2.2 완전 미분 방정식

hylee@silla.ac.kr

완전 미분 방정식이란?

- u(x,y)가 평면상의 영역 R 내의 모든 (x,y)에 대하여 $\partial u/\partial x = M(x,y)$, $\partial u/\partial y = N(x,y)$이 함수 u(x,y)를 미분방정식 $M(x,y)dx + N(x,y)dy$ 에 대한 포텐셜 함수라고 부른다.
- 포텐셜함수가 평면상의 어떤 영역 R에서 존재할 때 미분 방정식 $M(x,y)dx + N(x,y)dy=0$ 을 영역 R 에서 완전(exact)미분방정식이라고 부른다.

완전미분방정식의 필요충분조건

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}\quad\left(\because\ \frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{\partial N}{\partial x}\right)$$

완전미분방정식의 해법

Case 1) $M(x,y)=\frac{\partial u}{\partial x}\ \Rightarrow\ u(x,y)=\int M(x,y)dx+k(y)$ (x에 대하여 적분)

$u(x,y)=\int M(x,y)dx+k(y)\ \Rightarrow\ \frac{\partial u}{\partial y}=N(x,y)\ \Rightarrow\ \frac{dk}{dy}$ 를 구함 $\Rightarrow$ $k(y)$ 를 구함

Case 2) $N(x,y)=\frac{\partial u}{\partial y}\ \Rightarrow\ u(x,y)=\int N(x,y)dy+l(x)$ (y에 대하여 적분)

$u(x,y)=\int N(x,y)dy+l(x)\ \Rightarrow\ \frac{\partial u}{\partial x}=M(x,y)\ \Rightarrow\ \frac{dl}{dx}$를 구함 $\Rightarrow$ $l(x)$를 구함

■ Ex. 1 미분방정식 $x^2y^3dx + x^3y^2dy = 0$은 완전미분방정식임을 보여라.

$d(\frac{1}{3}x^3y^3) = x^2y^3dx + x^3y^2dy$ 이기 때문이다.

■ Ex. 2 $\cos(x+y)dx+(3y^2+2y+\cos(x+y))dy=0$을 풀어라.

Step 1 완전미분방정식인지 판별

$$M(x,y)=\cos(x+y) \;\Rightarrow\; \frac{\partial M}{\partial y}=-\sin(x+y)$$

$$N(x,y)=3y^2+2y+\cos(x+y) \;\Rightarrow\; \frac{\partial N}{\partial x}=-\sin(x+y)$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$$ **: 완전미분방정식**

Step 2 미분방정식의 해를 구함

$$u(x,y)=\int M(x,y)dx+k(y)=\int\cos(x+y)dx+k(y)=\sin(x+y)+k(y)$$

$k(y)$를 구하기 위하여

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\cos(x+y)=N(x,y)=3y^2+2y \;\Rightarrow\; \frac{dk}{dy}=3y^2+2y \;\Rightarrow\; k=y^3+y^2+c^*$$

$$\therefore\; u(x,y)=\sin(x+y)+y^3+y^2=c$$

Step 3 검증

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\cos(x+y)+\cos(x+y)y'+3y^2y'+2yy'=0 \;\Rightarrow\; \cos(x+y)+(\cos(x+y)+3y^2 2y)y'=0$$

$$\Rightarrow\; \cos(x+y)dx+(3y^2+2y+\cos(x+y))dy=0$$