2.3 적분인자

Week6

hylee@silla.ac.kr

완전미분방정식 형태로 변환 (Reduction to Exact Form)

: 완전미분방정식이 아닌 방정식에, 어떤 함수 $F(x,y)$를 곱하여 완전미분방정식을 만듬

적분인자 (Integrating Factors)

: 완전미분방정식을 만드는 함수 $F(x,y)$

Ex. 1 $-ydx+xdy=0$은 완전미분방정식이 아니다.

$$\because\quad M=-y,\quad N=x \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial M}{\partial y}=-1,\quad \frac{\partial N}{\partial x}=1 \quad\Rightarrow\quad \text{not exact}$$

미분방정식의 양변에 $1/x^2$(적분인자)을 곱하면 $-\frac{y}{x^2}dx+\frac{1}{x}dy=0$

$$M=-\frac{y}{x^2},\quad N=\frac{1}{x} \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial M}{\partial y}=-\frac{1}{x^2},\quad \frac{\partial N}{\partial x}=-\frac{1}{x^2} \quad\Rightarrow\quad \text{exact}$$

적분인자 $F(x,y)$ 를 구하는 방법

$FPdx + FQdy = 0$ (완전미분방정식)

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial y}(FP) = \frac{\partial}{\partial x}(FQ) \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y}P + F\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial x}P + F\frac{\partial Q}{\partial x}$$

- 완전미분방정식을 만드는 $F(x,y)$를 찾는 것은 매우 어렵다.
- 하나의 변수(x 또는 y)에만 의존하는 적분인자를 구하는 것이 쉽다.

■ Ex. 2 다음의 미분방정식의 적분인자를 찾고 초기값 문제를 풀어라.

$$\left(e^{x+y} + ye^{y}\right)dx + \left(xe^{y} - 1\right)dy = 0, \quad y(0) = -1$$

Step 1 완전미분방정식인지 판별

$$P(x,y) = e^{x+y} + ye^{y} \;\Rightarrow\; \frac{\partial P}{\partial y} = e^{x+y} + e^{y} + ye^{y}$$

$$Q(x,y) = xe^{y} - 1 \;\Rightarrow\; \frac{\partial Q}{\partial x} = e^{y}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$$: **완전미분방정식이 아님**

Step 2 적분인자 구하기

$$R = \frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = \frac{1}{xe^{y} - 1}\left(e^{x+y} + e^{y} + ye^{y} - e^{y}\right) = \frac{1}{xe^{y} - 1}\left(e^{x+y} + ye^{y}\right)$$ $\Rightarrow$ **적용불가능**

$$R^{*} = \frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = \frac{1}{e^{x+y} + ye^{y}}\left(e^{y} - e^{x+y} - e^{y} - ye^{y}\right) = -1 \;\Rightarrow\; F^{*}(y) = e^{-y}$$

$$\therefore \; \left(e^{x} + y\right)dx + \left(x - e^{-y}\right)dy = 0$$

검증 $$\frac{\partial}{\partial y}\left(e^{x} + y\right) = 1 = \frac{\partial}{\partial x}\left(x - e^{-y}\right)$$ $\Rightarrow$ **완전미분방정식**

Step 3 일반해 구하기

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x + y \quad \Rightarrow \quad u = \int \left(e^x + y\right) dx = e^x + xy + k(y)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x + k'(y) = x - e^{-y} \quad \Rightarrow \quad k'(y) = -e^{-y} \quad \Rightarrow \quad k(y) = e^{-y}$$

일반해 : $u(x, y) = e^x + xy + e^{-y} = c$

Step 4 특수해 구하기

초기조건 적용 $y(0) = -1 \quad \Rightarrow \quad u(0, -1) = e^0 + 0 + e = 3.72$

특수해 : $u(x, y) = e^x + xy + e^{-y} = 3.72$