예제 3.10 : 사이펀과 공동현상

15도의 물이 큰 탱크로부터 흘러내리고 있다. 대기압은 101.3kPa(abs)이다.
공동현상이 일어나지 않으면서 사이펀으로 옮길 수 있는 최대 높이 H를 구하여라. (단, 15도 물의 증기압은 1.765kPa(abs))

대기압 끝 탱크

$$\cancel{P_1} + \frac{1}{2}\cancel{\rho V_1^{\,2}} + \gamma z_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho V_2^{\,2} + \gamma z_2$$

자유제트

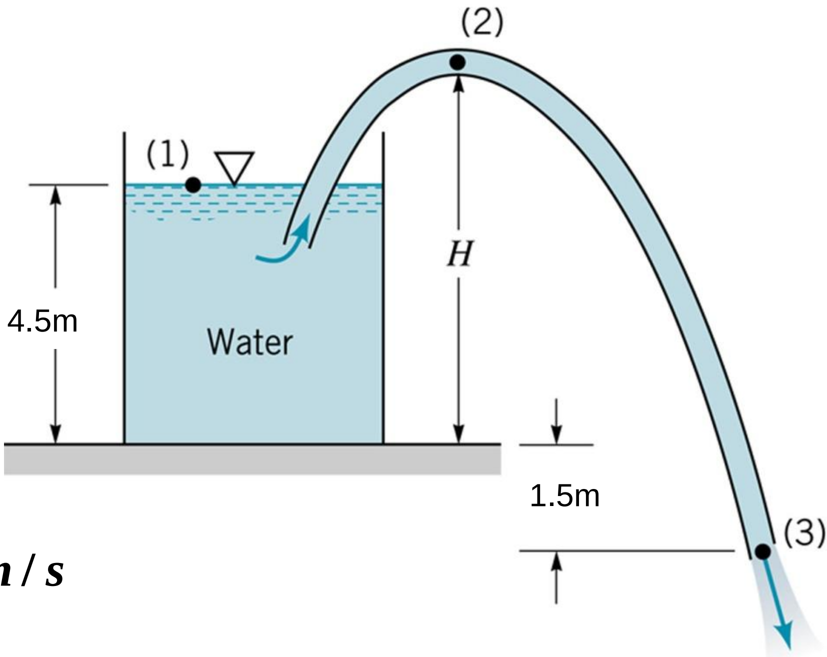
$$= \cancel{P_3} + \frac{1}{2}\rho V_3^{\,2} + \gamma z_3 \quad \textbf{(1)}$$

연속방정식으로부터 $A_2 V_2 = A_3 V_3 \rightarrow V_2 = V_3$

따라서, 식(1)에서 (1), (3)지점에 대하여

$$V_3 = V_2 = \sqrt{2g(z_1 - z_3)}$$

$$= \sqrt{2(9.81m/s^2)(4.5-(-1.5))m} = 10.8m/s$$



또한, 식(1)에서 (1)과 (2)에 대하여

$$P_2 = \gamma(z_1 - z_2) - \frac{1}{2}\rho V_2^{\ 2} \qquad (2)$$

여기서, 공동현상은 (2)점에서 발생한다.

따라서 공동현상이 일어나는 절대압력차는 101.3-1.765=99.535kPa 이므로

이것을 계기압력으로 바꾸면, 0kPa-99.535kPa=-99.535kPa이다.

따라서 이 값을 식(2)에 대입하면

$$-99.535\times10^3\,Pa = (9{,}810N/m^3)(4.5 - H)m - {}^1\!/_2(1{,}000kg/m^3)(10.8m/s)^2$$

결국 $H = 8.7m$ //Answer

◆ 3.6.3 유량측정

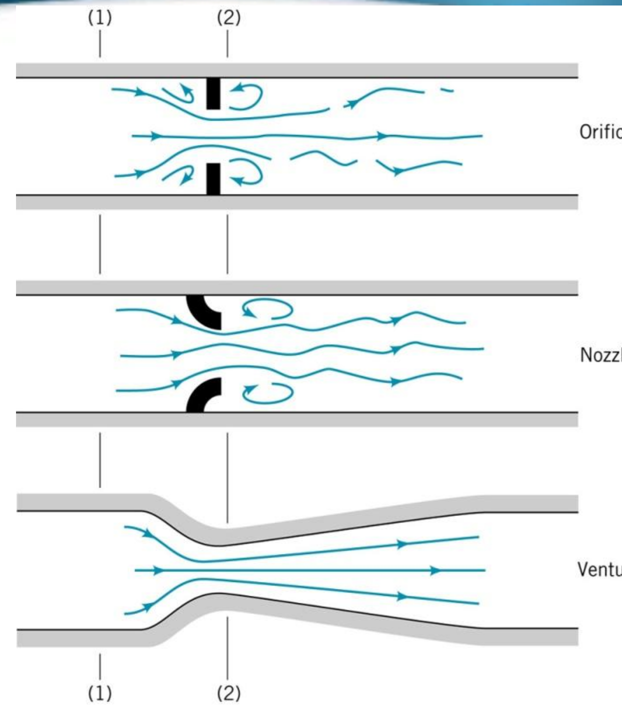
$$P_1 + \frac{1}{2}\rho V_1^{\,2} + \cancel{\gamma z_1} = P_2 + \frac{1}{2}\rho V_2^{\,2} + \cancel{\gamma z_2}$$

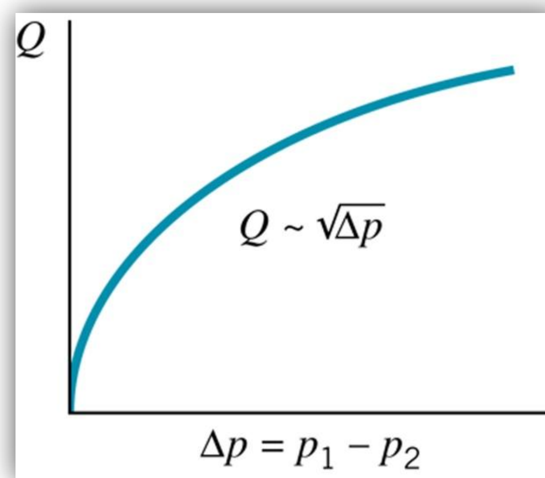
$$Q = A_1 V_1 = A_2 V_2$$

두 식을 결합하면

$$\boxed{Q = A_2 \sqrt{\frac{2(P_1 - P_2)}{\rho[1-(A_2/A_1)^2]}} \approx A_2 \sqrt{\frac{2}{\rho}\Delta P}}$$

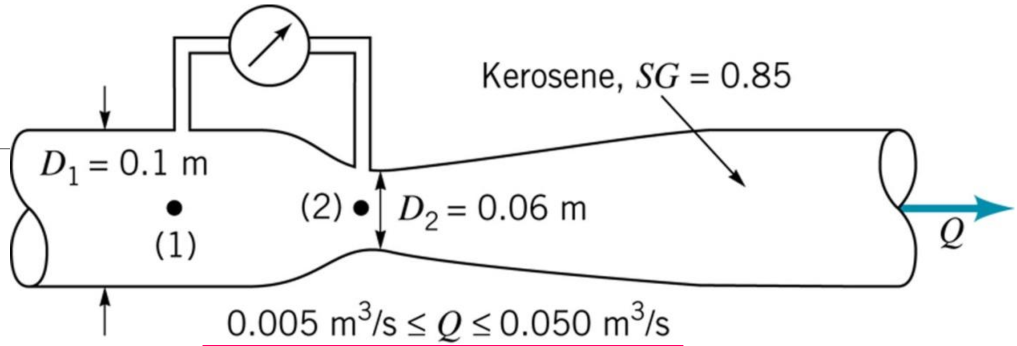
- 위 식은 이론적인 식이고, 실제유량 Q_{actual}은 이론적인 값 보다 적다(1~40%).





예제 3.11 : 벤츄리 유량계

이 유량을 측정하는데 필요한 압력차 P_1-P_2의 범위를 구하여라.



$$P_1 - P_2 = \frac{Q^2\rho[1-(A_2/A_1)^2]}{2A_2^{\ 2}}$$

여기서 $A_2/A_1 = (D_2/D_1)^2 = (0.06m/0.1m)^2 = 0.36$ 이므로

따라서, 최소유량일 때

$$P_1 - P_2 = (0.005\mathrm{m^3/s})^2(0.85\times1000\mathrm{kg/m^3})\frac{(1-0.36^2)}{2[(\pi/4)(0.06\mathrm{m})^2]^2} = 1.16kPa$$ //Answer

최대유량일 때

$$P_1 - P_2 = (0.05\mathrm{m^3/s})^2(0.85\times1000\mathrm{kg/m^3})\frac{(1-0.36^2)}{2[(\pi/4)(0.06\mathrm{m})^2]^2} = 116kPa$$ //Answer

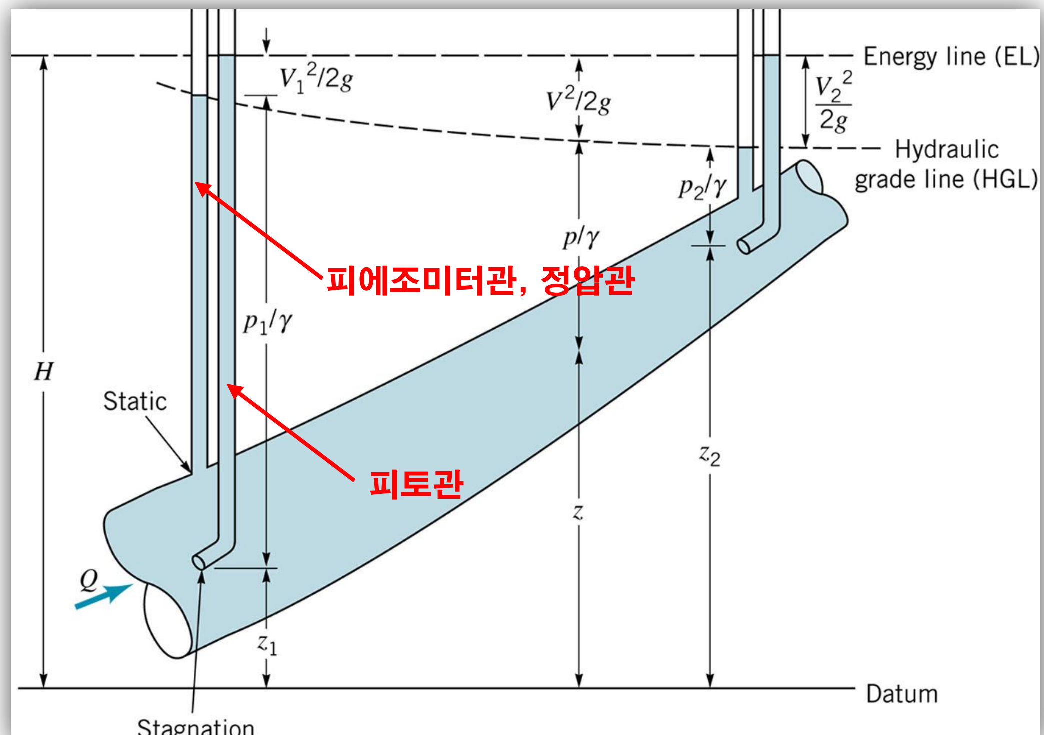
3.7 에너지선과 수력구배선

• 베르누이 방정식을 $\gamma = \rho g$로 나누면

$$\frac{P}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} + z = const\ (along\ the\ streamline) = H$$

전수두

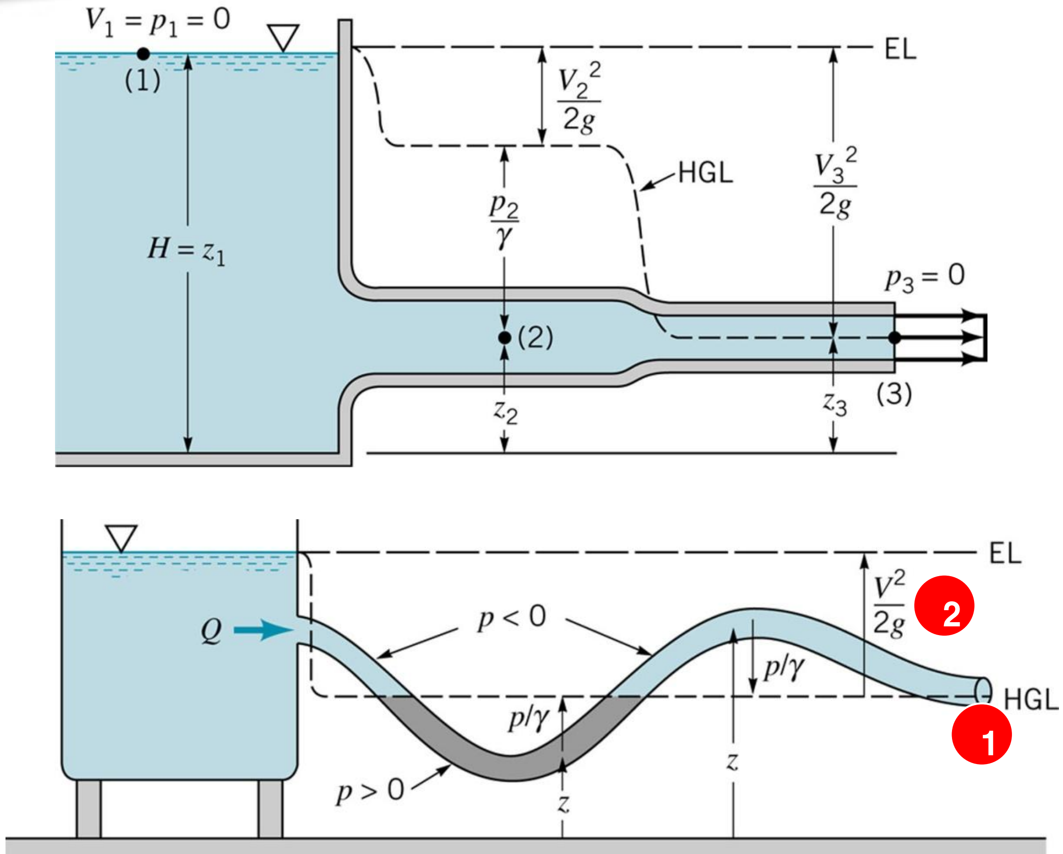
압력수두+속도수두+위치수두



• **에너지선 (energy line, EL) :**
  - 피토관의 높이를 연결한 선
  - 전수두(위치수두+압력수두+속도수두) 측정
  - 모든 위치에서 일정 (단, 점성이 커지면 에너지 소실 때문에 일정하지 않다.)

• **수력구배선 (hydraulic grade line, HGL) :**
  - 피에조미터관의 높이를 연결한 선
  - EL - 속도수두
  - 속도가 변하므로 HGL은 변한다.

제3장 유체동역학



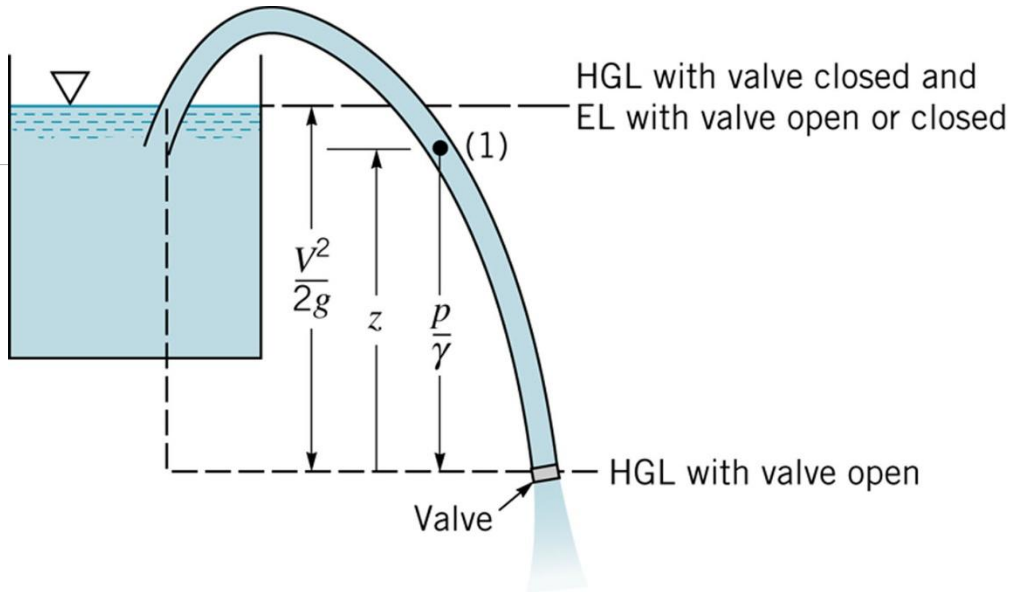
1 압력수두(=0)+ 위치수두 +(호스위 부분은)속도수두

2 호스속의 유체의 속도는 일정(연속방정식)하므로 EL에서 속도구배를 뺀 HG L은 일정하게 되고, 다음으로 위치수두를 정하면 나머지는 압력수두

HGL 아래의 호스는 +압력(대기압 이상), HGL 위의 호스는 −압력(진공)이다.

예제 3.14 : 에너지선과 수력구배선

(1)지점에 구멍. 구멍으로 물이
새어나올 것인가?
공기가 새어 들어 갈 것인가?



(1) 지점은 수력구배선 HGL 위에
있으므로 대기압보다 낮고, 공기가
새어 들어간다.

- 운동학(kinematics) : 유체의 운동을 일으키는데 필요한 실제적인 힘은 고려하지 않고 유체의 여러 가지 운동형태를 다루는 분야

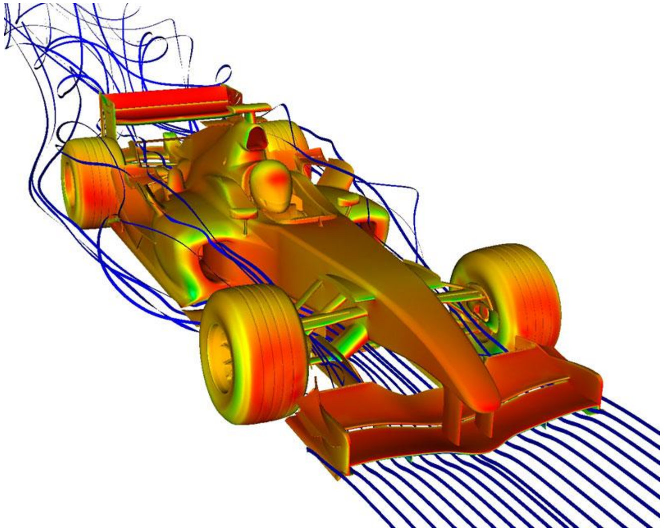
3.8 속도장

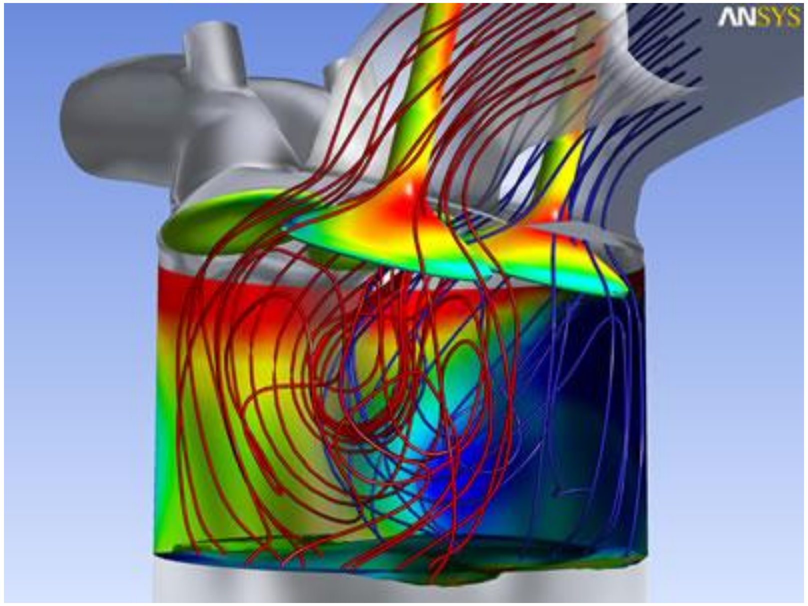
4.1.1 유동장의 오일러 기술법과 라그랑제 기술법

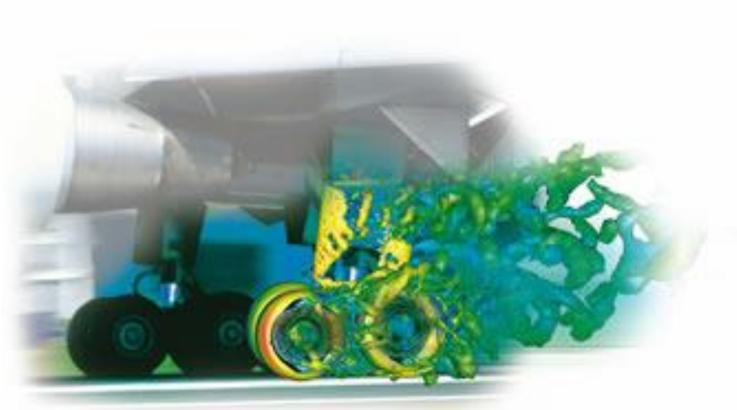
◆ 라그랑제 기술법(Lagrangian Description)

- 특정 유체의 입자의 성질을 시간의 함수로 표현
- 관심있는 특정입자만을 시간에 따라서 추적함
- 유체역학에서 별로 유용한 방법은 아님. (∵ 수많은 유체입자에 운동방정식을 적용하여 각각의 유체입자의 위치를 구별해 내고 추적하는 것은 거의 불가능)
- 사용 예 : 유체역학의 수치해석, 해류와 함께 움직이는 장비로 측정된 자료 등

제3장 유체동역학

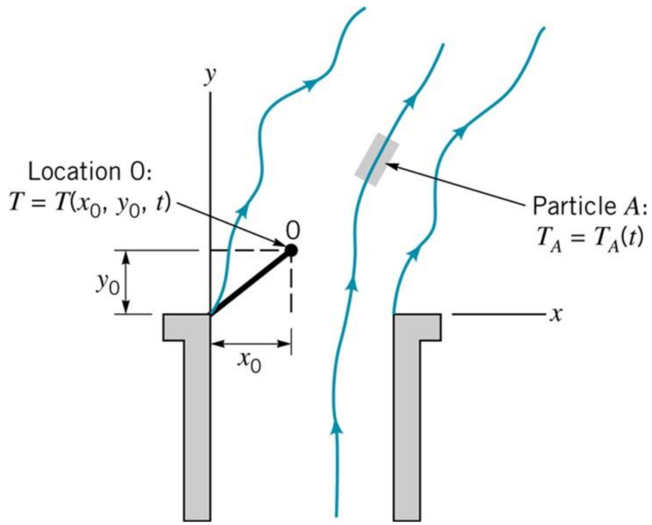






◆ 오일러 기술법(Euler Description)

- 유동장 중의 **고정된** 일정공간을 잡고 이 공간을 통과하는 여러 입자들의 운동에 관심이 있음
- 유동장 중의 일정 점이나 공간에 주의를 집중함
- 유체역학 문제를 푸는데 유용



▷ 굴뚝을 통과하는 연기의 예

- Euler 방법 : 굴뚝의 임의 위치 O에 온도계 부착
  온도계를 여러 개 부착하면 온도장을 얻을 수 있다.
  $T = T(x, y, z, t)$
- Lagrange 방법 : 하나의 입자(A)에 온도측정기를 부착하여 온도를 계속 측정
  $T_A = T_A(t)$

제3장 유체동역학

▷ 호수의 물고기 운동 관찰

- Lagrange : 호수에 있는 물고기에 대하여 운동방정식을 적용하여 물고기의 운동을 표현 (물고기가 많아지면 곤란 …)

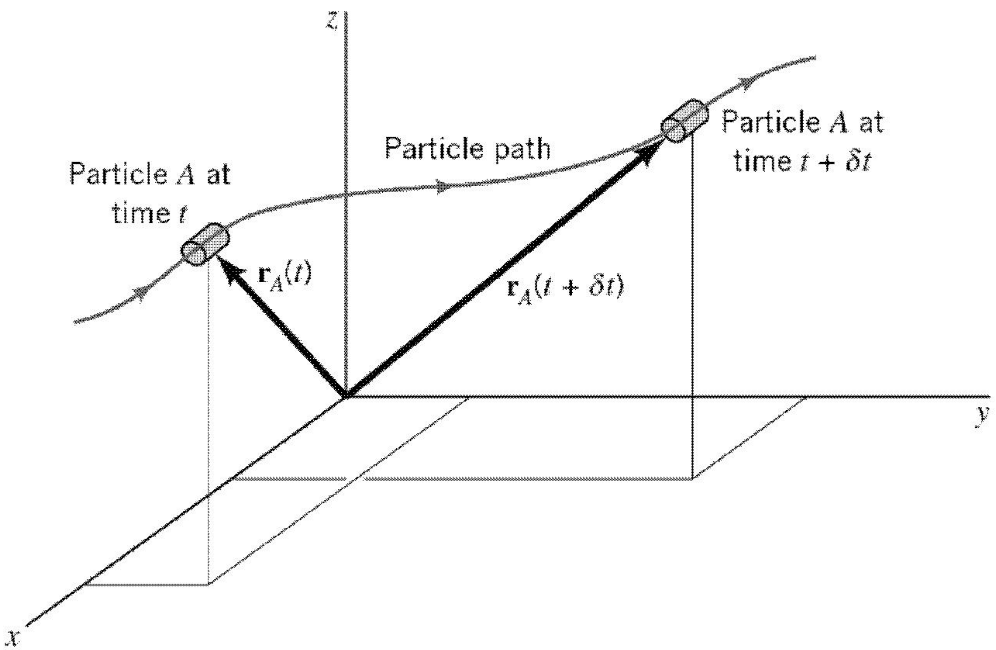
- Euler : 호수의 일정한 부분만 관심을 가지고 언제, 이 공간 내에 있는 물고기의 오고가는 현상만을 관찰 (이때 개개의 물고기에는 관심이 없다. 다만 어느 때 그 속에 있는 물고기의 수와 그때 그 물고기들의 움직임에만 관심을 가지는 것이다.)

Velocity Field (속도장)

▷ **Position Vector :** $\overrightarrow{r_A}$

▷ **Velocity Vector :** $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{V}(x,y,z,t) = \dfrac{d\overrightarrow{r_A}}{dt} =$

$$u(x,y,z,t)\vec{i} + v(x,y,z,t)\vec{j} + w(x,y,z,t)\vec{k}$$



<Particle location in terms of its position vector>

Acceleration Field (가속도장)

▷ **속도 :** $\vec{V} = \vec{V}(\vec{r},\ t) = \vec{V}\ [x(t), y(t), z(t),\ t]$

▷ **가속도 : 도함수의 연쇄법칙(Chain rule)을 사용하면**

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

$$= \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + u\frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v\frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w\frac{\partial \vec{V}}{\partial z} \quad \textbf{(4.3)}$$

▷ **스칼라량 성분으로의 표현**

식(4.3)에 $\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$**를 대입하고 각각 x, y, z 성분으로 정리하면**

$$a_x = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}$$

$$a_y = \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}$$

$$a_z = \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}$$ **이므로**

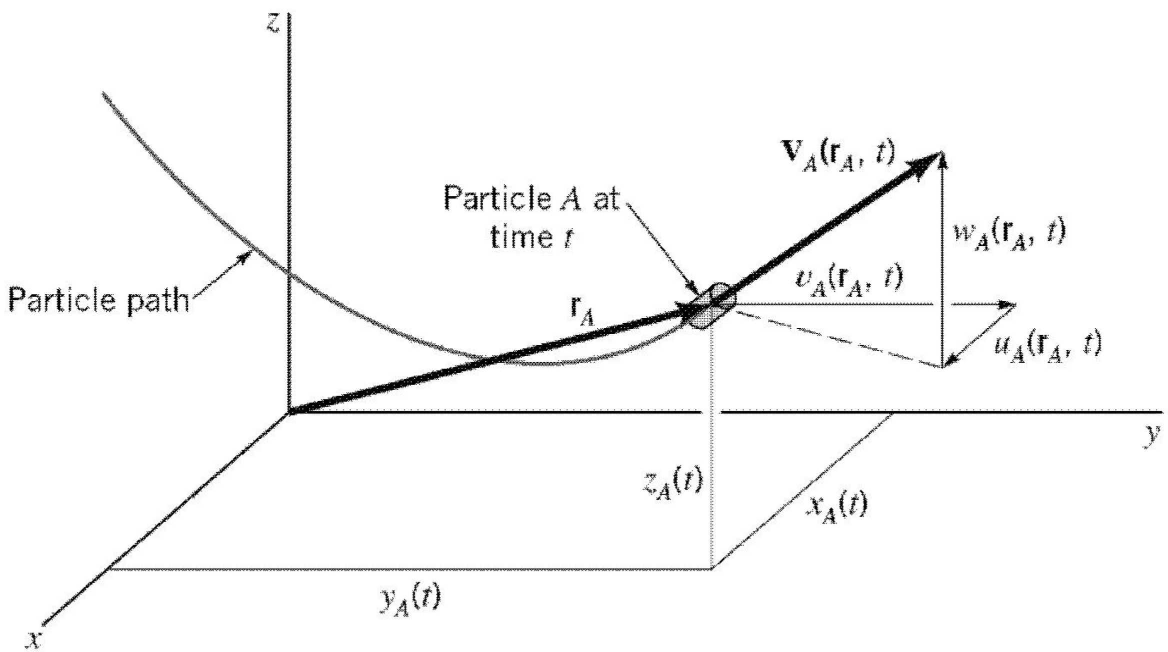
$$\underline{\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} \quad \textbf{(4.4)}}$$

▷ **물질도함수 또는 실재(實在)도함수로 표현하면**

$$\vec{a} = \frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla)\vec{V} \quad \textbf{(4.5)}$$

Div $\vec{V}$

- **여기서,** $\frac{D(\,)}{Dt} = \frac{\partial(\,)}{\partial t} + u\frac{\partial(\,)}{\partial x} + v\frac{\partial(\,)}{\partial y} + w\frac{\partial(\,)}{\partial z} = \frac{\partial(\,)}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla)(\,)$**를 물질도함수 또는 실질도함수 (Material /Substantial /Eulerian Derivative)라고 한다.**
- **첫째항 : 시간도함수 또는 국소(Local)도함수**
- **둘째항 : 공간도함수 또는 대류(Convective)도함수라고 한다.**



제3장 유체동역학

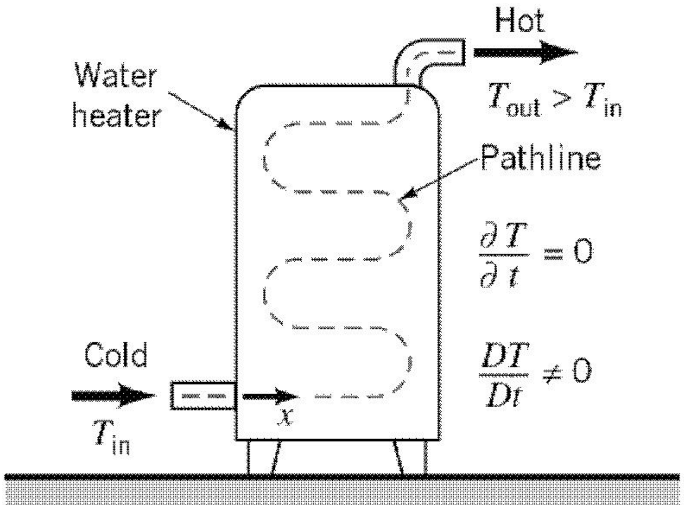
▷ **국소도함수의($\dfrac{\partial(\;)}{\partial t}$) 의미**

- 유체입자가 공간상을 움직일 때, 공간상의 한 점에서의 유체성질의 시간변화율로서, 유동의 비정상 효과를 나타낸다.
- 여기서, $\dfrac{\partial V}{\partial t}$ 는 국소가속도

▷ **대류도함수 $(\vec{V}\cdot\nabla)(\;)$의 의미**

- 유체입자가 공간상을 움직일 때 공간상의 한 점에서 가지고 있는 유체성질이 공간상의 다른 점에서 다른 값으로 변하므로 유체 성질변화에 관련된 가속도이다.
- 이는 변수의 구배 ($\nabla(\;)=\dfrac{\partial(\;)}{\partial x}\vec{i}+\dfrac{\partial(\;)}{\partial y}\vec{j}+\dfrac{\partial(\;)}{\partial z}\vec{k}$)가 존재하는 공간에서 입자의 대류 또는 움직임에 의하여 발생한다.
- 여기서 $(\vec{V}\cdot\nabla)\vec{V}$는 속도의 변화율로서 대류가속도라 한다.

▷ 국소도함수와 대류도함수의 예



$$\boxed{\frac{DT}{Dt} = \cancelto{0}{\frac{\partial \vec{T}}{\partial t}} + u\frac{\partial \vec{T}}{\partial x} + \cancelto{0}{v\frac{\partial \vec{T}}{\partial y}} + \cancelto{0}{w\frac{\partial \vec{T}}{\partial z}}}$$

- 유입되는 물은 항상 일정한 온도를 유지하며, 가열기를 떠나는 물의 온도는 항상 일정하게 높은 온도를 가진다. (정상유동, 국소도함수 $\frac{\partial T}{\partial t}$=0)
- 정상유동이지만, 물입자의 온도 T는 가열기를 지나면서 증가($T_{out} > T_{in}$)하므로 대류도함수 $u\frac{\partial T}{\partial x} \neq 0$이다.
- 즉, 온도가 일정하지 않은 경로를 따라 특정속도(u)로 흐르는 유체입자는 정상유동임에도 불구하고, 온도의 시간변화율은 $\frac{DT}{Dt} = u\frac{\partial T}{\partial x}$이다.