3장 고계 미분방정식

Week9

hylee@silla.ac.kr

3.1 미분연산자

3.1 미분연산자(Differential Operators)

- 연산자(Operators) : 함수를 다른 함수로 변형하는 변환을 의미
- 연산자법(Operational Calculus) : 연산자와 그에 해당하는 기법을 가르친다.
- 미분연산자(Differential Operator) : $Dy = y'$
- 항등연산자(Identity Opterator) : $Iy = y$
- 2계 미분연산자의 도입

$$L = P(D) = D^2 + aD + bI \quad \Rightarrow \quad Ly = P(D)y = y'' + ay' + by$$

3.2 함수의 선형독립성과 종속성

- **일차독립(Linearly Independent)**

  : $k_1y_1(x)+\cdots+k_ny_n(x)=0$ 일 때 , n개의 함수 $y_1(x),\ \cdots,\ y_n(x)$에 대해 이들 함수가 정의된 어떤 구간에서 방정식이 모두 $k_1=\cdots=k_n=0$이 됨을 의미

- **일차종속(Linearly Dependent)**

  : 방정식 $k_1y_1(x)+\cdots+k_ny_n(x)=0$이 구간에서 적어도 하나의 0이 아닌 상수 $k_1,\ \cdots,\ k_n$에 대하여도 성립함

- **초기값 문제**

  : 제차 선형상미분방정식과 n개의 초기조건으로 구성

- **초기값 문제에 대한 존재성과 유일성 정리**

  $p_0(x),\ \cdots,\ p_{n-1}(x)$가 어떤 열린 구간 I에서 연속함수이고, x_0가 구간 I 내에 있다면, 초기값 문제는 구간 I에서 유일한 해를 갖는다

- Wronskian 또는 Wronski 행렬식

$$W(y_1, \cdots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

- 해의 일차종속과 일차독립

상미분방정식의 계수 $p_0(x), \cdots, p_{n-1}(x)$가 어떤 열린 구간 I 에서 연속이라고 가정하자. 구간 I에서 제차 선형상미분방정식의 n개의 해 $y_1(x), \cdots, y_n(x)$가 구간 I 에서 일차종속이 되는 필요충분조건은 그들의 Wronskian이 구간 I내의 어떤 $x = x_0$에서 0이 되는 것이다. 더욱이, $x = x_0$ 에서 $W = 0$이라면, 구간 I 에서 $W \equiv 0$이다. 그러므로, 만약 W가 0이 아닌 x_1이 구간 I내에 존재하면, 구간 I 에서 $y_1(x), \cdots, y_n(x)$는 일차독립이고, 이 해들은 구간 I에서 제차 선형상미분방정식의 해들의 기저를 형성한다.

● 일반해의 존재성

제차 선형상미분방정식의 계수 $p_0(x), \cdots, p_{n-1}(x)$가 어떤 열린 구간 I에서 연속이면, 제차 선형상미분방정식은 구간 I에서 일반해를 갖는다.

● 일반해는 모든 해를 포함한다.

제차 선형상미분방정식이 어떤 열린 구간 I 에서 연속인 계수 $p_0(x), \cdots, p_{n-1}(x)$ 를 갖는다고 하면, 구간 I에서 제차 선형상미분방정식의 모든 해 $y = Y(x)$는

$$Y(x) = C_1 y_1(x) + \cdots + C_n y_n(x)$$

의 형태인데, 여기서 $y_1(x), \cdots, y_n(x)$ 는 구간 I에서 제차 선형상미분방정식의 해의 어떤 기저이고, $C_1, \cdots, C_n$는 적당한 상수이다.