

- 함수의 연산 :

사칙연산과 식의 전개와 동일

- 예 :

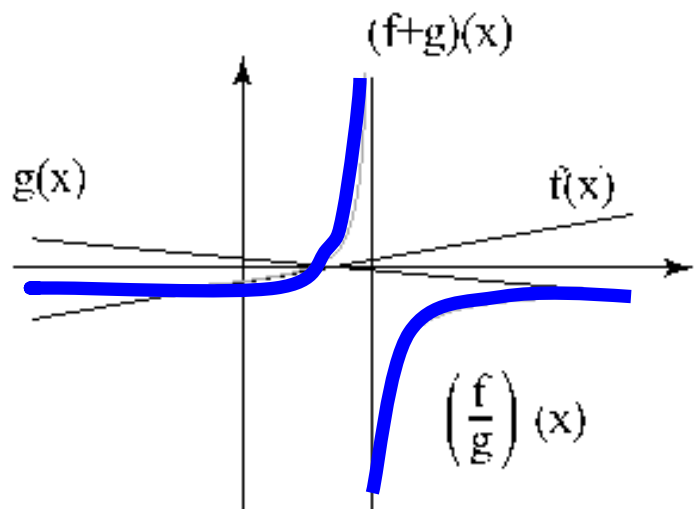
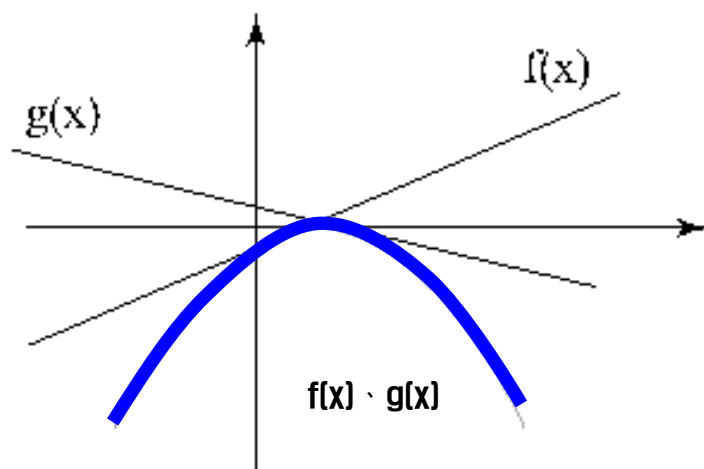
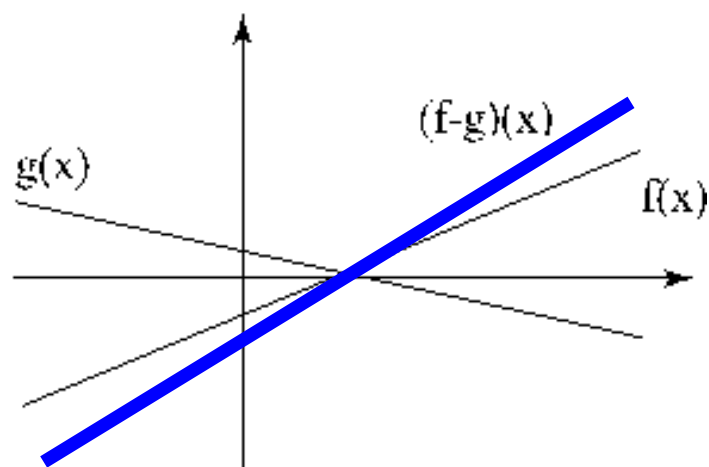
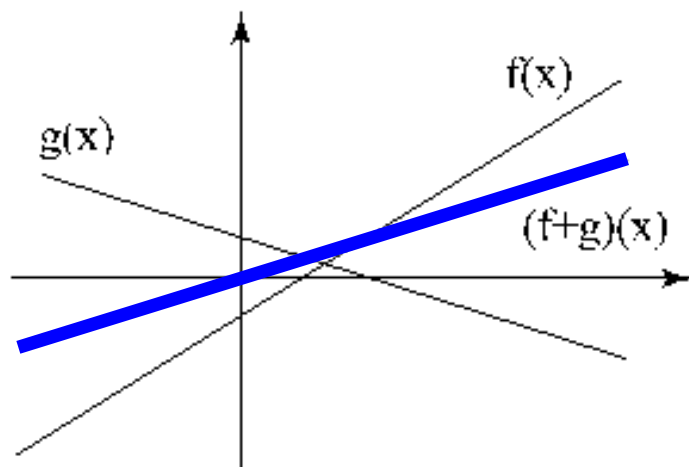
$$f(x) = 2x - 1, \quad g(x) = -x + 1 \text{ 이라 하면,}$$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = (2x - 1) + (-x + 1) = x$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = (2x - 1) - (-x + 1) = 3x - 2$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = (2x - 1)(-x + 1) = -2x^2 + 3x - 1$$

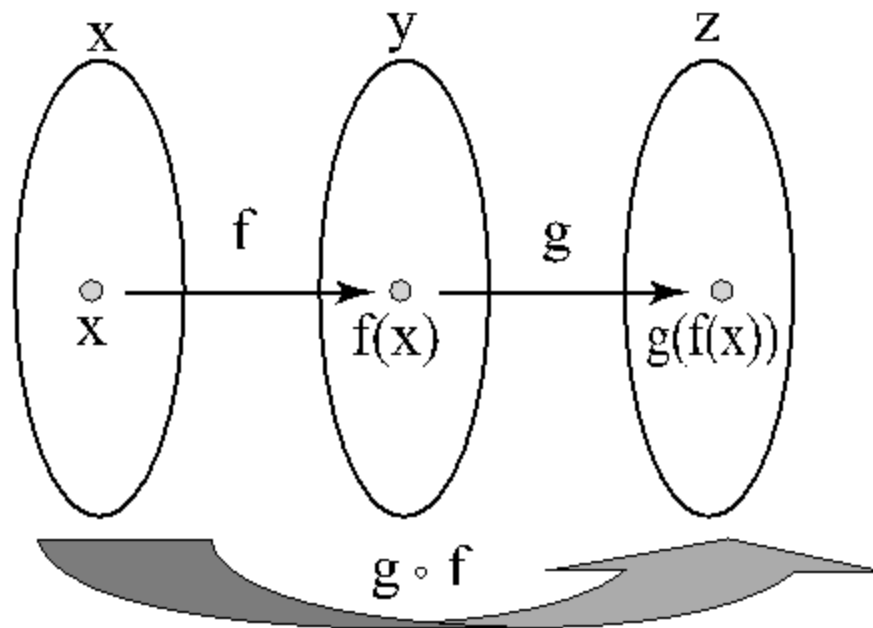
$$(f/g)(x) = f(x)/g(x) = (2x - 1)/(-x + 1)$$



- **합성함수 (composite function)**

두 함수  $f$ 와  $g$ 에 대하여, 함수  $f$ 에 의하여  $x$ 가  $f(x)$ 에 대응되고,  
함수  $g$ 에 의하여  $f(x)$ 가  $g(f(x))$ 에 대응될 때,

이 새로운 함수를  $f$ 와  $g$ 의 합성함수라 한다. 즉,  $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

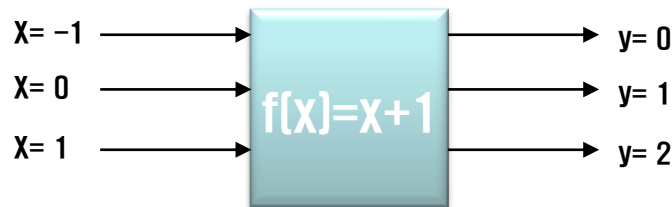


합성함수  $g \circ f$

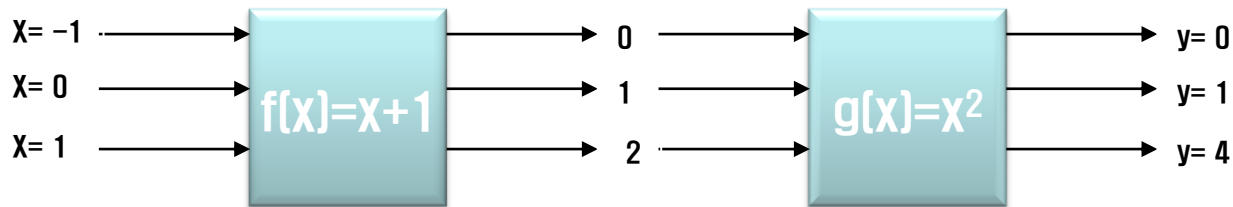
- 함수의 합성은 함수를 두 번 적용하는 것

- $f(x) = x+1$ ,  $g(x) = x^2$

- $f(x)$ 에 함수의 개념을 적용하면



- $f(x)$ 의 값을 다시  $g(x)$ 에 넣으면



$$[g \circ f](x) = g[f(x)]$$

계산되는 순서대로 뒤에서 부터 함수이름을 쓰면 됩니다.

**예제 1-6** 두 함수  $f(x) = \sqrt{x-1}$  과  $g(x) = x^2 + x + 1$  에 대하여  $f \circ g$ 와  $g \circ f$ 를 구하고, 이 함수들의 정의역을 구하여라.

**solution**

**$f(x)$ 에서  $x$ 를  $g(x)$ 로 대체하라는 의미 !!**

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f[g(x)] = \sqrt{g(x) - 1} \\ &= \sqrt{(x^2 + x + 1) - 1} = \sqrt{x^2 + x}\end{aligned}$$

**$g(x)$ 에서  $x$ 를  $f(x)$ 로 대체하라는 의미 !!**

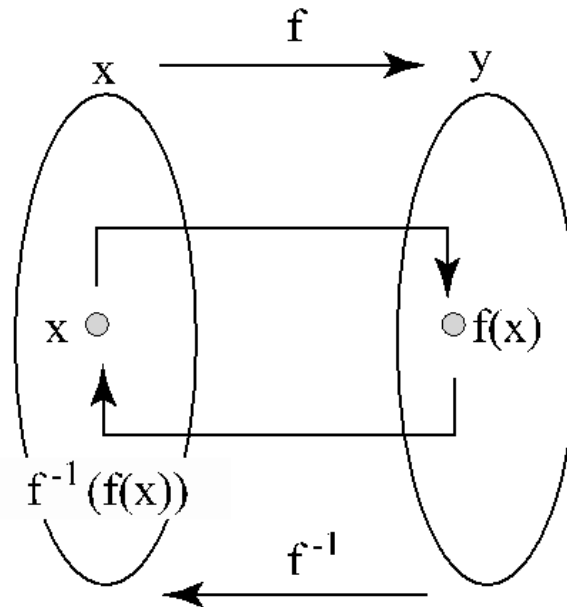
$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g[f(x)] = (f(x))^2 + f(x) + 1 \\ &= (\sqrt{x-1})^2 + \sqrt{x-1} + 1 = x + \sqrt{x-1}\end{aligned}$$

- 역함수 (inverse function) :

전단사함사 함수  $y=f(x)$ 에서 집합  $Y$ 안의 각 원소를  $X$ 안의 원소로 대응시키는 함수 (즉,  $y=f(x)$ 의 치역을 정의역으로 가지는 함수)

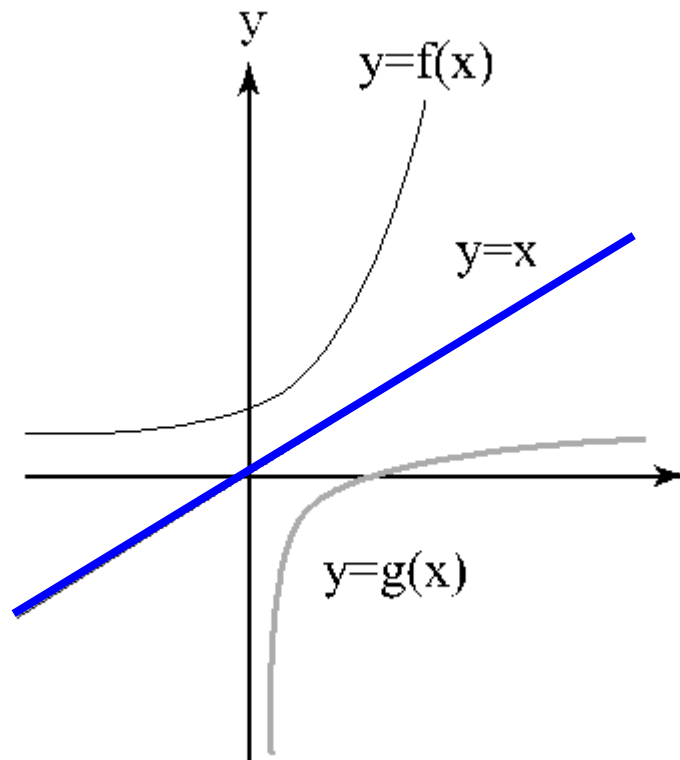
$$g = f^{-1} : Y \rightarrow X$$

$$x = f^{-1}(y)$$



$y = f(x)$ 의 역함수

- 두 함수가 역함수 관계를 갖는다면, 두 함수는 직선  $y = x$  에 관하여 대칭이다.



$y = f(x)$  와 역함수

**예제 1-7** 함수  $f(x) = 3x + 1$  ( $-1 \leq x \leq 3$ )의 역함수를 구하고, 역함수의 정의역과 치역을 구하여라.

**solution**

①  $y = 3x + 1$ 라 놓고  $x$ 를  $y$ 에 대한 식으로 변형  
 $x = \frac{1}{3}(y - 1)$

② 구하고자 하는 역함수는  $x$ 와  $y$ 를 바꾸면  
 $y = \frac{1}{3}(x - 1)$

역함수는  $y = f(x)$ 의 치역을 정의역으로 가지는 함수이므로

원래함수의 치역은  $[-2 \leq y \leq 10]$ 이므로  
역함수의 정의역은  $[-2 \leq x \leq 10]$ 이고,  
역함수의 치역은  $[-1 \leq y \leq 3]$ 이다.



- **다항함수(polynomial function)** : 상수함수  $y=a_0$ 와 항등함수  $y=x$ 를 유한번 덧셈, 뺄셈, 곱셈을 반복하여 얻을 수 있는 함수

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

$$\text{예 : } f(x) = 3x^3 - 0.5x^2 + \cdots + 2x + 0.1$$

※ ※ 최고차수를 봐서 n차 다항함수라고 한다.

- **유리함수(rational function)** : 두 다항함수  $f(x)$ 와  $g(x)$ 의 나눗셈으로 나타낸 함수

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$$

- **무리함수(irrational function)** :  $x$ 에 관한 무리식으로 표현되는 함수

※ 무리식 : 식을 정리했을 때, 근호 안에 문자가 포함되어 있는 식

● **대수함수(algebraic function)** : 대수방정식으로 표현할 수 있는 함수

※ 대수방정식이란 미지수에 관한 대수식(다항식, 유리식 또는 무리식)만으로 이루어진 방정식

※ 즉, 다항식이 대수함수가 아니고 덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈, 거듭제곱에 의해서 다항식으로 변형 할 수 있는 형태의 식을 대수식이라고 한다.

※ 즉, 아래 식은 대수함수인데,

$$f(x) = \frac{{}^5\sqrt{x^4 - 2x + 1} - \sqrt{x + \sqrt{x}} + x - 1}{x^4 - x^3 \sqrt{x} + 2x}$$

이것은 요리조리 정리하면 다항식으로 바꿀 수 있다.

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

● **초월함수(transcendental function)** : 대수함수 이외의 함수

※ 덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈, 거듭제곱을 하여도 다항식으로 변형이 되지 않는 함수

※ 예 : 삼각함수, 지수함수, 로그함수, 쌍곡선함수 및 이러한 함수들의 역함수

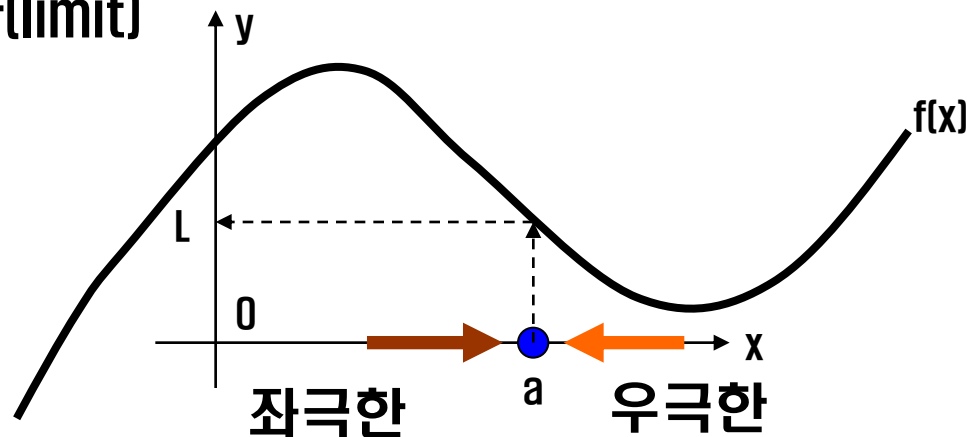
● 극한 :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

❖ 의미 :  $x \rightarrow a$  이면  $f(x) \rightarrow L$  이다.

즉,  $x$ 가  $a$ 에 한없이 가까워지면,  $f(x)$ 는  $L$ 에 수렴한다.

❖  $L$  : 극한(limit)

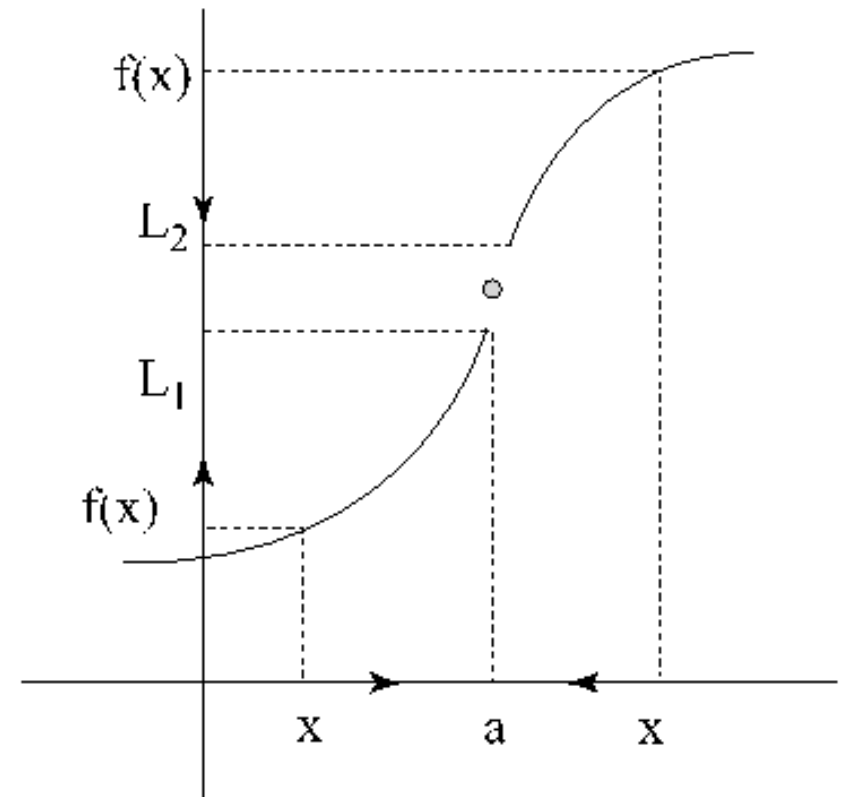
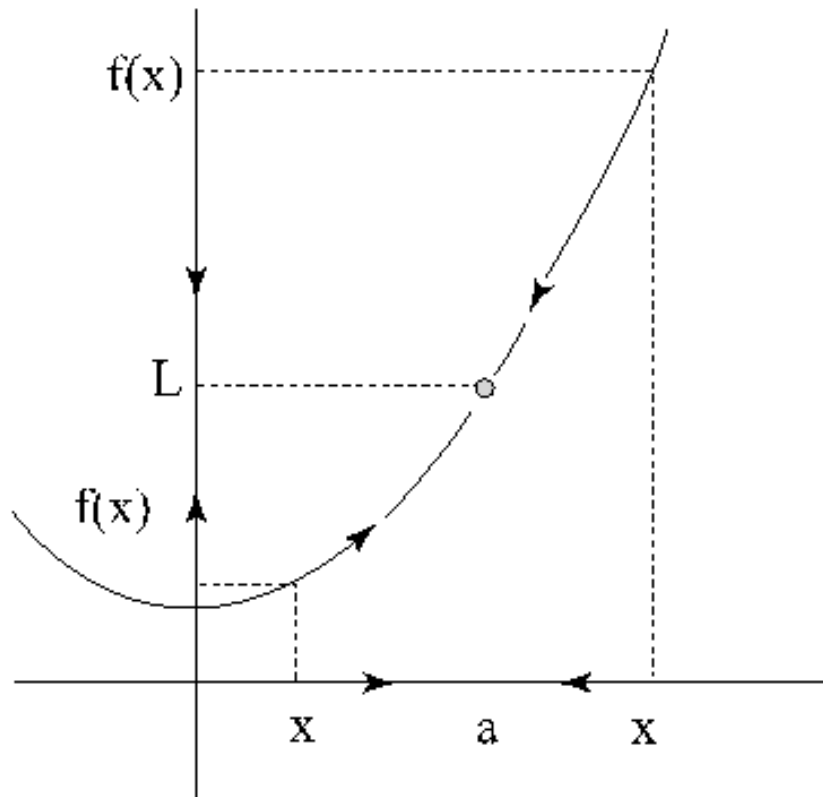


● 좌극한 :

$$\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = L$$

● 우극한 :

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = L$$



극한  $L$ 과 좌극한  $L_1$ , 우극한  $L_2$

다음 함수의 극한을 구하여라.

**예제 1-8**

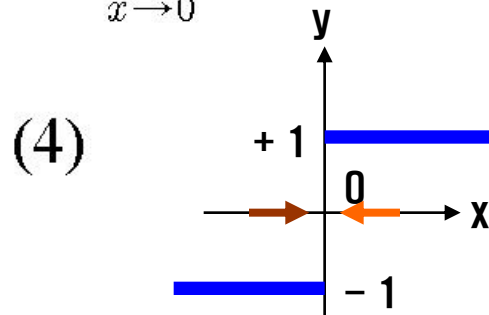
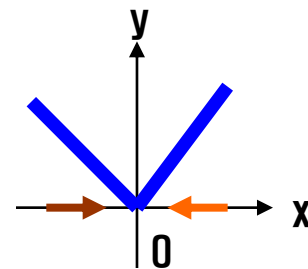
$$(1) \lim_{x \rightarrow 2} x^2 \quad (2) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} \quad (3) \lim_{x \rightarrow 0} |x| \quad (4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$$

**solution**

$$(1) \lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 4$$

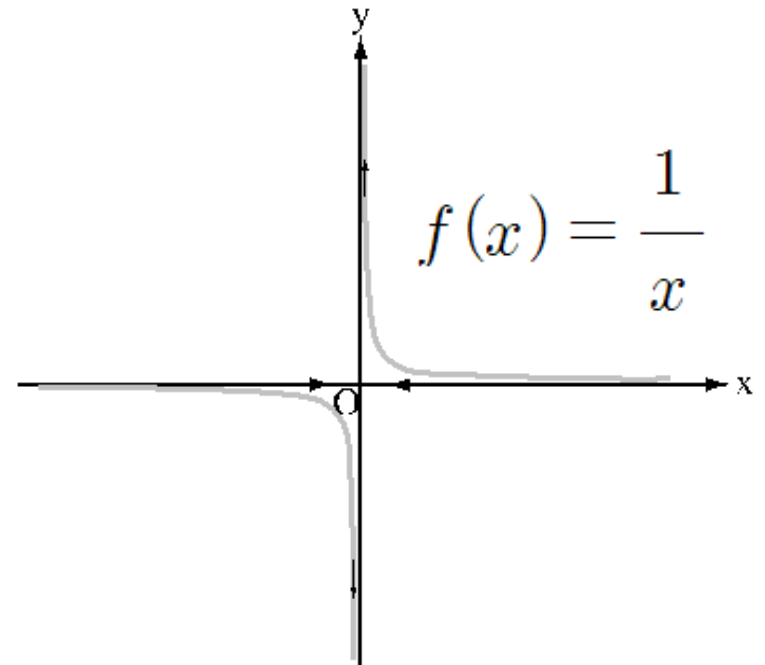
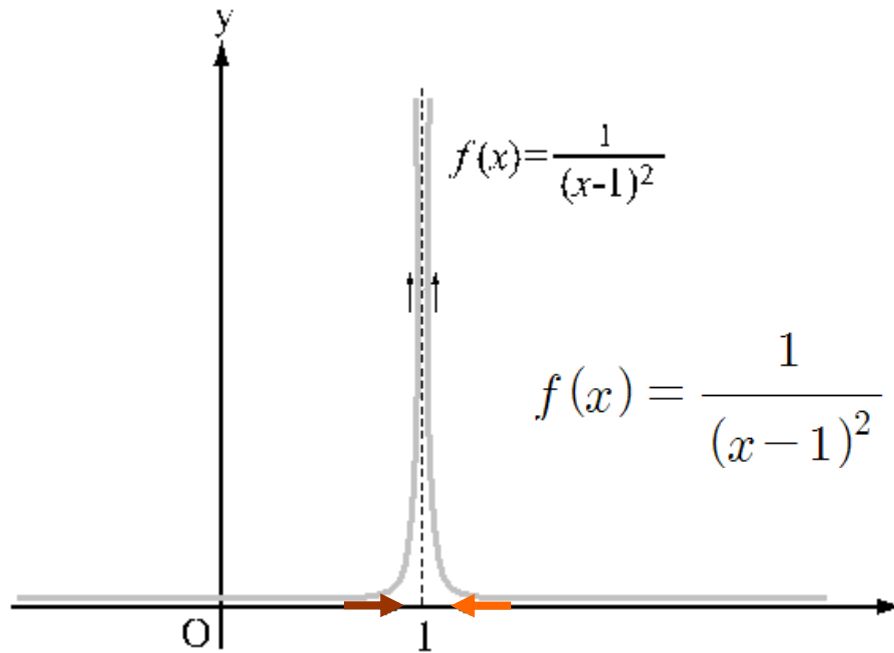
$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0 \text{ 이다.}$$



**좌극한과 우극한이 다르므로 극한이 존재하지 않는다.**

● 함수의 발산

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$$



다음 함수의 극한을 구하여라.

예제 1-9

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{1}{x} \quad (3) \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{x} \quad (4) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{(x-1)^2}$$

solution

$$(1) \ x \rightarrow 0 \text{ 이면 } \frac{1}{x^2} \rightarrow \infty \text{ 이므로 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

$$(2) \ x < 0 \text{ 이고 } x \rightarrow 0 \text{ 이면 } \frac{1}{x} \rightarrow -\infty \text{ 이므로 } \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{1}{x} = -\infty$$

$$(3) \ x > 0 \text{ 이고 } x \rightarrow 0 \text{ 이면 } \frac{1}{x} \rightarrow \infty \text{ 이므로 } \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{x} = \infty$$

$$(4) \ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{(x-1)^2} = 0$$

**함수 극한의 성질**

- 다항함수  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$  에 대하여

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

- 또한, 유리함수  $f(x) / g(x)$ 에 대하여  $g(x) \neq 0$ 이면

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(a)}{g(a)}$$



**예제 1-10** 다음 함수의 극한을 구하여라.

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 2x - 1) \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1}{x^2+1} \quad (3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - x^2 - 2x}{x^2 + x}$$

**solution**

(1)  $f(x) = x^2 - 2x - 1$ 이라 하면,  $f(x)$ 는 2차 다항함수이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 2x - 1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = -2$$

(2)  $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$ 이라 하면,  $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2+1) = 1 (\neq 0)$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 1$$

(3)  $x^3 - x^2 - 2x = x(x-2)(x+1)$ ,  $x^2 + x = x(x+1)$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - x^2 - 2x}{x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x-2)(x+1)}{x(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} (x-2) = -2$$

## 함수의 연속

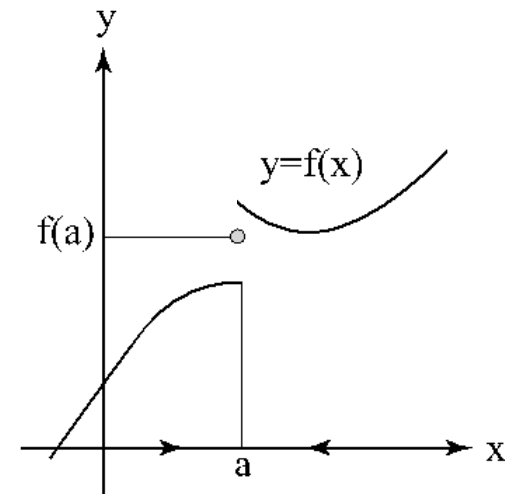
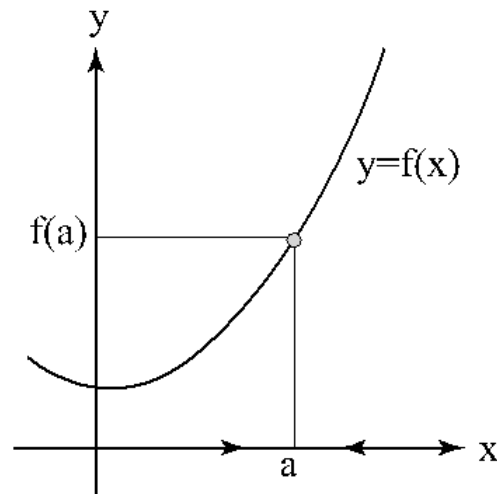
함수  $y = f(x)$ 가

(1)  $x = a$ 에서 정의되어 있고 (즉,  $f(a)$ 가 존재하고)

(2)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 가 존재하고

(3)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

일 때, 함수  $y = f(x)$ 는  $x = a$ 에서 연속(continuous)이라 한다.

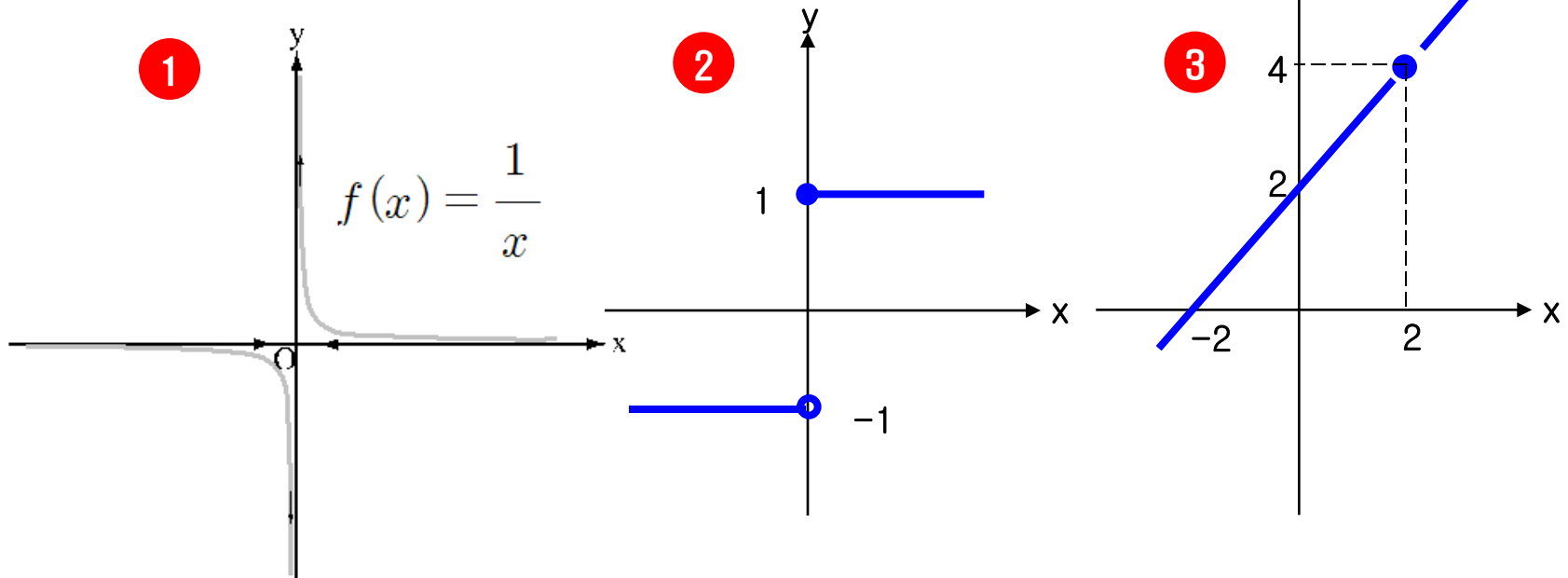


**$x=a$ 에서 연속인 경우와 불연속인 경우**

함수  $y = f(x)$ 가

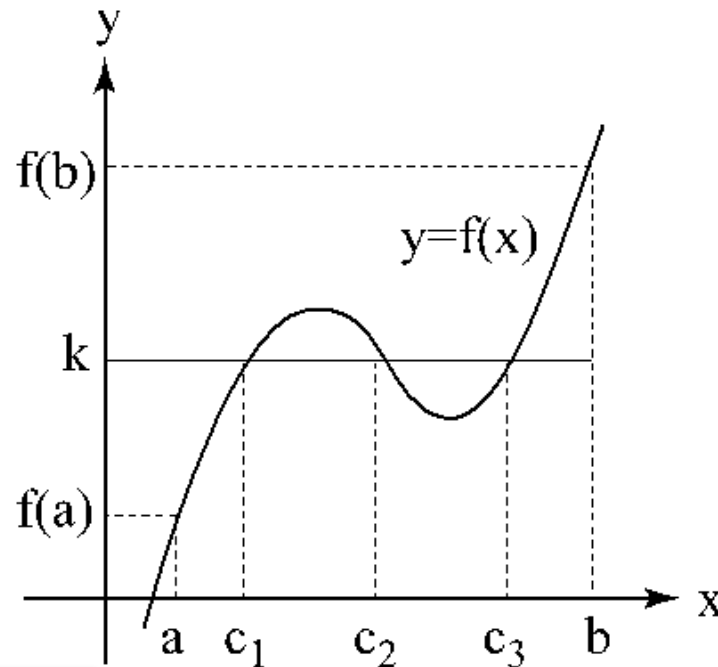
|                                           | ① | ② | ③ |
|-------------------------------------------|---|---|---|
| (1) $x = a$ 에서 정의되어 있고 (즉, $f(a)$ 가 존재하고) | X | 0 | 0 |
| (2) $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 가 존재하고  |   | X | 0 |
| (3) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$  |   |   | X |

일 때, 함수  $y = f(x)$ 는  $x = a$ 에서 연속(continuous)이라 한다.



### 최대, 최소의 정리

함수  $f(x)$ 가 폐구간  $[a, b]$ 에서 연속이면, 이 함수는 폐구간  $[a, b]$ 에서 최대값  $M$ 과 최소값  $N$ 을 갖는다.



### 중간값 정리

그림 1.24 중간값 정리

함수  $f(x)$ 가 폐구간  $[a, b]$ 에서 연속이고  $f(a) \neq f(b)$ 이면,  $f(a) < k < f(b)$ 인 임의의  $k$ 에 대하여  $f(c)=k$ 를 만족하는  $c$ 가 개구간  $(a, b)$  안에 적어도 하나 존재한다.