1.3 초기값 문제와 해의 존재성

Week3

hylee@silla.ac.kr

● **초기값 문제**(Initial Value Problems)

: 주어진 초기조건을 이용하여 일반해로부터 특수해를 구함

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

■ Ex 1 다음 방정식의 초기값 문제를 풀어라.

$$y' = \frac{dy}{dx} = 3y, \quad y(0) = 5.7$$

Step 1 일반해를 구함(Ex.3에 의하여)

일반해 : $y(x) = ce^{3x}$

Step 2 초기조건 적용 : $y(0) = ce^{0} = c = 5.7$

특수해 : $y(x) = 5.7e^{3x}$

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

■ Ex 2 다음 방정식의 초기값 문제를 풀어라.

$$y' = \frac{dy}{dx} = y, \qquad y(0) = 3$$

Step 1 일반해를 구함

일반해 : $y(x) = ce^x$

Step 2 초기조건 적용 : $y(0) = ce^0 = c = 3$

특수해 : $y(x) = 3e^x$

예제

◎ **Ex 5. 초기값문제** $y' = -2xy, \quad y(0) = 1$ **을 풀어라.**

$$\frac{y'}{y} = -2x \quad \Rightarrow \quad \frac{dy/dx}{y} = -2x \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = -2x\,dx$$ **(변수분리)**

$$\Rightarrow \int \frac{1}{y}\,dy = -\int 2x\,dx + c \quad \Rightarrow \quad \ln|y| = -x^2 + c^*$$ **(적분)**

$$\Rightarrow \quad y = e^{-x^2 + c^*} = ce^{-x^2}$$ **(정리)**

$$y(0) = ce^0 = c = 1$$ **(초기값 적용)**

$$\Rightarrow \quad y = e^{-x^2}$$

• 해의 존재성과 유일성(Existence and Uniqueness of Solutions)

● 초기값 문제의 특수해가 항상 존재하는 것도 아니다.

Ex. $|y'|+|y|=0, \quad y(0)=1$ $\Rightarrow$ 만족하는 해가 없다.

$y'=2x, \quad y(0)=1$ $\Rightarrow$ 만족하는 해가 하나 있다. $\Rightarrow$ $y=x^2+1$

$xy'=y-1, \quad y(0)=1$ $\Rightarrow$ 만족하는 해가 무수히 많다. $\Rightarrow$ $y=1+cx$

- 존재성의 문제

어떤 조건하에서 초기값 문제가 적어도 하나의 해를 갖는가?

- 유일성의 문제

어떤 조건하에서 주어진 초기값 문제가 많아야 한 개의 해를 갖는가?

존재정리

초기값 문제 $y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$에서

$|x - x_0| < a, \quad |y - y_0| < b$로 정의되는 사각형내의 모든 점 (x, y)에서

- $f(x, y)$ 가 연속이고
- $|f(x, y)| \leq K$ (발산하지 않음) 이면

$\Rightarrow \quad \therefore$ 최소한 하나 이상의 해를 갖는다.

유일성정리

초기값 문제 $y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$ 에서

$|x - x_0| < a, \quad |y - y_0| < b$로 정의되는 사각형내의 모든 점 (x, y)에서

- $f(x, y), \quad \dfrac{\partial f}{\partial y}$ 가 연속이고
- $|f| \le K, \quad \left|\dfrac{\partial f}{\partial y}\right| \le M$ (발산하지 않음) 이면

$\Rightarrow$ $\therefore$ 최대 하나의 해를 갖는다. 해의 존재성 정리와 연결하여

생각하면 이 초기값 문제는 정확하게 하나의 해를 갖게 된다.