Option Pricing Models II

Department of Finance, Hallym University
Sun-Joong Yoon, Ph.D.

II. Black and Sholes Model

BS Assumptions

❒ 기초자산에 대한 가정

μ : 주식의 연간 기대수익률

σ : 주가의 연간 변동성

$$\Rightarrow BS\text{의 기본가정}: \frac{\Delta S}{S} \sim N\left(\mu\Delta t, \left(\sigma\sqrt{\Delta t}\right)^2\right), \quad \textit{for infinitesimal } \Delta t$$

$\Rightarrow$ 미래 T시점의 주가 S_T라고 하면,

$$\begin{cases} \ln S_T \sim N\left(\ln S_0 + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T, \left(\sigma\sqrt{T}\right)^2\right), or \\ \ln\left(\frac{S_T}{S_0}\right) = N\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T, \left(\sigma\sqrt{T}\right)^2\right) \end{cases}$$

➔ 연속복리 수익률

$$\therefore 1\text{년 동안의 연속복리 수익률의} \begin{cases} \text{평균} = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right), \\ \text{표준편차} = \sigma \end{cases}$$

BS Assumptions

$$E(S_T) = S_0 e^{\mu T},$$

$$But, \quad \text{주가의 연속복리 기대수익률} \neq \mu$$

$$\Rightarrow if \quad S_T = S_0 e^{\mu T}, \quad then \ \text{연속복리 기대수익률} = \mu$$

■ 예제

- 현재 주가가 $40인 주식의 기대수익률이 연 16% (연간복리)이고, 변동성이 연 20%이다. 6개월 후의 주가의 기대값은?
- 6개월 후의 주가의 확률분포는?
- 6개월 후의 주가에 대한 95% 신뢰구간은?

BS Assumptions

■ 가정 (Assumption)

- (1) 주가의 행태는 대수정규분포를 따른다
- (2) 거래비용과 세금은 없다
- (3) 옵션의 만기일까지 배당은 없다
- (4) 증권의 거래는 연속적으로 이루어진다
- (5) 투자자의 차입이자율과 대출이자율은 모두 무위험 이자율로 동일하다
- (6) 무위험 이자율 r은 일정하다

➔ 차익거래는 없다는 조건에 의해 유럽형 옵션의 가격 결정

■ 결정모형

- 아주 작은 거래 기간에 대한 무위험 포트폴리오를 구성 ➔ 옵션의 만기까지 이와 같은 무위험 포트폴리오를 지속적으로 재조정할 경우, 투자수익률은 r이 되어야 함 ➔ 미분방정식 도출

$$\begin{cases} C = S_0 N(d_1) - Xe^{-rT} N(d_2) \\ P = -S_0 N(-d_1) + Xe^{-rT} N(-d_2) \end{cases}, \quad \text{단,} \quad d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{X}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

BS formula

■ 특징

- 주가가 매우 높으면,

$$\lim_{S_0 \to \infty} d_1 = \infty \Rightarrow N(d_1) = 1, N(d_2) = 1, N(-d_1) = 0, N(-d_2) = 0$$

$$\therefore\ C = S - Xe^{-rT}, \quad P = 0$$

- 주가가 매우 낮으면,

$$\lim_{S_0 \to 0} d_1 = -\infty \Rightarrow N(d_1) = 0, N(d_2) = 0, N(-d_1) = 1, N(-d_2) = 1$$

$$\therefore\ C = 0, \quad P = Xe^{-rT} - S_0$$

■ 예제

- 현재 주가는 $42, 변동성은 연 20%, 무위험 이자율은 연 10%일 때,
- 행사가격이 $40이고 만기가 6개월인 유럽형 콜 옵션의 가격은?

- 동일한 조건의 유럽형 풋 옵션의 가격은?

Intrinsic Value & Time Value of BS Model

❒ Intrinsic Value & Time Value

$$c = S_0 N(d_1) - Ke^{-rT} N(d_2)$$
$$= \max(S_0 - K, 0) + else$$

Intrinsic Value **Time Value**

❒ 예제 : $S_0 = \$42, K = 40, r = 10\%, \sigma = 20\%, T = 0.5 year$

❖ 콜옵션:

❖ 풋옵션:

Volatility – Historical Volatility

■ 계산방법

❖ 과거의 주가자료를 이용하여 주가수익률의 표본 표준편차를 계산함

$$u_i = \ln\left(\frac{S_i}{S_{i-1}}\right), \quad \Rightarrow \text{표본 표준편차 } s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(u_i - \overline{u})^2}{n-1}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Daily\ \ volatility\ \ \sigma_d = s/\sqrt{\tau} \\ Monthly\ \ volatility\ \ \sigma_m = \sigma_d \times \sqrt{21} \\ Yearly\ \ volatility\ \ \sigma_y = \sigma_d \times \sqrt{252} \end{cases}$$

➔ **Stable, but Backward looking**

■ 예제

❖ 거래소에서 거래되는 주요 종목 중 3 종목에 대하여 과거 3년간의 주가자료를 활용하여, 일별/월별/연간 변동성을 계산하시오

Volatility – Implied Volatilities

■ 계산방법

❖ 현재 시장에서 관찰된 옵션의 가격으로부터 BS model을 적용하여 역산한다.

$$let \quad C^{mkt} = \text{옵션의 시장가격}$$

$$Then, \ by \ BS \ \text{모형},$$

$$C^{mkt} = S_0 N\left(\frac{\ln\left(\frac{S_0}{X}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \right) - Xe^{-rT} N\left(\frac{\ln\left(\frac{S_0}{X}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \right)$$

➔ **Forward looking, but unstable**

■ 예제

❖ 현재 주가가 $21, 무위험 이자율이 10%일 때, 행사가격이 $20이고 만기가 3개월 남은 유럽형 콜 옵션의 시장가격이 $1.90으로 관찰 ➔ 내재 변동성은?

Implied Volatilities

❒ Black-Scholes 내재변동성

❖ 옵션가격과 내재변동성간에는 1 대 1 (one to one) 대응관계가 존재

❖ 트레이더나 브로커들은 옵션의 프리미엄 (가격) 대신에 종종 내재변동성으로 공시 (quote) 한다.

❒ VIX (S&P500 변동성 지수; Volatility Index)