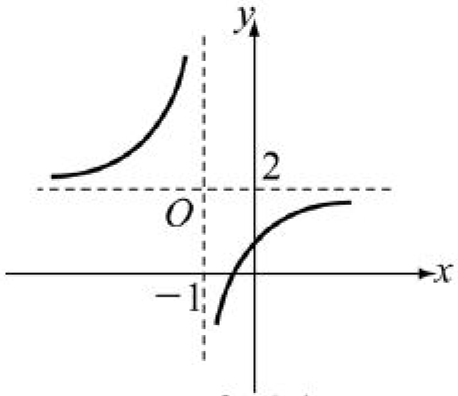
(1) $y = \dfrac{x}{x-1}$ (2) $y = \dfrac{2x+1}{x+1}$

[풀이] (1) $y=\dfrac{x}{x-1}=\dfrac{1}{x-1}+1$이므로 점근선은 $x=1$, $y=1$이고 그래프는 다음과 같다.



$y=\dfrac{x}{x-1}$

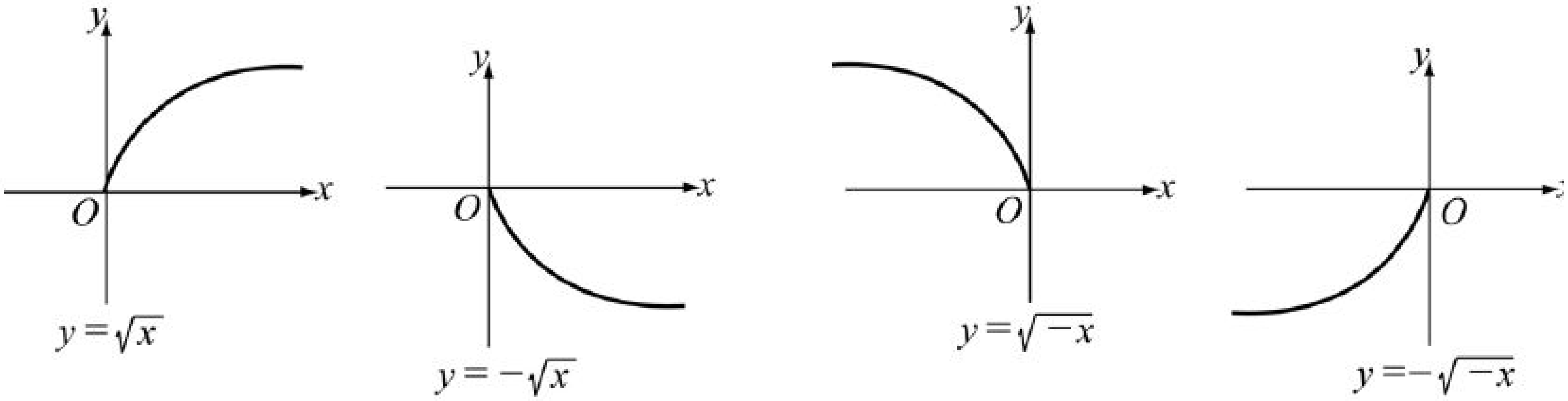
(2) $y=\dfrac{2x+1}{x+1}=-\dfrac{1}{x+1}+2$이므로 점근선은 $x=-1$, $y=2$이고 그래프는 다음과 같다.



$y=\dfrac{2x+1}{x+1}$

…ⓞ

무리함수 : 함수 y = f(x)에서 f(x)가 x에 대한 무리식일 때.
정의역이 명시되어 있지 않을 때에는 근호 안이 음이 아닌 실수 전체의 집합이 정의역.



일반적으로 무리함수 $y=k\sqrt{ax}$의 그래프는 k와 a의 부호에 따라 다음과 같다. 즉

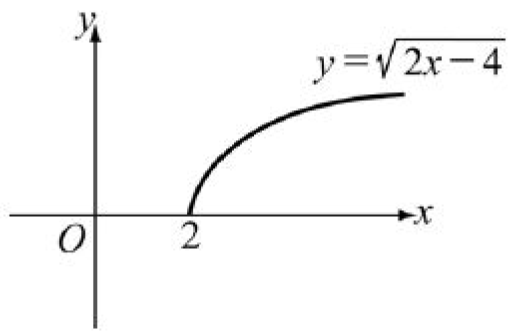
$k>0$, $a>0$일 때 $y=\sqrt{x}$와 같이 1사분면에 있고
$k<0$, $a>0$일 때 $y=-\sqrt{x}$와 같이 4사분면에 있고
$k>0$, $a<0$일 때 $y=\sqrt{-x}$와 같이 2사분면에 있고
$k<0$, $a<0$일 때 $y=-\sqrt{-x}$와 같이 3사분면에 있다.

$y=k\sqrt{a(x-p)}+q$의 그래프는 $y=k\sqrt{ax}$의 그래프를 x축으로 p만큼, y축으로 q만큼 평행이동시킨 것이다.

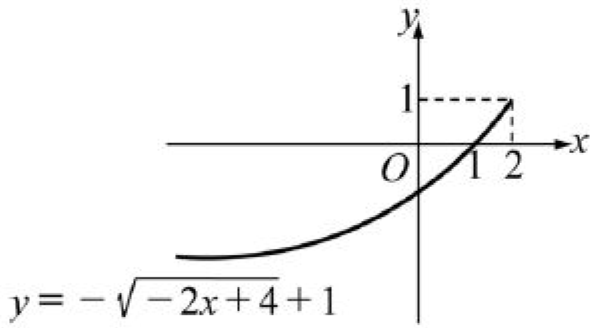
예제 2 다음 함수의 그래프를 그리고, 정의역과 치역을 구하여라.

(1) $y=\sqrt{2x-4}$ (2) $y=-\sqrt{-2x+4}+1$

[풀이] (1) $y=\sqrt{2(x-2)}$이므로 $y=\sqrt{2x}$의 그래프를 x축으로 2만큼 평행이동한 것이므로 그래프는 다음과 같다. 정의역은 $x \geq 2$이고 치역은 $y \geq 0$이다.



(2) $y=-\sqrt{-2(x-2)}+1$이므로 $y=-\sqrt{-2x}$의 그래프를 x축으로 2만큼, y축으로 1만큼 평행이동한 것이므로 그래프는 다음과 같다. 정의역은 $x \le 2$이고 치역은 $y \le 1$이다.



… o