4장 항복조건

- 여러 가지 조합 응력상태에서 탄성변형의 한계, 즉 항복 개시에 관한 가설을 항복조건(yield criterion)이라 함. → 소성변형이 발생되는 지 여부 판단

- 재료가 등방성을 유지하면, 소성조건(항복조건) → 오직 3개의 주응력의 크기에만 의존하여 방향에는 무관함 ⇒ Stress invariant 값으로 표현

＊ 항복은 물성의 한 현상이므로
설정되는 좌표계에 무관

$$g_1(J_1, J_2, J_3) = 0$$: 일반적인 항복조건

여기서, J_1, J_2, J_3 : 응력불변량

- 정수압 응력 → 소성변형에 기여를 하지 못함(편차응력 성분을 뺀 형태)

$J_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \quad \leftarrow \quad J_1{}' = \sigma_1 - \sigma_m + \sigma_2 - \sigma_m + \sigma_3 - \sigma_m$

$\rightarrow J_1{}' = 0 \qquad\qquad = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 - 3\sigma_m$

$\qquad\qquad\qquad = 0$

$$J_2{}' = -\sigma_1{}'\sigma_2{}' - \sigma_2{}'\sigma_3{}' - \sigma_3{}'\sigma_1{}', \quad J_3{}' = \sigma_1{}'\sigma_2{}'\sigma_3{}'$$

$$\therefore g_2(J_2{}', J_3{}') = 0 \qquad (J_3{}' = (2J_1^3 + 9J_1J_2 + 27J_3)/27)$$

- $J_3{}'$는 인장, 압축에 따라 부호가 바뀜
→ 항복조건의 방향의존성을 배제하려면 $J_3{}'$의 짝수 승의 차수만 포함
(인장, 압축조건 고려X, Baushinger effect 무시)

＊ $J_2{}'$: 우함수(← $f(x) = f(-x)$) 형태
→ 방향성을 배제한 항복조건식에 적합

4.2 Von Mises 항복조건

- $J_2' < k^2$: 탄성상태
- $J_2' = k^2$: 항복상태

4.3 Tresca 항복조건

- 재료의 전단응력의 최대치가 어떤 일정값(k)에 도달하면 항복이 일어남

$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$이면,

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3), \qquad \sigma_1 - \sigma_3 = contant$$

ex) • 단순인장 : $\sigma_1 = Y, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$

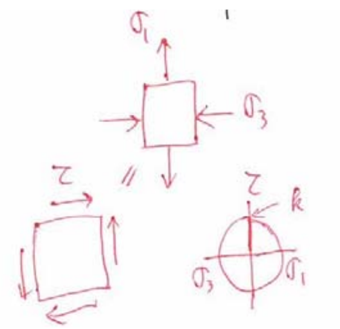
$$Y - 0 = constant$$

$$\therefore \tau_{\max} = \frac{1}{2}Y, \quad \sigma_1 - \sigma_3 = Y \qquad \text{——} \ ①$$

• 순수전단 : $\sigma_1 = -\sigma_3 = k, \ \sigma_2 = 0$

$$k - (-k) = Y \quad \leftarrow \text{from } ①$$

$$2k = Y$$

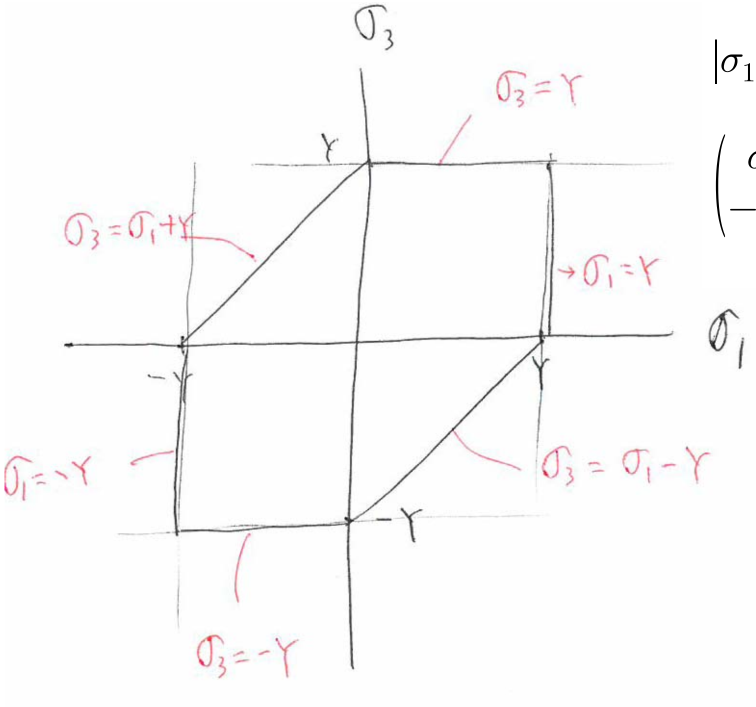


$\therefore k = \frac{1}{2}Y$: 순수전단에서의 항복응력은 단축인장의 항복응력의 1/2 수준

$$\therefore \sigma_1 - \sigma_3 = Y = 2k \qquad \therefore k = \frac{Y}{2}$$

- σ_2 영향을 받지 않고 정수압 응력의 영향을 받지 않음

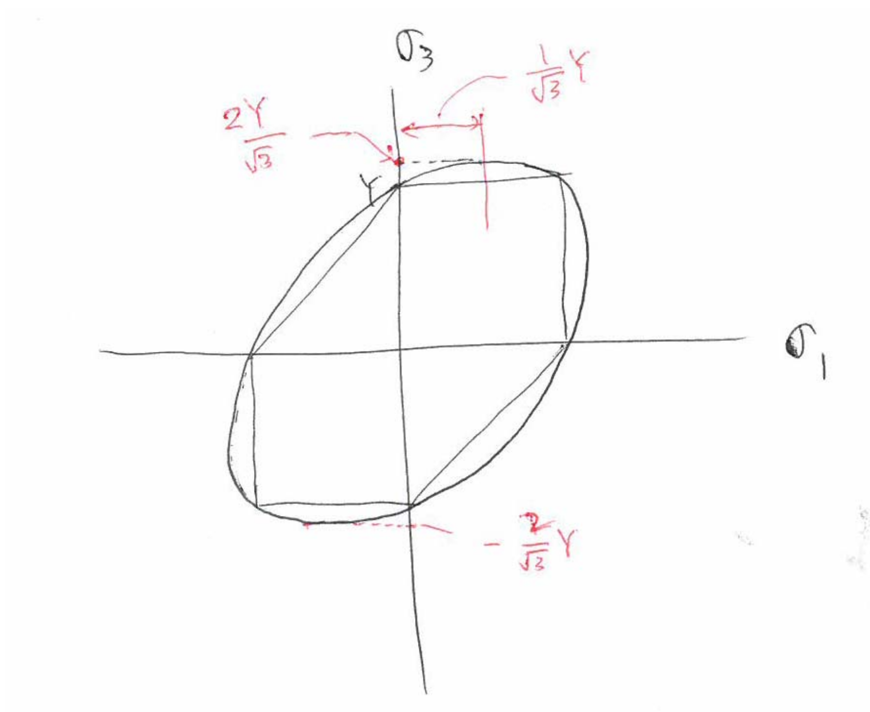
※ Tresca 도해



$$|\sigma_1 - \sigma_3| = Y$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 - \sigma_3 = Y \\ -\sigma_1 + \sigma_3 = Y \end{pmatrix}$$

※ Tresca VS Von Mises



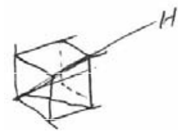
4.4 항복조건의 기하학적 표현

내부: 탄성
외부: 소성

$$\overline{OP_1} = \sigma_1$$

$$\overline{OP_2} = \sigma_2 \qquad \Rightarrow \qquad \overline{OP} = \left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\overline{OP_3} = \sigma_3$$



OP를 OH에 투영하여
만난점: N

OH(3개의 좌표축에 동일한 기울기)의
방향여현: $l = m = n = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

- $\overline{ON} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\sigma_1 + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\sigma_2 + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\sigma_3 = \sqrt{3}\,\sigma_m \qquad \left(\leftarrow \sigma_m = \dfrac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)\right)$

$$\overline{PN}^2 = \overline{OP}^2 - \overline{ON}^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_3\right)^2$$
$$= \frac{1}{3}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\right]$$

- Von Mises의 항복조건 : $(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2Y^2$

따라서 $\overline{PN}^2 = \dfrac{2}{3}Y^2$

$\therefore\ \overline{PN} = \sqrt{\dfrac{2}{3}}\,Y$ $\qquad$ $\overline{PN}$ 을 반경으로 하는 원: yield locus(항복곡선)

- 항복은 $\overline{PN}$ 의 크기에 관계가 되며 $\overline{ON}$ 의 크기와는 무관
  ㄴ 편차응력성분을 가짐 ㄴ 평균수직응력에 비례관계

$$\overline{PN}^2 = \overline{OP}^2 - \overline{ON}^2$$
$$= (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \left(\sqrt{3}\,\sigma_m\right)^2$$
$$= (\sigma_1 - \sigma_m)^2 + (\sigma_2 - \sigma_m)^2 + (\sigma_3 - \sigma_m)^2$$
$$= \sigma_1'^2 + \sigma_2'^2 + \sigma_3'^2$$

⇒ 수학적으로 맞지 않음

$$\Rightarrow \quad = (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - 3\sigma_m^2$$
$$= (\sigma_1^2 - \sigma_m^2) + (\sigma_2^2 - \sigma_m^2) + (\sigma_3^2 - \sigma_m^2)$$
$$= (\sigma_1 - \sigma_m)(\sigma_1 + \sigma_m) + (\sigma_2 - \sigma_m)(\sigma_2 + \sigma_m) + (\sigma_3 - \sigma_m)(\sigma_3 + \sigma_m)$$
$$= \sigma_1'(\sigma_1 + \sigma_m) + \sigma_2'(\sigma_2 + \sigma_m) + \sigma_3'(\sigma_3 + \sigma_m)$$