미적분학

채갑병[1]

2008년 3월 2일

제 0 장 수집합과 함수

0.1 수집합

$\mathbb{N}$: 자연수의 집합

$\mathbb{Z}$: 정수의 집합

$\mathbb{Q}$: 유리수의 집합

$\mathbb{R}$: 실수의 집합

$\mathbb{C}$: 복소수의 집합

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

0.2 실수의 성질

-실수의 성질

1. field - 사칙연산
2. order 구조 - 순서 구조
3. completeness - 완비성

정의 1. *$A \subset \mathbb{R}$이고, 공집합이 아니다.*
모든 $x \in A$ 에 대하여 $x \leq u$ $[x \geq u]$ 인 실수 u 가 존재 할때
집합 A 는 위로 유계(bounded above)[아래로 유계(bounded below)]라 하고
u를 A의 상계(upper bound)[하계(lower bound)] 라 한다.
A is bounded above and below $\Leftrightarrow$ A is bounded.
$supA$: A의 상계들중 가장 작은 상계 = 상한 = least upper bound
$infA$: A의 하계들중 가장 큰 하계 = 하한 = greatest lower bound ♦

예제 2. *$A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdot\}$일때 1보다 크거나 같은 실수는 어느 것이나 A 의 상계가 되며, 0 보다 작거나 같은 실수는 A의 하계가 된다. 상한과 하한은 무엇인가?*

예제 3. *집합 $A = \{x|2 \leq x < 3\}$ 는 유계이며 2는 A의 하한이고 3은 A의 상한이다. 이때 $2 \in A$ 이지만 $3 \notin A$ 이다.* ♦

정리 4. *(완비성의 공리)*
공집합이 아닌 실수 $\mathbb{R}$의 부분집합 A가 위로[아래로] 유계이면 상한[하한]을 갖는다.

예제 5. *집합* $A = \{x \in \mathbb{Q} | x^2 < 2\}$*는 위로 유계이고* $\sqrt{2}$*는* A*의* $\mathbb{R}$*에서의 상한이다. 그러나* $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ *이므로 유리수의 집합* $\mathbb{Q}$*는 완비성의 공리를 만족하지 않는다.*

예제 6. *(아르키메데스의 성질)*
$a \in \mathbb{R}$*이면* $a < n$*인 자연수* n*이 존재 함을 보여라.*

증명 $a < n$인 자연수 n 이 존재하지 않는 다고 가정하자
$\Longrightarrow$ 모든 $n \in \mathbb{N}$ 에 대하여 $n \leq a$.
$\Longrightarrow$ a 는 $\mathbb{N}$ 의 상계이다.
$\Longrightarrow$ 완비성 공리에 의해 상한 $\alpha \in \mathbb{R}$ 가 존재.
$\Longrightarrow$ $\alpha - 1 < \alpha$ 이므로 $\alpha - 1$는 $\mathbb{N}$ 의 상계가 아니다.
$\Longrightarrow$ $\alpha - 1 < m$ 인 m 이 $\mathbb{N}$ 에 존재한다.
$\Longrightarrow$ $\alpha < m + 1$ 이고 $m + 1 \in \mathbb{N}$ 이다.
$\Longrightarrow$ α 가 $\mathbb{N}$의 상한이라는 가정에 모순 .

정의 7. *수학적 귀납법*
(1) p(1) 이 참임을 밝힌다.
(2) 임의의 자연수 k *에 대하여* $p(k)$ *가 성립함을 가정하면,* $p(k+1)$*도 성립한다는 것을 보인다.*

예제 8.

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

을 증명.

증명 When $n = 1$, 1=1
$1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}$ 이 성립한다고 가정하자.

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \cdots + k + (k+1) &= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) \\ &= \frac{k(k+1)}{2} + \frac{2(k+1)}{2} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2}. \end{aligned}$$

정의 9. *구간*

개구간(open interval) :

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$$

$(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} | x < b\}$

$(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} | a < x\}$

폐구간(closed interval) :

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$

$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} | x \leq b\}$

$[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x\}$

반개구간(half open interval) :

$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b\}$

$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\}$

$\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$

정의 10. *절대값 = absolute value*

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$$

$$|a| = \sqrt{a^2}$$

정의 11. $|a - b|$ *: a 와 b 사이의 거리.*

예제 12. *삼각 부등식 $|a + b| \leq |a| + |b|$가 성립함을 보여라.*

증명

$$a + b \leq |a| + |b|$$

이고

$$-(a + b) \leq |a| + |b|$$

가 되므로 증명 끝.

0.3 함수

정의 13. *X, Y : 집합들*

$f : X \longrightarrow Y$: 함수

규칙 : X 의 각 원소 x 에 오직 하나의 Y 의 원소 y를 대응시킨다

X : f 의 정의 구역, domain, set of inputs

Y : f 의 공변역, *codomain, set of outputs*

$f(X) = \{y|f(x) = y, \text{ for all } x \in X\}$: 치역, *range*

$\{(x, f(x))|x \in X\}$: f의 그래프

예제 14.

$$f(x) = \sqrt{x}$$

제한 조건 : x *cannot be less than zero.*

정의역 $= D = \{x|x \geq 0\}$

예제 15.

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

제한 조건 : x *cannot be zero*

$D = \{x|x \neq zero\}$

예제 16.

$$f(x) = \log x$$

제한 조건 : x *should be greater than zero*

$D = \{x|x > 0\}$

예제 17.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

제한 조건 :

$\sqrt{x^2 - 1}$ *cannot be zero and* $x^2 - 1$ *cannot be less than zero*

$\Longleftrightarrow x^2 - 1$ *greater than zero*

$D = \{x|x < -1 \text{ or } x > 1\}$

정리 18. *c:* 상수 일때

- $(cf)(x) = cf(x)$
- $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$

- $(fg)(x) = f(x)g(x)$
- $(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \qquad (g(x) \neq 0)$

예제 19.

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$\{x|x \neq zero\}$ *and* $\{x|x < -1$ *or* $x > 1\}$

$D = \{x|x < -1$ *or* $x > 1\}$

정의 20. *Composition function, 합성함수*

f, g : 함수들

$(g \circ f)(x) = g(f(x))$

예제 21. *합성함수의 정의구역*

$$f(x) = x^2, \qquad g(x) = \sqrt{x}$$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = \sqrt{x^2} = |x|,\ D = \mathbb{R}$

$H = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 = x,\ D = \{x|x \geq 0\}$

주의 : 함수는 항상 규칙(rule)과 정의구역이 주어져야 한다.

$f(x) = x$ 와 위 예의 $H = x,\ x \geq 0$ 는 다른 함수.

예제 22.

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1,\ x \neq 1.$$

$$f(x) = x + 1.$$

두 함수는 다른 함수 *!!!!*

정의 23. *(역함수, inverse function)* 두 함수 $f : A \longrightarrow B$와 $g : D \longrightarrow E$가 *다음 조건을 만족 할때 서로 다른 함수의 역함수라 부른다.*

1. $A = E$ 이고 $B = D$.

2. 모든 $x \in D$ 에 대하여 $(f \circ g)(x) = x$ 이고, 모든 $x \in A$ 에 대하여 $(g \circ f)(x) = x$이다.

정의 24. *$y = f(x)$ 일때 x 를 f 에 의한 y의 원상(preimage)이라한다.*
$f^{-1}(B) = \{x \in X | f(x) \in B\}$: set of preimages of B.
$f(X) = Y$ 이면 f 를 전사함수(surjection, onto function).
$f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$ 이면 f 를 단사함수 (injection, one-to-one function)
f 가 전사 이고 단사이면 f 를 전단사(bijection, one-to-one and ontofunction) 함수라 한다.
$f : X \longrightarrow Y$ 가 전단사함수이면 f^{-1}: 역함수(inverse function) 가 존재.

정리 25. *함수 $f : X \longrightarrow Y$ 와 $g : Y \longrightarrow Z$ 에 대하여 다음이 성립한다.*
(1) f 와 g 가 단사이면, $g \circ f$ 도 단사이다.
(2) f 와 g 가 전사이면, $g \circ f$ 도 전사이다.
(3) $g \circ f$ 가 단사이면, f 는 단사이다.
(4) $g \circ f$ 가 전사이면, g 도 전사이다.

증명

(3) $f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \Longrightarrow x_1 = x_2$.
(4) $Y \supseteq f(X)$ 이므로 $g(Y) \supseteq g(f(X)) = Z$ 이고 $g(Y) \subseteq Z$ 이므로 $g(Y) = Z$.

정의 26. *$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ 모든 실수 x 에 대하여*
$f(x) = f(-x)$ 이면 함수 f 를 우함수(even function)라 하고 $<$ y 축 대칭 $>$
$f(x) = -f(-x)$ 이면 기함수(odd function)라 $<$ 원점 대칭 $>$ 한다.

정의 27. *다음과 같은 형태의 함수를 n차의 다항식(polynomial)이라 한다.*

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

여기서 $a_0, a_1, \cdots, a_n$(다항식의 계수)은 실수이고, $a_n \neq 0$, $n \geq 0$(n은 정수)) 이다. n을 다항식의 차수라고 한다.

정의 28. *다음과 같은 형태의 함수를 멱함수(power function)이라 한다.*

$$f(x) = x^a$$

$a = n$, $a = 1/n$ (n은 0이 아닌 자연수), 또는 $a = -1$인 경우가 있다.

정의 29. *$p(x)$, $q(x)$가 다항식일 때,*

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}, \ q(x) \neq 0$$

를 유리함수*(rational functions)*라고 한다.

정의 30. *여러개의 다항식들을 사칙연산과 제곱근을 사용하여 새롭게 만든 함수를 대수 함수(algebraic function)라 한다.*

정의 31. *삼각함수, 역삼각함수,*

정의 32. *로그 함수*

정의 33. *대수 함수가 아닌 모든 함수를 초월함수(transcendental function)이라 한다. 삼각 함수, 역삼각 함수, 지수 함수, 로그함수, 등이 여기에 속한다. 8장에서 이러한 함수들은 무한급수로 나타낼 수 있음을 배울 것이다.*