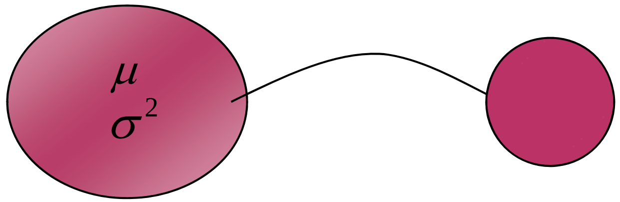
확률및통계

제11장 정규모집단에서의 추론

hylee@silla.ac.kr

소개



모집단 표본

n 이 클 때

$$\frac{\overline{X}-\mu}{s/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

n 이 작을 때

$$\frac{\overline{X}-\mu}{s/\sqrt{n}} \sim ?$$

$$N(\mu,\sigma^2)$$

- 모집단이 정규분포를 이룰 때에만 추론이 가능하다.
  - 모집단이 정규분포 일 때

$$\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

  - σ 를 모를 때는 새로운 분포를 이용해야 한다.

T 분포

- t 분포 (W.C. Gosset, 1908)
  - 모집단이 정규분포 $N(\mu,\sigma^2)$ 를 따를 때 크기 n 인 표본으로부터 $\overline{X},\ s^2$ 을 계산하면

$$\frac{\overline{X}-\mu}{s/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$ (자유도가 $(n-1)$ 인 t 분포)

- t 분포표 읽는 법 (부록의 t 분포표)

  t 가 자유도가 r 인 t 분포를 따를 때, ($t \sim t(r)$)

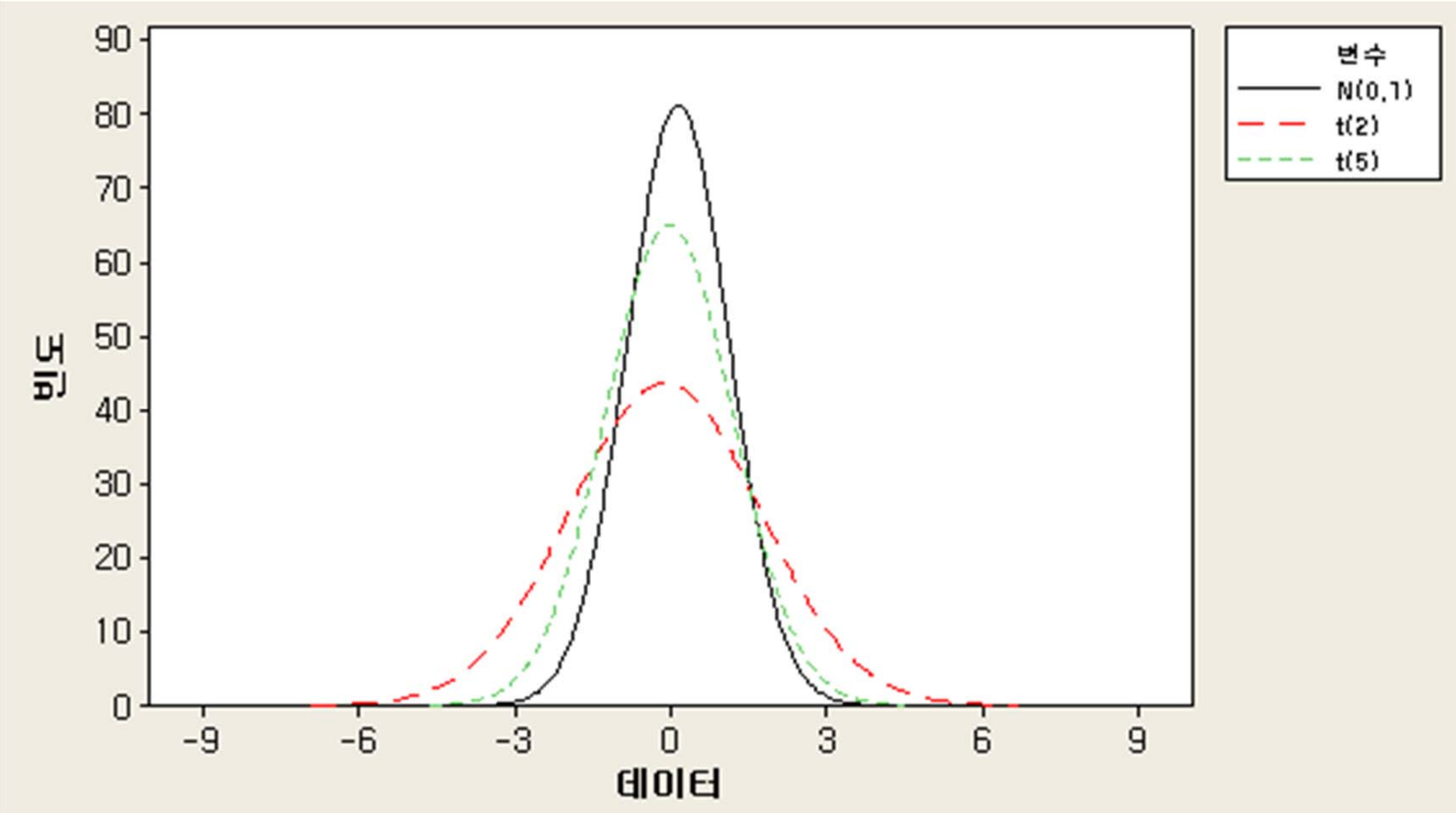
$$P(t > t_\alpha(r)) = \alpha = P(t < -t_\alpha(r))$$

$eg:\quad t_{0.1}(2) = 1.886 \qquad t_{0.1}(10) = 1.372 \qquad z_{0.1} = 1.28$

$\qquad\quad t_{0.05}(9) = 1.833$

$eg:\quad t \sim t(9) \qquad P(-b \le t \le b) = 0.9 \qquad \therefore b = t_{0.05}(9) = 1.833$

다양한 *T* 분포와 표준정규분포의 비교



➔ n 이 클 수록 정규분포에 가까워진다.

μ 의 구간추정

- 모평균 μ 에 대한 구간추정 (n 이 작을 때)
  - 모집단 : $N(\mu, \sigma^2)$
  - 표본으로부터의 추정량 : $\overline{X},\ s^2$ $n \le 30$

$$t = \frac{\overline{X} - \mu}{s / \sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

$$P(|t| < t_{\alpha/2}(n-1)) = 1 - \alpha$$

$$P(\overline{X} - t_{\alpha/2}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + t_{\alpha/2}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}})$$

$100(1-\alpha)\%$ 신뢰구간

$$\overline{X} \pm t_{\alpha/2}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}$$

- σ 가 알려져 있는 경우, s 대신 σ 를 대입하고 $t_{\alpha/2}(n-1)$ 대신 $z_{\alpha/2}$ 를 넣으면 된다.

μ 에 대한 검정

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

$$t = \frac{\overline{X} - \mu_0}{s / \sqrt{n}} \sim t(n-1) \qquad \text{under } H_0$$

$$H_1 : \mu > \mu_0 \qquad R : t \geq t_\alpha(n-1)$$

$$H_1 : \mu < \mu_0 \qquad R : t \leq -t_\alpha(n-1)$$

$$H_1 : \mu \neq \mu_0 \qquad R : |\, t \,| \geq t_{\alpha/2}(n-1)$$

구간 추정과 검정의 관계 - 1

- 정규 모집단에서 표본의 크기가 작을 때,

  μ 에 대한 $100(1-\alpha)\%$ 신뢰구간

$$(\overline{X} - t_{\alpha/2}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}} \quad , \quad \overline{X} + t_{\alpha/2}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}})$$

$$H_0 : \mu = \mu_0 \qquad vs \qquad H_1 : \mu \neq \mu_0$$

$$t = \frac{\overline{X} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \sim t(n-1) \qquad \text{under} \quad H_0$$

- 기각역: $R : |\, t \,| \geq t_{\alpha/2}(n-1)$
- 채택영역: $|\, t \,| < t_{\alpha/2}(n-1)$

$$\overline{X} - t_{\alpha/2}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}} < \mu_0 < \overline{X} + t_{\alpha/2}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}$$

- μ_0 가 신뢰구간에 포함되면 기각하지 않고, 포함되지 않으면 기각.

구간 추정과 검정의 관계 - 2

- 일반적으로

모수 : θ

$100(1-\alpha)\%$ 신뢰구간 : (L, U)

$H_0 : \theta = \theta_0 \quad vs \quad H_1 : \theta \neq \theta_0$ 유의수준 α

$\theta_0 \in (L, U) \Leftrightarrow H_0$를 기각할 수 없다.

$\theta_0 \notin (L, U) \Leftrightarrow H_0$를 기각한다.

표준편차에 대한 추론

- 모집단 $X_1, \cdots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$
- 표본 :

σ 에 대한 추론에 s 를 이용

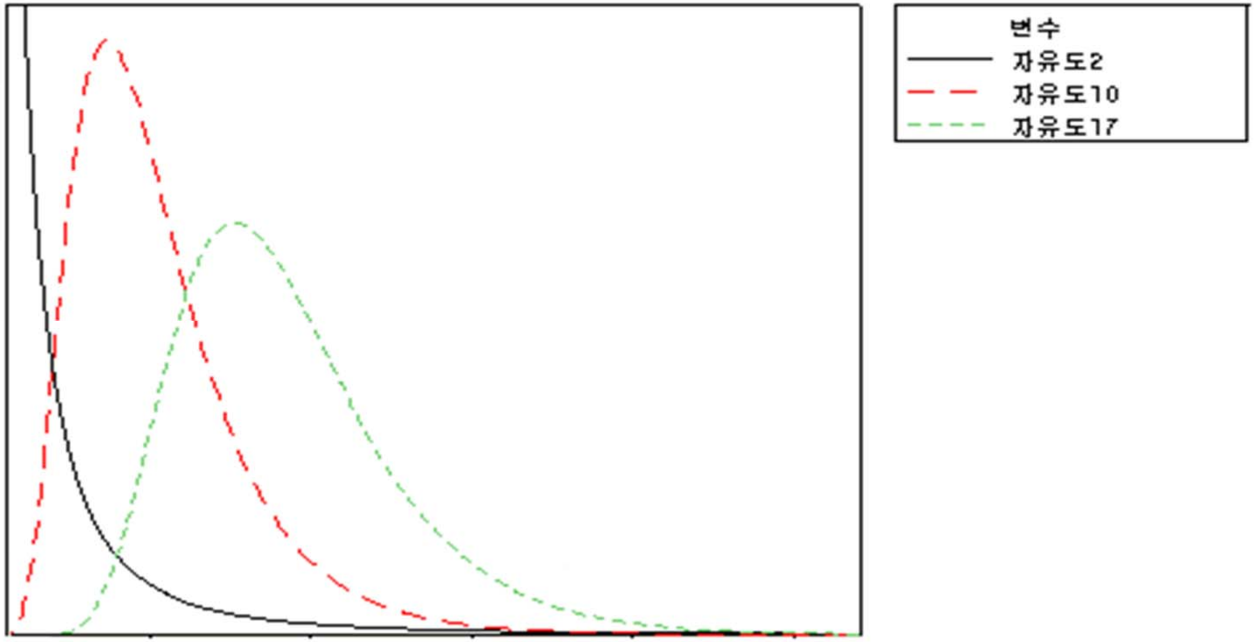
$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum (X_i - \overline{X})^2 \sim ?$$

χ^2분포

- 모집단 $X_1, \cdots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$
- 표본 :

$$\chi^2 = \frac{\sum (X_i - \overline{X})^2}{\sigma^2} = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(\underbrace{n-1}_{\text{자유도}})$$

χ^2 분포



- 양수에서만 분포한다.
- 자유도가 증가할수록 중심도 큰 쪽에 위치하고 퍼짐의 정도도 커진다.
- χ^2 분포표에서와 같이 t 분포표를 이용해서 $\chi^2_{\alpha}(n-1)$ 값을 구한다.

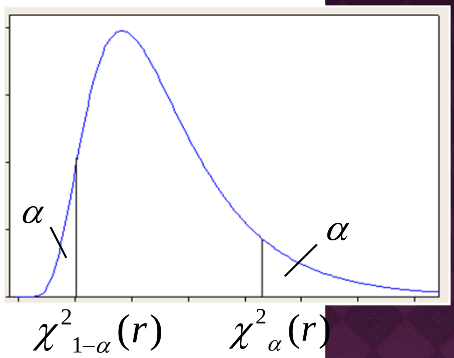
σ 의 신뢰구간

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1) \quad \text{이용}$$

$$P\left(\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) < \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} < \chi^2_{\alpha/2}(n-1)\right) = 1-\alpha$$

$$\Leftrightarrow \quad P\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)} < \sigma^2 < \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right) = 1-\alpha$$

$$\Leftrightarrow \quad P\left(\sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}} < \sigma < \sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}}\right) = 1-\alpha$$



<u>$100(1-\alpha)\%$ 신뢰구간</u>

$$\left(\sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}}\ ,\ \sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}}\right)$$

σ 에 대한 검정

$$H_0 : \sigma = \sigma_0 \qquad (\sigma^2 = \sigma_0^{\ 2})$$

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^{\ 2}} \sim \chi^2(n-1) \qquad \text{under } H_0$$

- 각 대립가설에 의하여 기각역은 다음과 같이 구한다.

$$H_1 : \sigma > \sigma_0 \qquad R : \chi^2 \geq \chi^2_{\alpha}(n-1)$$

$$H_1 : \sigma < \sigma_0 \qquad R : \chi^2 \leq \chi^2_{1-\alpha}(n-1)$$

$$H_1 : \sigma \neq \sigma_0 \qquad R : \chi^2 \geq \chi^2_{\alpha/2}(n-1) \ or \ \chi^2 \leq \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)$$

Thank You!