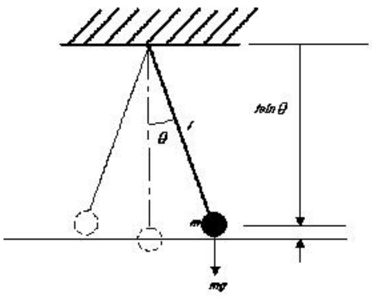
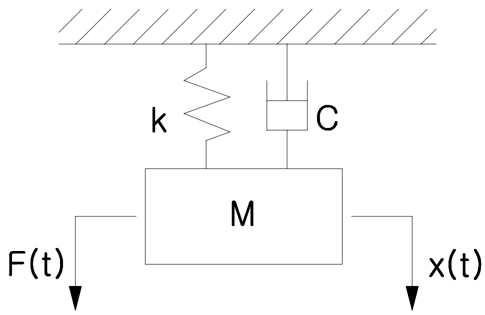
제 1 장. 진동의 기초

1-1. 진동의 기본 개념

진동(vibration)이란 물체 또는 질점이 외력을 받아 평형위치에서 요동하거나 떨리는 현상을 뜻한다. 진동현상은 일상생활에서 흔히 관찰되어지며 기계 및 구조물의 진동, 진자의 왕복운동, 튕겨진 현의 운동 등은 진동의 전형적인 예이며 탄성과 관성의 작용에 의해 생겨나는 현상이다.
진동은 일반적으로 해로운 현상이므로 이를 적극적으로 해석하고 방지하는 것은 매우 중요한 일이라 하겠다. 특히 최근에는 기계와 구조물이 고속화 되어가는 경향에 있으므로 진동해석의 중요성이 날로 높아가고 있다.





1-2. 진동계의 기본 요소

일반적으로 모든 진동계는 다음과 같은 4가지 요소로 나눠어질 수 있다.

(1)질량(mass, m)

물체는 속도가 변함에 따라 **운동에너지**를 얻거나 잃게 된다. 질량은 계(system)의 관성의 척도를 나타낸다. 즉, 정지한 물체는 계속 정지하려하고 운동하는 물체는 운동을 계속하려는 경향에 대한 척도를 나타낸다. Newton의 운동법칙에 의해 기술된다. System이 1자유도계라면 질량은 무게를 중력가속도롤 나눈값에 해당하며 분포계의 경우 질량은 집중질량의 1/3에 해당한다.

(2)스프링(spring, k)

물체를 변형시키면 원래대로 복원되려고 하는 성질에 대한 척도이며 변형에 저항하는 성질로 표현될 수 있다. 스프링에 저장되는 힘을 **위치에너지** 또는 탄성에너지

라한다,

(3)감쇠기(damper, c)

Damping은 계의 **energy손실**을 대변하는 항으로 외력의 영향을 받지 않는 free vibration에서 시간의 경과에 따라 진폭이 줄어드는 것은 바로 damping의 존재 때문이며, 이것이 크고 작음에 따라 진폭감소의 비가 크거나 작아지며, 이러한 성질을 나타내기 위한 진동의 요소가 damper이다. 만약 damping이 없으면 진폭은 변하지 않고 똑같은 양상의 진동이 영구히 계속될 것이고, damping이 음이면 진폭은 시간이 갈수록 증가할 것이다.

(4)외력(excitation, F(t))

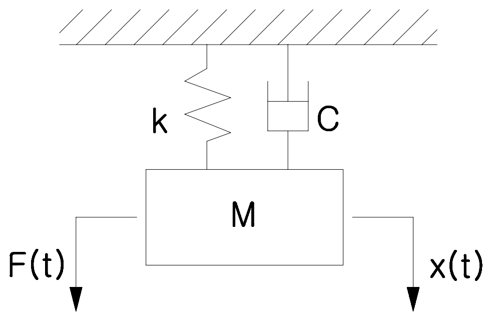
진동계(system)의 외력은 계에 내재하는 경우와 회전체의 불균형에 의해 발생하는 것으로 고려할 수 있다.

계에 내재한 외력은 공작기계에서 발생하는 채터(chatter), Gear부위에서 발생하는 torque등에서 찾아 볼 수 있는데, 채터는 절삭 중에 발생하는 절삭력의 변화가 공작기계로 전파되었다가 다시 절삭과정으로 회귀되어 가중변위를 일으키는 과정을 cycle로 이루며 점차로 절삭 공구와 가공물 사이의 진동을 증폭시키는 현상을 말한다. 회전체의 불균형에 의해 발생하는 외력은 회전체에서 회전 중심과 질량 중심의 불일치에 의해 발생하며, 회전체의 회전 속도의 제곱에 비례한다. 이는 점차로 고속화되어 가고 있는 기계계에서 심각한 영향을 끼칠 수 있다.

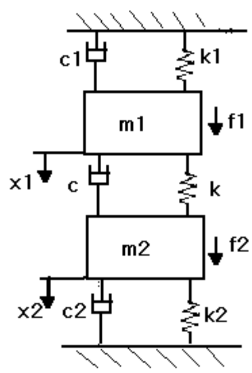
1-3. 자유도

기계 시스템을 구성하는 모든 질량 요소의 위치를 결정하는데 필요한 독립좌표의 최소한의 개수를 의미하며 자유도 수만큼 고유진동수가 존재한다.

1 자유도



2 자유도



1-3. 진동 분류

(1) 자유 및 강제 진동

자유진동 - 초기 가진 후 외부의 어떤 힘도 가해지지 않았을 경우에도 계속해서 일어나는 진동

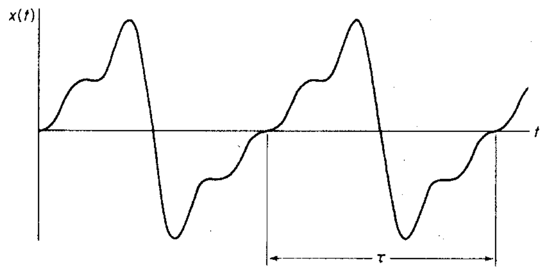
강제진동 - 계가 외력에 의해 가진되는 진동

(2) 비감쇠 및 감쇠진동

(3) 선형 및 비선형진동

(4) 확정 및 확률진동 (deterministic and random vibration)

확정 가진 - 주기적 가진력에 의한 진동



1-4. 진동 해석 절차

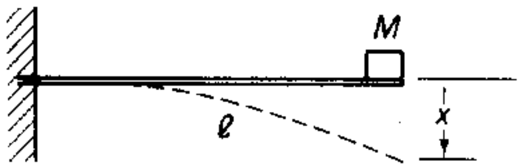
수학적 모형화 -> 지배방정식 유도 -> 해 -> 결과 설명

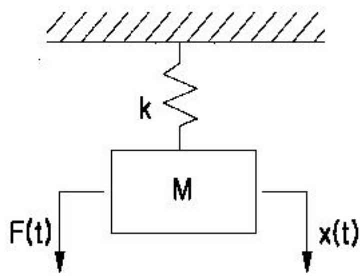
1-5. 스프링 요소

스프링은 힘과 변형량 비례하고 일반적인 선형 진동문제에서는 힘 F와 스프링의 변형량 x 사이는 스프링 상수 k를 도입하여 다음과 같은 관계를 갖는다.

$$F = kx$$

스프링 요소는 꼭 스프링만이 아니라 $F = kx$를 만족하는 동등의 상태를 스프링으로 볼수 있다. 예를 들면 외팔보





는 캔틸레버 보의 끝단에 $P(=Mg)$라는 하중이 작용되었을 경우의 처짐식은 다음과 같다.

$$x = \frac{Pl^3}{3EI} = \frac{P}{k}$$

$$k = \frac{3EI}{l^3}$$

여기서, EI는 보의 휨강성을 나타낸다. 이 관계식으로부터 캔틸레버 끝단 처짐에 대한 강성계수, k는 다음과 같이 결정된다. 결국 외팔보는 1 자유도 질량-스프링 시스템으로 볼 수 있다.

(1) 병렬 스프링

$$k_{eq} = k_1 + k_2 + \cdots + k_n$$

(2) 직렬 스프링

$$\frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \cdots + \frac{1}{k_n}$$

1-6. 질량 또는 관성요소

질량과 관성을 하나의 강체로 가정하여 속도나 각속도가 주어진 경우 계의 운동에너지를 계산하는데 수학적 모형의 좌표계에 맞추어 질량및 관성모멘트가 요구된다.

1-7. 감쇠요소

실제 계에서 진동에너지는 열이나 소리로 바뀌지고 에너지 감소로 인하여 계의 변위와 같은 응답이 점차로 줄어들게 된다. 진동에너지가 열이나 소리로 바뀌게 하는 기구를 감쇠계라한다.

(1) 점성 감쇠

진동해석에 가장 일반적으로 사용되는 감쇠기구이다. 기계계가 공기, 가스, 유체 등에서 진동할 때 물체에 작용하는 유체저항이 에너지 발산의 원인이 된다.

점성 감쇠는 감쇠력이 진동하는 물체의 속도에 비례한다.

(2) 쿨롱 또는 건마찰 감쇠

(3) 재료,고체 또는 이력감쇠

재료가 변형될 때 에너지는 흡수가 되기도하고 발산되기도 한다. 발산효과는 내부 평면의 마찰로 인한 것인데 이는 변형될 때 생기는 미끄럼에 의한 것이다. 재료감쇠를 가진 물체가 진동할 때 응력-변형도는 그림과 같은데 이 이력 폐곡선의 면적이 감쇠로 인한 매 주기당 에너지 소멸량이다.

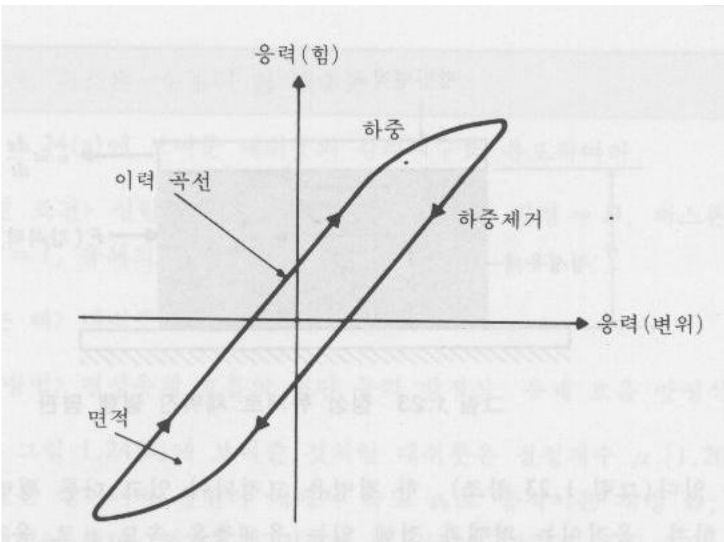
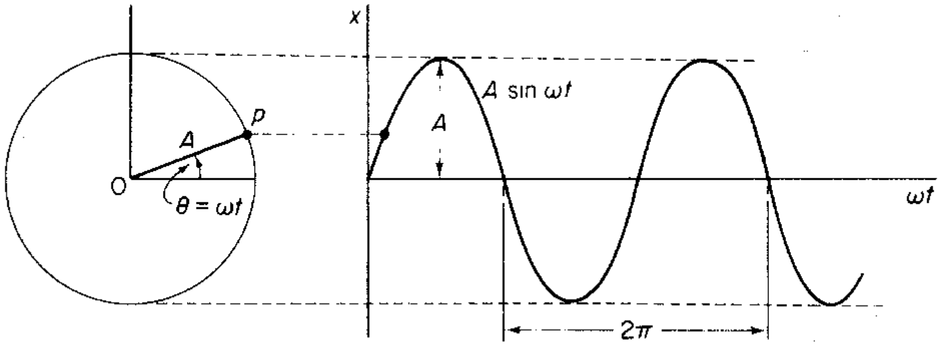


그림 1.22 탄성 재료의 이력 폐곡선

1.8 조화운동(harmonic motion)

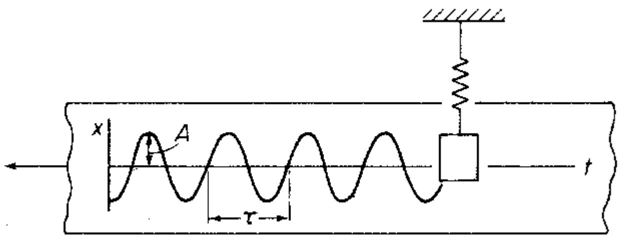
(1) 주기운동(periodic motion)



- 주기(period) : $\tau = \dfrac{2\pi}{\omega}$

- 주파수(frequency) : $f = \dfrac{1}{\tau}$

- 운동(motion) : $x(t) = x(t+\tau)$



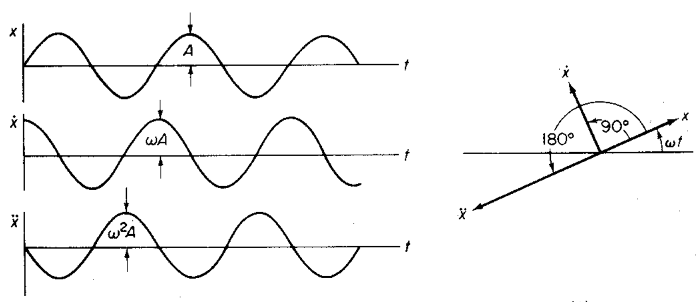
(2) 조화운동(harmonic motion)

<예 1>

변위(displacement) $x = A\sin\omega t = A\sin 2\pi\dfrac{t}{\tau}$

속도(velocity) $\dot{x} = \dfrac{dx}{dt} = \omega A\cos\omega t = \omega A\sin(\omega t + \dfrac{\pi}{2})$

가속도(acceleration) $\ddot{x} = \dfrac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A\sin\omega t = \omega^2 A\sin(\omega t + \pi)$



(a) (b)

(3) 지수형태(exponential form)

- Euler's 방정식

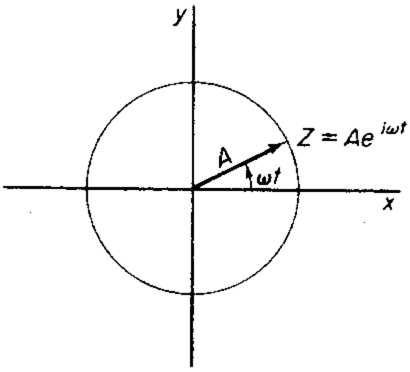
  $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

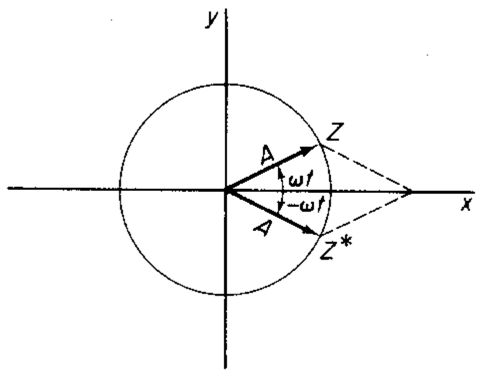
- 진폭이 A 이고 등각속도 ω 로 회전하는 벡터 z

  $$\begin{aligned} z &= Ae^{i\omega t} \\ &= A\cos\omega t + iA\sin\omega t \\ &= x + iy \end{aligned}$$

- 실수부 x

  $$x = \frac{1}{2}(z + z^{*}) = A\cos\omega t = \mathrm{Re}[\mathrm{Ae^{i\omega t}}]$$





(4) 진동용어

- *첨두치*(최대치, peak value)
- *평균치*(average value)

$$\bar{x} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,dt$$

예) sin함수 반주기 평균

$$\bar{x} = \frac{A}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(t)\,dt = \frac{2A}{\pi} = 0.637A$$

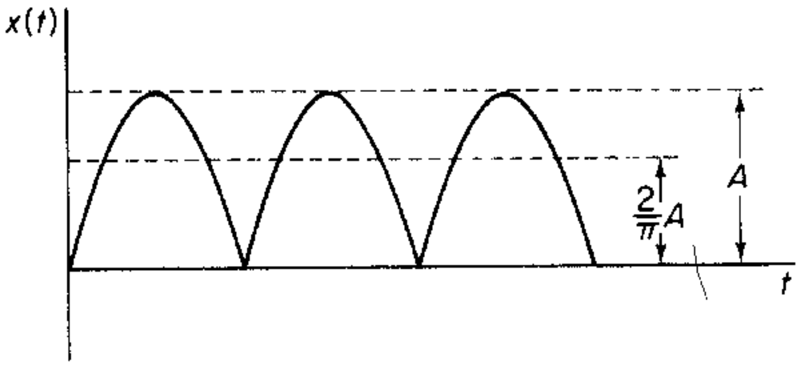
- *제곱 평균*(mean square value)

$$\overline{x^2} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T x^2(t)\,dt$$

예) sin함수의 제곱치 평균

$$\overline{x^2} = \frac{A^2}{T}\int_0^T \sin^2(t)\,dt$$

$$= \frac{A^2}{T}\int_0^T \frac{1}{2}(1-\cos 2t)\,dt = \frac{1}{2}A^2$$



- *제곱 평균의 평방근* (rms, root mean square)

$$\sqrt{\overline{x^2}} = \sqrt{\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T x^2(t)\,dt}$$

- 데시벨(decibel)

$$dB = 10\log_{10}\left(\frac{p_1}{p_2}\right)$$

$$= 10\log_{10}\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 = 20\log_{10}\left(\frac{x_1}{x_2}\right)$$

p = power

x = 진폭 또는 전압

- 옥타브(octave)

상위 주파수범위가 하위 주파수범위의 두 배에 해당할 때, 이 주파수 구간(span)을 의미함.

Band	Frequency Range (Hz)	Frequency Bandwidth
1	10-20	10
2	20-40	20
3	40-80	40
4	200-400	200

1.9 주기운동(periodic motion)

- *Fuorier 급수*

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + a_1\cos\omega_1 t + a_2\cos\omega_2 t + \cdots$$

$$+ b_1\sin\omega_1 t + b_2\sin\omega_2 t + \cdots$$

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{\tau} \qquad (\tau = \text{period})$$

$$\omega_n = n\omega_1$$

- Fourier coefficients

$$a_n = \frac{2}{\tau}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} x(t)\cos\omega_n t\,dt$$

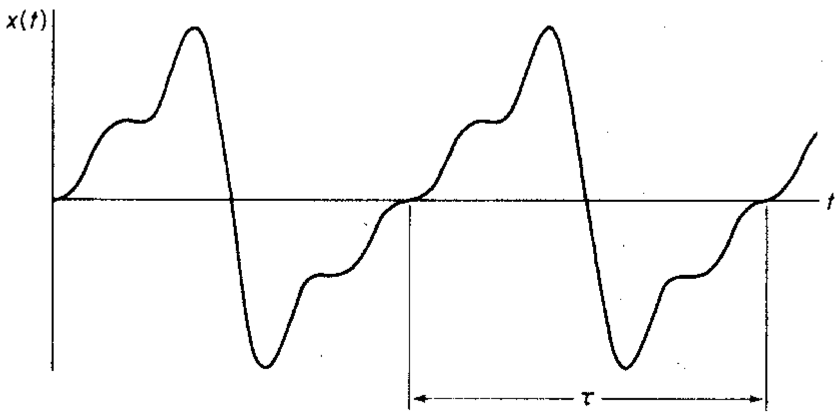
$$b_n = \frac{2}{\tau}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} x(t)\sin\omega_n t\,dt$$

- 직교성

$$\int_{-\tau/2}^{\tau/2}\cos\omega_n t\cos\omega_m t\,dt = \begin{cases} 0 & \text{if } m \neq n \\ \tau/2 & \text{if } m = n \end{cases}$$

$$\int_{-\tau/2}^{\tau/2}\sin\omega_n t\sin\omega_m t\,dt = \begin{cases} 0 & \text{if } m \neq n \\ \tau/2 & \text{if } m = n \end{cases}$$

$$\int_{-\tau/2}^{\tau/2}\cos\omega_n t\sin\omega_m t\,dt = \begin{cases} 0 & \text{if } m \neq n \\ 0 & \text{if } m = n \end{cases}$$



- 삼각함수의 지수형 표현

$$\cos\omega_n t = \frac{1}{2}\left(e^{i\omega_n t} + e^{-i\omega_n t}\right)$$

$$\sin\omega_n t = \frac{1}{2}\left(e^{i\omega_n t} - e^{-i\omega_n t}\right)$$

- 지수형 Fourier 급수

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2}(a_n - ib_n)e^{i\omega_n t} + \frac{1}{2}(a_n + ib_n)e^{-i\omega_n t}\right]$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[c_n\, e^{i\omega_n t} + c_n^*\, e^{-i\omega_n t}\right]$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, e^{i\omega_n t}$$

여기서 $c_0 = \frac{1}{2}a_0$

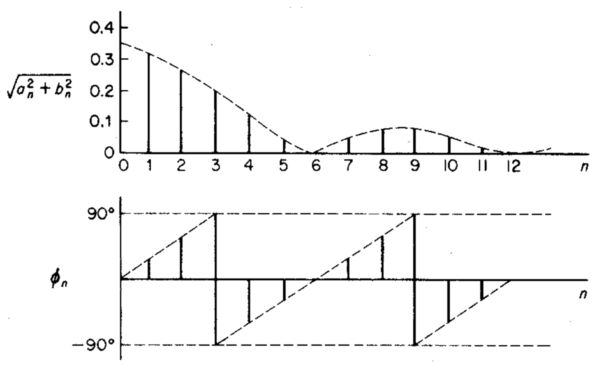
$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n)$$

- 지수형 Fourier coefficients

$$c_n = \frac{1}{\tau}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} x(t)\left(\cos\omega_n t - i\sin\omega_n t\right) dt$$

$$= \frac{1}{\tau}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} x(t)\, e^{-i\omega_n t}$$

- Fourier 스텍트럼과 위상



- Odd 함수($O(t)$)와 even 함수($E(t)$)의 특성

$$\int_{-\tau/2}^{\tau/2} E(t)\sin\omega_n t\, dt = 0$$

$$\int_{-\tau/2}^{\tau/2} O(t)\cos\omega_n t\, dt = 0$$