2.2. 동차형

어떤 실수 n에 대하여 $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$ 이 성립할 때 $f(x, y)$를 n차의 **동차함수**(homogeneous function)라 한다. 동차함수란 각 항의 총 차수가 같음을 뜻한다.

$f(x, y)$가 n의 동차함수이면

(1) $$f(x, y) = x^n f\left(1, \frac{y}{x}\right), \qquad f(x, y) = y^n f\left(\frac{x}{y}, 1\right)$$

로 쓸 수 있고 여기서 $f\left(1, \frac{y}{x}\right)$ 와 $f\left(\frac{x}{y}, 1\right)$은 모두 0차이다.

미분방정식,

(2) $$M(x, y)dx + N(x, y)dx = 0$$

에서 $M(x, y)$와 $N(x, y)$가 성질(동차성),

$$M(tx, ty) = t^n M(x, y), \qquad N(tx, ty) = t^n N(x, y)$$

를 만족할 때 (2)는 **동차계수**(homogeneous coefficents)를 갖는다.

또는 **동차방정식**(homogeneous equation)이라 한다. 동차미분방정식은 간단한 대수적 치환에 의하여 반드시 변수분리형의 방정식으로 변형될 수 있다. 즉, (2) 의 M 와 N 이 같은 차수의 동차계수이면 미분방정식 (2)는 치환 $y = ux$ 또는 $y = vy$를 실시함으로써 변수분리형으로 변형될 수 있다. 여기서 u 와 v는 새로운 종속변수이다. 만일 치환 $y = ux$ 를 실시한다면 $dy = u\,dx + x\,du$ 이므로 미분방정식 (2)는

$$M(x, ux)dx + N(x, ux)[u\,dx + x\,du] = 0$$

으로 된다. (1)에서 주어진 동차성에 의하여

$$x^n M(1, u)dx + x^n N(1, u)[u\,dx + x\,du] = 0$$
$$[M(1, u) + uN(1, u)]dx + xN(1, u)du = 0$$

으로 쓸 수 있고 변수분리에 의하여

$$\frac{dx}{x}+\frac{N(1,\ u)du}{M(1,\ u)+uN(1,\ u)}=0$$

으로 된다. (2)에 치환 $x=vy$ 를 실시하여도 또한 변수분리형의 방정식으로 될 수 있다는 증명은 독자에게 맡기겠다.

예제 1. $(x^2+y^2)dx+(x^2-xy)dy=0$ 을 풀어라.

해답 $M(x,y)$와 $N(x,\ y)$는 모두 2차의 동차이다. 치환 $y=ux$를 실시하면,

$$\begin{aligned}(x^2+u^2x^2)dx+(x^2-ux^2)[u\ dx+x\ du] &= 0\\ x^2(1+u)dx+x^3(1-u)du &= 0\\ \frac{1-u}{1+u}du+\frac{dx}{x} &= 0\\ \left[-1+\frac{2}{1+u}\right]du+\frac{dx}{x} &= 0\\ -u+2\log|1+u|+\log|x|+\log|c| &= 0\\ -\frac{y}{x}+2\log\left|1+\frac{y}{x}\right|+\log|x|+\log|c| &= 0\end{aligned}$$

대수의 성질을 사용하면 다음과 같이 간단히 된다.

$$\therefore c(x+y)^2=xe^{y/x}\ . \qquad \square$$

예제 2. $2x^3y\ dx+(x^4+y^4)dy=0$ 을 풀어라.

해답. 각 계수는 4차의 동차함수이다. dx의 계수 M 이 dy 의 계수 N 보다 다소 간단하므로 치환 $x=vy$ 를 택한다. 이것을 대입 하여 간단히 하면

$$\begin{aligned}2v^3y^4[v\ dy+y\ dv]+(v^4y^4+y^4)dy &= 0\\ \frac{2v^3dv}{3v^4+1}+\frac{dy}{y} &= 0\end{aligned}$$

적분하여

$$\frac{1}{6}\log(3v^4+1)+\log|y|=\log|c_1|$$

$$\therefore\ 3x^4y^2+y^6=c$$

만일에 치환 $y=ux$ 를 실시했다면

$$\frac{dx}{x}+\frac{u^4+1}{u^5+3u}\,du=0$$

으로 되는데 위 식의 둘째 적분은 전자의 경우보다 쉽지 않을 것이다. □

미분방정식 (2)를 $\frac{dy}{dx}=f(x,\ y)$형으로 고쳐 쓰면

$$f(x,\ y)=-\frac{M(x,\ y)}{N(x,\ y)}$$

로 된다. 함수 $f(x,\ y)$ 는 M 과 N 이 n차의 동차일 때 반드시 0차의 동차이어야 한다. (1)을 사용하면

$$f(x,\ y)=-\frac{x^nM(1,\frac{y}{x})}{x^nN(1,\frac{y}{x})}=-\frac{M(1,\frac{y}{x})}{N(1,\frac{y}{x})}$$

로 되므로 동차 미분방정식은

(3) $$\frac{dy}{dx}=F\left(\frac{y}{x}\right)$$

로 표현될 수 있다.

여기서 $y=xu$ 라 두고 양변을 x 로 미분하면

$$y'=u+xu'$$

이므로, (3)은

$$xu'=f(u)-u.$$

따라서, 변수분리형의 미분방정식

$$u' = \frac{1}{x}\{f(u) - u\}$$

으로 변형된다. 따라서 변수분리형으로부터

$$\int \frac{du}{F(u) - u} = \log x + c$$

또는

$$x = c \quad \exp\left\{\int \frac{du}{F(u) - u}\right\} \qquad (c \text{ 는 임의상수}).$$

또 $\varphi(u) = \int \frac{du}{f(u) - u}$ 라 두면

$$x = ce^{\varphi(y/z)} \qquad (c \text{ 는 임의상수}).$$

이 된다. $f(u) - u = 0$ 의 근 u_0가 존재하면, 명백히 $y = u_0 x$ 도 (3)의 해이다.

예제 3. 초기치 문제 $x\frac{dy}{dx} = y + xe^{y/x}$;$y(1) = 1$을 풀어라.

해답. 주어진 방정식을

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + e^{y/x}$$

으로 고쳐 쓰면 우변의 함수는 0차의 동차임을 알 수 있다. 이 함수의 형태에서 $u = y/x$ 인 치환이 고려된다. 곱의 미분법칙에 의하여 $y = ux$ 를 미분하여 대입하면

$$u + x\frac{du}{dx} = u + e^u$$
$$e^{-u}du = dx/x$$

로 된다. 따라서

$$-e^{-u}+c=\log|x|$$
$$-e^{-y/x}+c=\log|x|$$

$x=1$일 때 $y=1$이므로 $-e^{-1}+c=0$ 즉, $c=e^{-1}$, 따라서 초기치 문제의 해는 $\therefore\ e^{-1}-e^{-y/x}=\log|x|$. □

연습문제 2.2.

1.다음 미분방정식을 풀어라.

(1) $yy'=2y-x$ (답) $y=x+Ce^{x/(y-x)}$, $(C=e^{c'})$

(2) $(x+y)+(y-x)y'=0$ (답) $x^2+y^2=Ce^{2\tan^{-1}(y/x)}$, $(C=e^{c'})$

(3) $15x+11y+(9x+5y)y'=0$ (답) $(y+x)^2(y+3x)^3=C$

(4) $(2x^2+3y^2)y-(x^2+2y^2)xy'=0$ (답) $y\sqrt{x^2+y^2}=Cx^3$

(5) $(x^2-3y^2)x+(3x^2-y^2)yy'=0$ (답) $y^2+x^2=C\sqrt{|y^2-x^2|}$

(6) $x\ dy-y\ dx=(x^2+y^2)dx$ (답) $y=x\ \tan(x+C)$

(7) $(x^2+xy)y'=y^2$ (답) $y=Ce^{-y/x}$ $(C=e^{c'})$

(8) $y^2+mx^2+nxyy'=0$ (답) $x^{2(n+1)/n}\{(n+1)u^2+m\}=C$

(9) $2xy+(y^2-3x^2)y'=0$ (답) $y^3=C(y^2-x^2)$

(10) $xyy'-y^2=(x-y)^2e^{y/x}$ (답) $(x-y)(\log x+C)=xe^{-y/x}$

2. 미분방정식

$$y'=f\left(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma}\right)\quad (a, b, c,\ \alpha,\beta,\gamma \text{ 는 상수})$$

는적당한 변수변환으로 풀 수 있다.

$a\beta - b\alpha \neq 0$ 이면 연립방정식

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ \alpha x + \beta y + \gamma = 0 \end{cases}$$

의 해 (x_0, y_0)가 유일하게 존재한다. 따라서 $x = X + x_0$, $y = Y + y_0$로

$$\frac{dY}{dX} = f\left(\frac{aX + bY}{\alpha X + \beta Y}\right)$$

이 되고 이것은 동차형이다.

$a\beta - b\alpha = 0$이면, $\alpha = ka$, $\beta = kb$ 이므로 변수변환 $u = ax + by$ 으로

$$f\left(\frac{ax + by + c}{\alpha x + \beta y + \gamma}\right) = f\left(\frac{u + c}{ku + \gamma}\right).$$

그러므로

$$u' = a + bf\left(\frac{u + c}{ku + \gamma}\right)$$

가 되어 변수분리형이 됨을 알 수 있다. 이것을 이용하여 다음을 풀어라

(1) $(x - 2y + 4)dx + (2x - y + 2)y = 0$ (답) $(x + y - 2)^2 = c(x - y + 2)$

(2) $(2x + 3y - 1)dx - 4(x + 1)y = 0$ (답) $(y - 2x - 3)^4 = c(x + 1)^3$

(3) $(2x + y)dx - (4x + 2y - 1)y = 0$

(답) $5x - 10y + \log(10x + 5y - 2) = c$

(4) $(2x - 3y + 2)dx + 3(4x - 6y - 1)y = 0$ (답) $x + 6y + \log(2x - 3y) = c$