6.4 층화집락표집(stratified cluster sampling)

H : 층의 개수, N_h : h층의 집락 수, n_h : h층에서 표집된 집락 수

τ_{hj} : h층 j집락에서 관측한 집락 합, M_{hj} : h층의 j집락의 크기

N : 총 집락 수 $N = N_1 + \cdots + N_H$

$\bar{\tau}_h = \frac{1}{n_h}\sum_{j=1}^{n_h}\tau_{hj}$ (h 층의 평균집락합), $\hat{\tau}_h = N_h\bar{\tau}_h = \frac{N_h}{n_h}\sum_{j=1}^{n_h}\tau_{hj}$(h 층의 집락합 추정)

- $$\hat{\tau} = \sum_{h=1}^{H}\hat{\tau}_h = \sum_{h=1}^{H}N_h\bar{\tau}_h = \sum_{h=1}^{H}\frac{N_h}{n_h}\sum_{j=1}^{n_h}\tau_{hj}, \qquad \widehat{Var}(\hat{\tau}) = \sum_{h=1}^{H}N_h^2\left(\frac{N_h - n_h}{N_h}\right)\frac{s_h^2}{n_h},$$

  $$s_h^2 = \frac{1}{n_h - 1}\sum_{j=1}^{n_h}(\tau_{hj} - \bar{\tau}_h)^2$$

  $\overline{M}_h = \frac{1}{n_h}\sum_{j=1}^{n_h}M_{hj}$ (h층의 평균집락 크기), $\widehat{M}_h = N_h\overline{M}_h = \frac{N_h}{n_h}\sum_{j=1}^{n_h}M_{hj}$(h층의 총집락크기)

  $\hat{K} = \sum_{h=1}^{H}\widehat{M}_h = \sum_{h=1}^{H}N_h\overline{M}_h = \sum_{h=1}^{H}\frac{N_h}{n_h}\sum_{j=1}^{n_h}M_{hj}$: 모집단 전체의 크기

- $\hat{\mu}_c = \dfrac{\sum_{h=1}^{H}N_h\bar{\tau}_h}{\sum_{h=1}^{H}N_h\overline{M}_h}$(모평균의 병합비추정량),

  $$\widehat{Var}(\hat{\mu}_c) = \sum_{h=1}^{H}\left(\frac{N_h}{N}\right)^2\frac{1}{\overline{M}^2}\left(\frac{N_h - n_h}{N_h}\right)\frac{s_{eh}^2}{n_h} = \frac{1}{K^2}\sum_{h=1}^{H}N_h(N_h - n_h)\frac{s_{eh}^2}{n_h},$$

  $$s_{eh}^2 = \frac{1}{n_h - 1}\sum_{j=1}^{n_h}(\tau_{hj} - \hat{\mu}_c M_{hj})^2$$

예 6.5 인접한 아파트 단지를 층 2로 잡고 동일한 조사를 시행하였다.

$$\hat{\mu}_c = \frac{\sum_{h=1}^{H}N_h\bar{\tau}_h}{\sum_{h=1}^{H}N_h\overline{M}_h} = \frac{500(37.56) + 300(29.2)}{500(3.76) + 300(3.80)} = 9.1192$$

$$\hat{K} = \sum_{h=1}^{H}\widehat{M}_h = \sum_{h=1}^{H}N_h\overline{M}_h = 500(3.76) + 300(3.80) = 3020$$

$$\widehat{Var}(\hat{\mu}_c) = \frac{1}{K^2}\sum_{h=1}^{H}N_h(N_h - n_h)\frac{s_{eh}^2}{n_h} = \frac{1}{3020^2}\left\{500(500-25)\frac{37.565}{25} + 300(300-15)\frac{18.472}{15}\right\} = 0.05$$

모평균에 대한 95%신뢰구간(8.67, 9.57)

6.5크기비례확률표집(sampling with probabilities proportional to size,복

원표집가정)

표집확률 : $z_i = M_i/K$, 표집비중 (sampling weight) : $w_i = 1/z_i = K/M_i$

과	크기(M_i)	표집확률(z_i)	서적수(τ_i)	누적크기법	비례배정 (자기가중표본)	
통계학과	500	5/10	60	1-5	50	
컴퓨터과학과	300	3/10	40	6-8	30	
수학과	200	2/10	20	9-10	20	
학계	1000(K)	1	120		100	

$$\hat{\tau}_{st} = \sum_{h=1}^{H}\sum_{j=1}^{n_h}\frac{N_h}{n_h}y_{hj} = \sum_{h=1}^{H}\sum_{j=1}^{n_h}w_h y_{hj}$$

$\hat{\tau}_{pps} = w_i\tau_i = \tau_i/z_i$(집락 1개를 선택하는 경우)

예. 통계학과 표집 $\hat{\tau}_{pps} = 2(60) = 120$, 수학과 표집 $\hat{\tau}_{pps} = 5(20) = 100$

만일 두 개 집락표집 $\hat{\tau} = (120+100)/2 = 110$

• 크기 K의 모집단을 구성하는 N개 집락들에게 크기비례확률표집으로 n개 집락을 부등확률 표집한다.

$$\hat{\tau}_{pps} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\tau_i}{z_i} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\tau_i}{M_i/K} = \frac{K}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\tau_i}{M_i} = \frac{K}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu_i,\quad \widehat{Var}(\hat{\tau}_{pps}) = \frac{K^2}{n}\frac{\sum_{i=1}^{n}(\mu_i - \hat{\mu}_{pps})^2}{n-1}$$

$$\hat{\mu}_{pps} = \frac{\hat{\tau}_{pps}}{K} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu_i,\quad \widehat{Var}(\hat{\mu}_{pps}) = \frac{1}{n}\frac{\sum_{i=1}^{n}(\mu_i - \hat{\mu}_{pps})^2}{n-1}$$

예 6.6 기초통계학 강좌는 모두 N=12게로 총 K=642명이 수강하고 있다(기각적 방법)

① 1에서 N 사이의 난수 R_1를 추출한다.

② 1에서 max{M_i}사이의 난수 R_2를 추출한다. 만일 이 난수가 M_i이하면 집락 i를 표본으로 선택하고, 아니면 ①로 돌아간다.

③ 바라는 표본크기를 얻으면 중지한다.

$$\hat{\tau}_{pps} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\tau_i}{z_i} = \frac{2791.3+3268.4+3939.5+4012.5+2791.3}{5} = 3360.6$$

$$\hat{se}(\hat{\tau}_{pps}) = \frac{1}{\sqrt{5}}\sqrt{\frac{(2791.3-3360.6)^2+\cdots+(2791.3-3360.6)^2}{5-1}} = 266.16$$

$$\hat{\mu}_{pps} = \frac{\hat{\tau}_{pps}}{K} = \frac{3360.6}{642} = 5.23$$

$$\hat{se}(\hat{\mu}_{pps}) = \frac{266.16}{642} = 0.42$$

6.6 세 가지 추정법의 비교

선택방법	추정량	성질
등확률 비복원	비편향추정량 $\hat{\tau}_u = \frac{N}{n}\sum_{i=1}^{n}\tau_i$	비편향
등확률 비복원	비추정량 $\hat{\tau}_r = K\hat{\mu}_r = \hat{K}\hat{\mu}_r$	편향
부등확률 복원	pps 추정량 $\hat{\tau}_{pps} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\tau_i}{z_i}$	비편향

6.7 이단집락표집

$$\hat{\tau}_u = \frac{N}{n}\sum_{i=1}^{n}\tau_i,\ \ \hat{\tau}_i = \frac{M_i}{m_i}\sum_{j=1}^{m_i}y_{ij} = M_i\frac{t_i}{m_i} = M_i\overline{y}_i$$

- $\hat{\tau}_u = \frac{N}{n}\sum_{i=1}^{n}\hat{\tau}_i = \frac{N}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{M_i}{m_i}\sum_{j=1}^{m_i}y_{ij} = \frac{N}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{M_i}{m_i}t_i = \frac{N}{n}\sum_{i=1}^{n}M_i\overline{y}_i$

$$Var(\hat{\tau}_u) = N^2\frac{\sigma_b^2}{n}\left(\frac{N-n}{N}\right) + \frac{N}{n}\sum_{i=1}^{N}M_i^2\left(\frac{M_i-m_i}{M_i}\right)\frac{\sigma_i^2}{m_i}, \qquad \sigma_b^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(\tau_i-\overline{\tau})^2,$$

$$\sigma_i^2 = \frac{1}{M_i-1}\sum_{j=1}^{M_i}(y_{ij}-\mu_i)^2$$

$$\widehat{Var}(\hat{\tau}_u) = N^2\frac{s_b^2}{n}\left(\frac{N-n}{N}\right) + \frac{N}{n}\sum_{i=1}^{n}M_i^2\left(\frac{M_i-m_i}{M_i}\right)\frac{s_i^2}{m_i}, \qquad s_b^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\hat{\tau}_i-\overline{t})^2,$$

$$s_i^2 = \frac{1}{m_i-1}\sum_{j=1}^{m_i}(y_{ij}-\overline{y}_i)^2$$

- $\hat{\mu}_u = \hat{\tau}_u/K$

$$\widehat{Var}(\hat{\mu}_u) = \frac{1}{K^2}\left\{N^2\frac{s_b^2}{n}\left(\frac{N-n}{N}\right) + \frac{N}{n}\sum_{i=1}^{n}M_i^2\left(\frac{M_i-m_i}{M_i}\right)\frac{s_i^2}{m_i}\right\}$$

$$= \frac{1}{\overline{M}^2}\left(\frac{N-n}{N}\right)\frac{s_b^2}{n} + \frac{1}{nN\overline{M}^2}\sum_{i=1}^{n}M_i^2\left(\frac{M_i-m_i}{M_i}\right)\frac{s_i^2}{m_i}$$

- 모비율 추정

$$\hat{p}_i = a_i/m_i,\ \ \overline{p} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\hat{p}_i,$$

$$\widehat{Var}(\overline{p}) = \frac{1}{K^2}\left\{N^2\left(\frac{N-n}{N}\right)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(M_i\hat{p}_i - \sum_{i=1}^{n}\hat{p}_i/n\right)^2 + \frac{N}{n}\sum_{i=1}^{n}M_i^2\left(\frac{M_i-m_i}{M_i}\right)\frac{\hat{p}_i(1-\hat{p}_i)}{m_i-1}\right\}$$

$$\widehat{Var}(\overline{p}) = \frac{N-n}{nN}\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\hat{p}_i-\overline{p})^2 + \frac{1}{nN}\frac{M-m}{M}\frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{n}\hat{p}_i(1-\hat{p}_i),$$

$$(M_1 = \cdots = M_N = M, \quad m_1 = \cdots = m_n = m)$$

예6.7 N=60개 학과가 있다. 교수들의 주당 평균 강의준비 시간을 추정하고자, n=6개 학과를 임의표집한 다음, 선택된 학과마다 약 50%의 교수들을 임의표집하여 조사를 하였다.

$$\hat{\tau}_u = \frac{N}{n}\sum_{i=1}^{n}\hat{\tau}_i = \frac{60}{6}(1375.337) = 13753.37$$

$$\hat{\mu}_u = \hat{\tau}_u / K = \frac{13753.37}{470} = 29.26,\ \ K = 60(7.833) = 470$$

$$\widehat{Var}(\hat{\mu}_u) = \frac{1}{K^2}\left\{N^2 \frac{s_b^2}{n}\left(\frac{N-n}{N}\right) + \frac{N}{n}\sum_{i=1}^{n} M_i^2 \left(\frac{M_i - m_i}{M_i}\right)\frac{s_i^2}{m_i}\right\}$$

$$= \frac{1}{470^2}\left\{60^2 \frac{13732.191}{6}\left(\frac{60-6}{60}\right) + \frac{60}{6}(2064.1342)\right\}$$

$$= 33.665$$

예 6.8 소나무에 생기는 솔잎혹파리 병에 대한 연구를 위하여 각 9그루씩의 소나무 묘목이 심겨진 160개 온실을 마련하였다. 40개 온실을 임의표집하고, 또 표집된 온실마다 3그루씩 다시 임의표집하여 병의 존재 여부를 확인하였다. 그 결과 22개 온실에서는 병에 걸린 묘목이 없었고, 11개 온실에서는 1그루씩, 4개 온실에서는 2그루씩, 3개 온실에서는 3그루 모두 병에 걸린 것으로 집계되었다.

K=1440, N=160, n=40, M=9, m=3

$$\bar{p} = \frac{28}{120}$$

$$\widehat{Var}(\bar{p}) = \frac{160-40}{40(160)}\frac{1}{40-1}\sum_{i=1}^{n}(\hat{p}_i - \bar{p})^2 + \frac{1}{40(160)}\frac{9-3}{9}\frac{1}{3-1}\sum_{i=1}^{n}\hat{p}_i(1-\hat{p}_i) = 0.00201$$

6.7.2 비추정

n 개 데이터 { $(\hat{\tau}_1, M_1), \cdots, (\hat{\tau}_n, M_n)$}

- $\hat{\mu}_r = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}\hat{\tau}_i}{\sum_{i=1}^{n} M_i} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} M_i \bar{y}_i}{\sum_{i=1}^{n} M_i}$, $\widehat{Var}(\hat{\mu}_r) = \dfrac{1}{\overline{M}^2}\left[\left(\dfrac{N-n}{N}\right)\dfrac{s_r^2}{n} + \dfrac{1}{nN}\sum_{i=1}^{n} M_i^2 \left(\dfrac{M_i - m_i}{M_i}\right)\dfrac{s_i^2}{m_i}\right]$

$$s_r^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\hat{\tau}_i - M_i\hat{\mu}_r)^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} M_i^2 (\bar{y}_i - \hat{\mu}_r)^2,\ \ s_i^2 = \frac{1}{m_i - 1}\sum_{j=1}^{m_i}(y_{ij} - \bar{y}_i)^2$$

- $\hat{\tau}_r = K\hat{\mu}_r$, $\widehat{Var}(\hat{\tau}_r) = N^2\left[\left(\dfrac{N-n}{N}\right)\dfrac{s_r^2}{n} + \dfrac{1}{nN}\sum_{i=1}^{n} M_i^2 \left(\dfrac{M_i - m_i}{M_i}\right)\dfrac{s_i^2}{m_i}\right]$

- $\hat{p}_r = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} M_i \hat{p}_i}{\sum_{i=1}^{n} M_i}$, $\widehat{Var}(\hat{p}_r) = \dfrac{1}{\overline{M}^2}\left[\left(\dfrac{N-n}{N}\right)\dfrac{s_r^2}{n} + \dfrac{1}{nN}\sum_{i=1}^{n} M_i^2 \left(\dfrac{M_i - m_i}{M_i}\right)\dfrac{\hat{p}_i(1-\hat{p}_i)}{m_i - 1}\right]$

$$s_r^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(M_i\hat{p}_i - M_i\hat{p}_r)^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} M_i^2 (\hat{p}_i - \hat{p}_r)^2$$

예 6.9 예 6.7에서 교수들의 주당 평균 강의준비 시간을 추정

$$\hat{\mu}_r = \frac{\sum_{i=1}^{n} \hat{\tau}_i}{\sum_{i=1}^{n} M_i} = \frac{1375.337}{47} = 29.26$$

$$\widehat{Var}(\hat{\mu}_r) = \frac{1}{\overline{M}^2}\left[\left(\frac{N-n}{N}\right)\frac{s_r^2}{n} + \frac{1}{nN}\sum_{i=1}^{n} M_i^2\left(\frac{M_i - m_i}{M_i}\right)\frac{s_i^2}{m_i}\right]$$

$$= \frac{1}{7.833^2}\left[\left(\frac{60-6}{60}\right)\frac{3534.60}{6} + \frac{1}{6(60)}(2064.1342)\right] = 8.735$$

6.7.3 동일 크기의 부표집

$M_1 = \cdots = M_N = M, \quad m_1 = \cdots = m_n = m$

$$\hat{\mu} = \frac{N}{Kn}\sum_{i=1}^{n}\frac{M}{m}\sum_{j=1}^{m} y_{ij} = \frac{1}{nm}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} y_{ij} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\overline{y}_i$$

$$\widehat{Var}(\hat{\mu}) = \frac{1}{M^2}\left(\frac{N-n}{N}\right)\frac{s_b^2}{n} + \frac{1}{nN}\left(\frac{M-m}{M}\right)\sum_{i=1}^{n}\frac{s_i^2}{m},$$

$$s_b^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\hat{\tau}_i - \overline{t})^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(M\overline{y}_i - \sum_{i=1}^{n}\hat{\tau}_i/n)^2 = \frac{M^2}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\overline{y}_i - \hat{\mu})^2,$$

$$s_i^2 = \frac{1}{m_i - 1}\sum_{j=1}^{m_i}(y_{ij} - \overline{y}_i)^2$$

요인	자유도	제곱합	평균제곱
집락간제곱합(SSB)	$n-1$	SSB= $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(\overline{y}_i - \hat{\mu})^2$	MSB=SSB/(n-1)
집락내제곱합(SSW)	$n(m-1)$	SSW= $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(y_{ij} - \overline{y}_i)^2$	MSW=SSW/n(m-1)
총제곱합(SST)	$nm-1$	SST= $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(y_{ij} - \hat{\mu})^2$	

$$\widehat{Var}(\hat{\mu}) = \frac{N-n}{N}\frac{MSB}{nm} + \frac{M-m}{M}\left(\frac{1}{N}\right)\frac{MSW}{m}$$

(1) n, m의 결정

$C = c_0 + c_1 n + c_2 nm$(비용함수), c_0: 고정비용, c_1 : psu 한 단위를 조사하는데 드는 비용,

c_2 : ssu 한 단위를 조사하는데 드는 비용

$$Var(\hat{\mu}) = \left(\frac{N-n}{N}\right)\frac{1}{n}\left(\frac{\sigma_b}{M}\right)^2 + \frac{1}{nm}\left(\frac{M-m}{M}\right)\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{\sigma_i^2}{N}\right) = \left(\frac{N-n}{N}\right)\frac{1}{n}\widetilde{\sigma}_b^2 + \left(\frac{M-m}{M}\right)\frac{\widetilde{\sigma}_w^2}{nm}$$

$$Var(\hat{\mu}) \approx \frac{\widetilde{\sigma}_b^2}{n} + \frac{\widetilde{\sigma}_w^2}{nm}$$

- 목적 : minimize $Var(\hat{\mu}) \approx \frac{\widetilde{\sigma}_b^2}{n} + \frac{\widetilde{\sigma}_w^2}{nm}$

• 조건 : $C = c_1 n + c_2 nm$

• 편미분 :

$$\frac{\partial L}{\partial n} = -\frac{\widetilde{\sigma}_b^2}{n^2} - \frac{\widetilde{\sigma}_w^2}{n^2 m} + \lambda(c_1 + c_2 m) = 0, \qquad \frac{\partial L}{\partial m} = -\frac{\widetilde{\sigma}_w^2}{nm^2} + \lambda c_2 n = 0$$

• 결과 $\lambda = \frac{\widetilde{\sigma}_b^2}{c_1 n^2}$, $m = \sqrt{\frac{c_1}{c_2}\frac{\widetilde{\sigma}_w^2}{\widetilde{\sigma}_b^2}} = \sqrt{\frac{c_1}{c_2}\frac{m\,MSW}{(MSB - MSW)}}$, $n = \frac{C - c_0}{c_1 + mc_2}$

6.7.4 pps 표집(크기비례확률표집)

독립된 n개의 집락평균들 { $\overline{y_1}, \cdots, \overline{y_n}$}

• $\hat{\mu}_{pps} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\overline{y}_i$, $\widehat{Var}(\hat{\mu}_{pps}) = \frac{1}{n}\frac{\sum_{i=1}^{n}(\overline{y}_i - \hat{\mu}_{pps})^2}{n-1}$ • $\hat{\tau}_{pps} = K\hat{\mu}_{pps}$,

$$\widehat{Var}(\hat{\tau}_{pps}) = \frac{K^2}{n}\frac{\sum_{i=1}^{n}(\overline{y}_i - \hat{\mu}_{pps})^2}{n-1}$$

$w_i = \frac{1}{n}\frac{M_i}{m_i}\frac{1}{z_i} = \frac{K}{nm_i}$(i 번째 psu 한 원소의 표집비중, $m_i = m$이면 $w_i = \frac{K}{nm}$로 자기가중표본)

예 6. 10 예 6.6에서 다섯명의 학생들을 임의표집하여 공부시간을 조사하였다.

$\hat{\tau}_{pps} = K\hat{\mu}_{pps} = 642(5.32) = 3415.44$

$$\widehat{Var}(\hat{\tau}_{pps}) = \frac{K^2}{n}\frac{\sum_{i=1}^{n}(\overline{y}_i - \hat{\mu}_{pps})^2}{n-1} = \frac{944679.89}{5} = 188935.98$$

6.8 삼단집락표집

$$\hat{\tau} = \frac{N}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{M_i}{m_i}\sum_{j=1}^{m_i}\frac{L_{ij}}{l_{ij}}\sum_{k=1}^{l_{ij}}y_{ijk}, \ \hat{\mu} = \hat{\tau}/K$$

$$\widehat{Var}(\hat{\tau}) = N^2\left(\frac{N-n}{N}\right)\frac{s_b^2}{n} + \frac{N}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[M_i^2\left(\frac{M_i - m_i}{M_i}\right)\frac{s_i^2}{m_i} + \frac{M_i}{m_i}\sum_{j=1}^{m_i}L_{ij}^2\left(\frac{L_{ij} - l_{ij}}{L_{ij}}\right)\frac{s_{ij}^2}{l_{ij}}\right],$$

$$s_b^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\hat{\tau}_i - \sum_{i=1}^{n}\hat{\tau}_i/n)^2, \qquad s_i^2 = \frac{1}{m_i - 1}\sum_{j=1}^{m_i}(\hat{\tau}_{ij} - \sum_{j=1}^{m_i}\hat{\tau}_{ij}/m_i)^2,$$

$$s_{ij}^2 = \frac{1}{l_{ij} - 1}\sum_{k=1}^{l_{ij}}(y_{ijk} - \sum_{k=1}^{l_{ij}}y_{ijk}/l_{ij})^2,$$

$$\hat{\tau}_i = \frac{M_i}{m_i}\sum_{j=1}^{m_i}\hat{\tau}_{ij}, \ \hat{\tau}_{ij} = \frac{L_{ij}}{l_{ij}}\sum_{k=1}^{l_{ij}}y_{ijk}$$

$$\widehat{Var}(\hat{\tau}) \approx N^2\frac{s_b^2}{n}(N \gg n)$$

예 6.11 N=580개 초등학교 n=5개 학교를 임의표집하였다. 각 학교마다 학급 수는 M=6,

또 학급의 학생수는 L=40명씩이다. K=580(6)(40)=139200. 학교 마다 m=2개씩의 학급을 임의 선택하고, 또 학급마다 $l=4$명씩의 학생들을 임의 선택하여 학생들이 학원에서 따로 배우는 과외 과목의 수를 조사하였다.

$$\hat{\tau}=\frac{N}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{M_i}{m_i}\sum_{j=1}^{m_i}\frac{L_{ij}}{l_{ij}}\sum_{k=1}^{l_{ij}}y_{ijk}=\frac{580}{5}\frac{6}{2}\frac{40}{4}(23+\ \cdots\ +17)=584640,\quad \hat{\mu}=\frac{584640}{139200}$$

$$\widehat{Var}(\hat{\tau})\approx N^2\frac{s_b^2}{n}=580^2\frac{22320}{5}=1501689600,\quad \widehat{Var}(\hat{\mu})=\frac{1501689600}{139200^2}=0.0775$$