미적분학 - 제 2 장 도함수

채갑병[1]

2009년 9월 3일

제 2 장 도함수

2.1 도함수와 접선

정의 1. *$y = f(x)$ 평균변화율(average rate of change)*

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{(x+h) - x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

정의 2. *$x = a$ 에서의 순간 변화율 (instantaneous rate of change) 혹은 $x = a$ 에서의 미분 계수 (differential coefficient)*

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

정의 3.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} f(x) = Df(x)$$

이 존재하면 이를 함수 f의 도함수(derivative)라 한다. 이 도함수를 구하는 과정을 함수 f를 미분한다(differentiate)고 한다.

예제 4. 함수 $f(x) = x^2$의 $x = 1$에서의 순간변화율을 구하시오.

답

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{(1+h)^2 - 1}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{2h + h^2}{h} = \lim_{h \to 0} (2 + h) = 2. \end{aligned}$$

예제 5. $f(x) = |x|$, $x = 0$.

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{|h|}{h} = 1$$

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{|h|}{h} = -1$$

그러므로 함수 $f(x)$는 $x = 0$에서 미분불가능이다.

정리 6. *함수 $f(x)$가 점 x_0를 포함하는 개구간 위에서 정의되어 있다고 하자. 만약 $f'(x_0)$ 가 존재하면, f 는 점 $x = x_0$ 에서 연속이다.*

예제 7. 함수 $f(x) = \sqrt{x}$의 도함수를 구하라.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left(\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\right)\left(\frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}\right) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x}}
\end{aligned}$$

정리 8. *$x = x_0$ 에서의 접선(tangent line), 법선(normal line) 의 방정식*
접선의 방정식 :

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

법선의 방정식 :

$$y - f(x_0) = -\frac{(x - x_0)}{f'(x_0)}$$

2.2 미분법에 관한 정리

정리 9. *$f(x) = c$*

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{c-c}{h} = 0
\end{aligned}$$

정리 10. *함수 $f(x)$ 와 $g(x)$가 미분가능하면 다음이 성립한다.*
(1)

$$(f \pm g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

(2)

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

(3)

$$(f/g)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

정리 11. $n \in \mathtt{N}$ 이면

$$\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$$

이다.

정의 12.

$$\frac{d^n y}{dx^n}$$

예제 13. *다음 함수를 미분하라.*

1. $f(x) = (1 + 3x^2)(2x^2 - 6x + 7)$.

2. $f(t) = \frac{1-t^4}{t-t^2}$.

정리 14. 두함수 f, g가 n 번 미분가능하면, 함수 $f + g$, fg 도 n번 미분가능하고, 다음이 성립한다.

(1) $(f+g)^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) + g^{(n)}(x)$

(2) (Leibniz 법칙)

$$(fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x)$$

(단, $f^{(0)}(x) = f(x)$, $g^{(0)}(x) = g(x)$)

정리 15. 연쇄법칙 (Chain Rule) 두함수 $y = g(u)$ 와 $u = f(x)$ 가 미분 가능하면 합성함수 $g \circ f$ 도 미분가능하고, 그의 도함수 $(g \circ f)'$ 은 다음과 같다.

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x),$$

즉,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

가 성립한다.

예제 16. *다음 함수를 미분하라.*

1. $f(x) = (x^2 + 1)^3$.

2. $f(t) = \sin(t^2 + 1)$.

2.3 삼각함수와 그 도함수

정의 17.

$$\sin\theta = \frac{y}{r}, \cos\theta = \frac{x}{r}$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta},\ \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta},\ \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta},\ \csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$$

$$\cos\theta = \sin(\theta + \frac{\pi}{2}), \sin\theta = \cos(\theta - \frac{\pi}{2})$$

$$\sin x \pm \sin y = 2\sin\frac{(x \pm y)}{2}\cos\frac{(x \mp y)}{2}$$

정리 18. *(삼각함수의 도함수)*

(1) $(\sin x)' = \cos x$ (2) $(\cos x)' = -\sin x$

(3) $(\tan x)' = \sec^2 x$ (4) $(\cot x)' = -\csc^2 x$

(5) $(\sec x)' = \sec x \tan x$ (6) $(\csc x)' = -\csc x \cot x$

예제 19. $y = x^3 \sin x$

예제 20. $y = \frac{2-\cos x}{2+\cos x}$

2.4 음함수의 미분법

정의 21. *음함수 (implicit function) : f(x,y) = 0*
음함수의 미분법 (implicit differentiation)

예제 22.

$$x^2 + y^2 = 1 \Longleftrightarrow y = \sqrt{1-x^2}\ \textit{and}\ \ y = -\sqrt{1-x^2}$$

$$2x + 2yy' = 0$$

$$y' = -x/y,\ \ y \neq 0$$

$(0,1)$에서 $y' = 0$
$(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ 에서는 $y' = -1$

예제 23. $x^2 + y^2 = 9,\ y',\ y''?$

증명

$$2x + 2yy' = 0$$

즉

$$y' = -\frac{x}{y}.$$

이고

$$2 + 2y'y' + 2yy'' = 0$$

즉

$$y'' = \frac{-y^2 - x^2}{y^3}$$

이다.

2.5 함수의 근사값과 미분

(선형근사식, Linear approximation)

$$f(x) = f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = L(x)$$

예제 24. *선형근사식을 이용하여 $\sqrt{36 + \Delta x}$ 의 근사값을 구하여라.*

답 $f(x) = \sqrt{x}, \quad x = 36 + \Delta x$ *이고* $x_0 = 36$ *이므로*

$$L(x) = f(36 + \Delta x) \approx f(36) + f'(36)\Delta x = \sqrt{36} + \frac{1}{2\sqrt{36}}\Delta x = 6 + \frac{\Delta x}{12}$$

이다. ♦

예를 들어 $\sqrt{37}$ *의 근사값은* $\Delta x = 1$ *이므로*

$$L(37) = 6 + \frac{1}{12} \approx 6.083333$$

이때, 절대오차는

$$\text{오차} = |\text{참값} - \text{근사값}| = |f(37) - L(37)| \approx |6.082762 - 6.083333| = .000571.$$

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x$$

이므로

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x,$$

또는

$$\Delta y \approx f'(x_0)\Delta x.$$

을 얻는다.

정의 25. *함수 $y = f(x)$가 미분가능할때*

$$f'(x_0)\Delta x$$

를 y의 미분이라 하고 dy 라 나타낸다.

예제 26. *$\sqrt{402}$ 의 근사값을 구하라.*

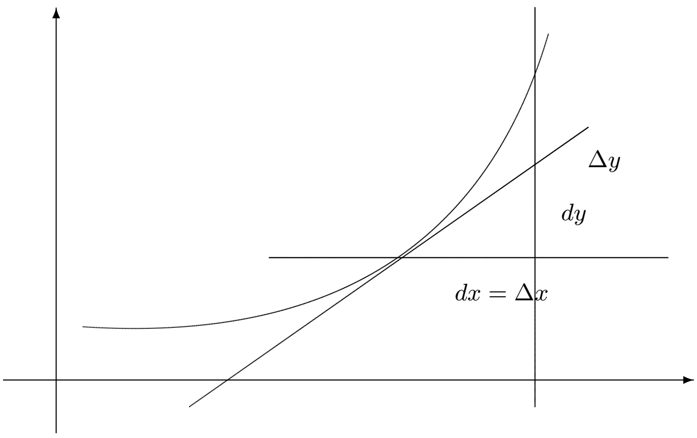
답 *(미분을 이용)*

$f(x) = \sqrt{x}$ 이고 $dx = \Delta x = 2$ 이므로

$$f(x) \approx f(x_0) + dy$$

에서

$$\sqrt{402} \approx \sqrt{400} + dy = 20 + \frac{1}{2\sqrt{400}} \cdot 2 = 20 + \frac{1}{20} = 20.05$$



(뉴톤 방법을 이용)

$f(x) = x^2 - 402$ 로 놓고 $f(x) = 0$ 의 근을 구하면 $x = \pm\sqrt{402}$이다. 적당한 a_1로 22 정도를 잡아 뉴톤 방법에 대입하면 구할수 있다.

2.6 변화율

물체의 위치

$$x(t)$$

속도 = 시간에 대한 물체위치의 변화율 :

$$v(t) = \frac{dx}{dt}$$

가속도 $=$ 시간에 대한 속도의 변화율 :

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$|v(t)|$: 속력

예제 27. *키가* $1.65m$ *인 사람이 지상* $3m$ *높이의 가로등 바로 아래로부터 일직선으로 매분* $90m$ *의 속도로 걸어갈때, 다음 물음에 답하라.*
(1) 이 사람의 그림자 끝의 속도를 구하라.
(2) 그림자 길이의 변화율을 구하라.
답] *(1)* y*를 그림자끝의 위치함수라 하고* x*를 사람의 위치함수라 하면*

$$3 : y = 1.65 : y - x$$

$$y = \frac{3}{1.35}x$$
$$dy/dt = \frac{3}{1.35}dx/dt$$
$$dx/dt = 90m/min$$
$$dy/dt = \frac{3}{1.35}90 = 200m/min$$

(2) 그림자 길이의 변화율을 l *이라 놓으면*

$$l = y - x$$

$$dl/dt = dy/dt - dx/dt$$

$$dl/dt = 200 - 90 = 110m/min.$$

길이 $= l(t)$
넓이 $= S(t)$
부피 $= V(t)$
길이의 변화율

$$\frac{d}{dt}l(t)$$

넓이의 변화율

$$\frac{d}{dt}S(t)$$

부피의 변화율

$$\frac{d}{dt}V(t)$$

예제 28. *잔잔한 호수에 돌을 던지면 동심원의 파문이 인다. 가장 바깥쪽 파문의 반지름의 길이가 매초 $2m$ 의 비율로 커질때 5초후의 파문의 넓이의 변화율을 구하라.*

답

$$S(t) = \pi r^2$$

$$\frac{d}{dt}S(r) = 2\pi r \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}S(10) = 2\pi r\, 2\ m/sec = 4\pi 10m\ m/sec = 40\pi m^2/sec$$

예제 29. *시간에 따른 전하량의 변화율을 전류의 세기라고 한다. 어느 전선에 t 초 동안 $\frac{1}{4}t^4 + \frac{1}{3}t^3 + t$ (쿨롱)의 전하가 흐른다고 할때, 4초 후의 이전선에 흐르는 전류의 세기를 구하라(단 ,전류의세기의 단위는 쿨롱/초, 즉 암페어이다.)*

답

$$f(x) = \frac{1}{4}t^4 + \frac{1}{3}t^3 + t$$

$$f'(x) = t^3 + t^2 + 1$$

$$f'(4) = 81 \quad \text{암페어}$$