7장 분리공리

김준희

자료출처

- 위상수학 제2판/박대희 안승호 지음/경문사/2011.
- 위상수학을 활용한 수학교육/이동명 조명현 김준희 공저/출판기획 선진/2011.

7.1 하우스도르프 공간

정의 7.1.1

위상공간 $(X, \mathcal{T})$가 서로 다른 두 원소 $a, b \in X$에 대하여 다음 중 오직 하나만을 만족하는 열린집합 U가 존재할 때 이 위상공간 $(X, \mathcal{T})$를 T_0-공간(T_0- space)이라 한다:

(a) $a \in U$, $b \notin U$ (b) $b \in U$, $a \notin U$

정의 7.1.2

위상공간 $(X, \mathcal{T})$가 서로 다른 두 원소 $a, b \in X$에 대하여 다음을 만족하는 열린집합 U, V가 존재할 때 이 위상공간 $(X, \mathcal{T})$를 T_1-공간(T_1-space)이라 한다:

$$a \in U, b \notin V \qquad \text{그리고} \quad a \notin U, b \in V.$$

정의 7.1.3

위상공간 $(X, \mathcal{T})$가 서로 다른 두 원소 $a, b \in X$에 대하여 다음을 만족하는 열린집합 U, V가 존재할 때 이 위상공간 $(X, \mathcal{T})$를 T_2-공간(T_2-space) 또는 하우스도르프 공간(Hausdorff space)이라 한다:

$$a \in U, b \in V \qquad \text{그리고} \quad U \cap V = \emptyset.$$

정리 7.1.4

1. 모든 하우스도르프 공간은 T_1-공간이다.
2. 모든 T_1-공간은 T_0-공간이다.

7.1 하우스도르프 공간

보기 7.1.5

두 점 이상을 가지고 있는 임의의 집합 X상의 위상 $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$에 대하여 위상공간 $(X, \mathcal{T})$는 T_0-공간이 아니다.

보기 7.1.6

$X = \{a, b, c\}$상의 위상 $\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{a, b\}, \{b, c\}, \{b\}\}$에 대하여 위상공간 $(X, \mathcal{T})$는 T_0-공간이지만 T_1-공간은 아니다.

보기 7.1.7

모든 이산공간은 하우스도르프 공간이다.

보기 7.1.8

모든 자연수들의 집합 $\mathbb{N}$위의 위상

$$\mathcal{T} = \{\emptyset, \mathbb{N}, \} \cup \{\{1, 2, \cdots, n\} \mid n \in \mathbb{N}\}$$

에 대하여 $(\mathbb{N}, \mathcal{T})$는 T_0-공간이지만 T_1-공간은 아니다.

7.1 하우스도르프 공간

보기 7.1.9

유클리드 공간 $\mathbb{R}$은 하우스도르프 공간이지만 여유한 위상공간 $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_f)$는 하우스도프르 공간이 아니다. 따라서 $\mathbb{R}$과 $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_f)$는 위상동형이 아니다.

정리 7.1.10

1. T_0-공간의 모든 부분공간은 T_0-공간이다.
2. T_1-공간의 모든 부분공간은 T_1-공간이다.
3. 하우스도르프 공간의 모든 부분공간은 하우스도르프 공간이다.

정리 7.1.11

위상공간 $X_\alpha(\alpha \in \Gamma)$에 대하여 다음이 성립한다:

1. 각각의 X_α가 T_0-공간이면 곱공간 $\prod_{\alpha\in\Gamma} X_\alpha$도 T_0-공간이다.
2. 각각의 X_α가 T_1-공간이면 곱공간 $\prod_{\alpha\in\Gamma} X_\alpha$도 T_1-공간이다.
3. 각각의 X_α가 하우스도르프 공간이면 곱공간 $\prod_{\alpha\in\Gamma} X_\alpha$도 하우스도르프 공간이다.

정리 7.1.12

위상공간 X에 대하여 다음은 동치이다:

1. X는 T_0-공간이다.
2. 임의의 서로 다른 두 점 $a, b \in X$에 대하여 $\overline{\{a\}} \neq \overline{\{b\}}$이다.

정리 7.1.13

위상공간 X에 대하여 다음은 동치이다:

1. X는 T_1-공간이다.
2. 임의의 점 $a \in X$에 대하여 $\{a\}$는 닫힌집합이다.

정리 7.1.14

위상공간 X에 대하여 다음은 동치이다:

1. X는 하우스도르프 공간이다.
2. $\Delta = \{(x, x) \in X \times X \mid x \in X\}$는 곱공간 $X \times X$의 닫힌집합이다.

정리 7.1.15

위상공간 X와 하우스도르프 공간 Y에 대하여 두 함수 $f, g : X \to Y$가 연속이면 다음이 성립한다:

1. $\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$는 X의 닫힌집합이다.
2. X의 조밀만 부분집합 A에 대하여 $f|_A = g|_B$이면 $f = g$이다.

7.1 하우스도르프 공간

정리 7.1.16

하우스도르프 공간상의 수열이 수렴한다면 그 극한은 유일하다.

정리 7.1.17

위상동형인 두 위상공간 X, Y에 대하여 다음이 성립한다:

1. X가 T_0일 필요충분조건은 Y가 T_0이다.
2. X가 T_1일 필요충분조건은 Y가 T_1이다.
3. X가 T_2일 필요충분조건은 Y가 T_2이다.

정의 7.2.1

T_1인 위상공간 $(X, \mathcal{T})$의 임의의 닫힌집합 A와 임의의 $x \in X - A$에 대하여 다음을 만족하는 열린집합 U, V가 존재할 때 이 위상공간 $(X, \mathcal{T})$을 정칙 공간(regular space) 또는 T_3-공간(T_3-space)이라 한다:

$$x \in U, A \subset V \qquad \text{그리고} \quad U \cap V = \emptyset.$$

정의 7.2.2

T_1인 위상공간 $(X, \mathcal{T})$의 임의의 서로소인 닫힌집합 A, B에 대하여 다음을 만족하는 열린집합 U, V가 존재할 때 이 위상공간 $(X, \mathcal{T})$을 **정규 공간**(normal space) 또는 **T_4-공간**(T_4-space)이라 한다:

$$A \subset U, B \subset V \qquad \text{그리고} \quad U \cap V = \emptyset.$$

정리 7.2.3

1. 모든 정칙공간은 하우스도르프 공간이다.
2. 모든 정규공간은 정칙공간이다.

보기 7.2.4

집합 $\mathbb{R}$과 $K = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$에 대하여 다음을 기저로 갖는 $\mathbb{R}$상의 위상 $\mathcal{T}_K$를 생각하자:

$$\mathcal{B}_K = \{(a, b) \subset \mathbb{R} \mid a, b \in \mathbb{R}\} \cup \{(a, b) - K \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

이 위상을 K-위상이라 한다. 그러면 위상공간 $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_K)$는 하우스도르프 공간이지만 정칙 공간이 아니다.

정리 7.2.5

T_1인 위상공간 X에 대하여 다음은 동치이다:

1. X는 정칙 공간이다.
2. 임의의 점 $x \in X$와 열린근방 U에 대하여

$$x \in V \subset \overline{V} \subset U$$

을 만족하는 열린집합 V가 존재한다.

정리 7.2.6

T_1인 위상공간 X에 대하여 다음은 동치이다:

1. X는 정규 공간이다.
2. 임의의 닫힌집합 $A \subset X$와 A를 포함하는 열린집합 U에 대하여

$$A \subset V \subset \overline{V} \subset U$$

   을 만족하는 열린집합 V가 존재한다.

정리 7.2.7

위상동형인 두 위상공간 X, Y에 대하여 다음이 성립한다:

1. X가 T_3일 필요충분조건은 Y가 T_3이다.
2. X가 T_4일 필요충분조건은 Y가 T_4이다.

정리 7.2.8

1. 정칙 공간의 모든 부분공간은 정칙이다.
2. 정규 공간들의 곱공간은 정칙이다.

7.2 정칙공간과 정규공간

보기 7.2.9

1. 하극한 위상공간 $\mathbb{R}_l$은 정규공간이다.
2. 하극한 위상공간 $\mathbb{R}_l$의 곱공간 $\mathbb{R}_l^2$은 정규공간이 아니지만 정칙공간이다.

정리 7.2.10

정규 공간의 닫힌 부분공간은 정규이다.

정리 7.2.11

모든 거리공간은 정규이다.