1장 초등논리(Elementary Logic)

김준희

교재

- 집합론/You-Feng Lin, Shwu-Yeng T. Lin 지음/이흥천 옮김/경문사

1.6 한정규칙

정의

대체로 토론을 진행할 때 미리 염두에 둔 성질을 지닌 것들의 모임을 전체집합이라 한다.

- 예 : "모든 사람은 죽기 마련이다."의 전체집합은 인류.

정의

대체로 토론을 진행할 때 미리 염두에 둔 성질을 지닌 것들의 모임을 **전체집합**이라 한다.

- 예 : "모든 사람은 죽기 마련이다."의 전체집합은 인류.

1.6 한정규칙

정의

"전체집합의 모든 x에 대하여"를 $\forall x$로 나타내고 전칭기호라 한다.

- "모든 사람은 죽기 마련이다."의 다른 표현
- 전체집합의 모든 x에 대하여 x는 죽기 마련이다.
- "x는 죽기 마련이다"를 $p(x)$로 나타내면,

$$\forall x\ p(x)$$

와 같이 나타낼 수 있다.

1.6 한정규칙

정의

"전체집합의 모든 x에 대하여"를 $\forall x$로 나타내고 전칭기호라 한다.

- "모든 사람은 죽기 마련이다."의 다른 표현
- 전체집합의 모든 x에 대하여 x는 죽기 마련이다.
- "x는 죽기 마련이다"를 $p(x)$로 나타내면,

$$\forall x\, p(x)$$

와 같이 나타낼 수 있다.

1.6 한정규칙

정의

"전체집합의 모든 x에 대하여"를 $\forall x$로 나타내고 전칭기호라 한다.

- "모든 사람은 죽기 마련이다."의 다른 표현
- 전체집합의 모든 x에 대하여 x는 죽기 마련이다.
- "x는 죽기 마련이다"를 $p(x)$로 나타내면,

$$\forall x\, p(x)$$

와 같이 나타낼 수 있다.

1.6 한정규칙

정의

"전체집합의 모든 x에 대하여"를 $\forall x$로 나타내고 전칭기호라 한다.

- "모든 사람은 죽기 마련이다."의 다른 표현
- 전체집합의 모든 x에 대하여 x는 죽기 마련이다.
- "x는 죽기 마련이다"를 $p(x)$로 나타내면,

$$\forall x \, p(x)$$

와 같이 나타낼 수 있다.

정의

"전체집합의 모든 x에 대하여"를 $\forall x$로 나타내고 전칭기호라 한다.

- "모든 사람은 죽기 마련이다."의 다른 표현
- 전체집합의 모든 x에 대하여 x는 죽기 마련이다.
- "x는 죽기 마련이다"를 $p(x)$로 나타내면,

$$\forall x\, p(x)$$

  와 같이 나타낼 수 있다.

정의

"적어도 하나의 x가 존재함으로써"를 $\exists x$로 나타내고 존재기호라고 한다.

- "어느 사람은 죽기 마련이다."의 다른 표현
- 죽기 마련인 사람이 적어도 한 명 존재한다.
- 적어도 하나의 x가 존재함으로써 x는 죽는다.
- 적어도 하나의 x가 존재함으로써 $p(x)$
- $\exists x\, p(x)$

1.6 한정규칙

정의

"적어도 하나의 x가 존재함으로써"를 $\exists x$로 나타내고 존재기호라고 한다.

- "어느 사람은 죽기 마련이다."의 다른 표현
- 죽기 마련인 사람이 적어도 한 명 존재한다.
- 적어도 하나의 x가 존재함으로써 x는 죽는다.
- 적어도 하나의 x가 존재함으로써 $p(x)$
- $\exists x\ p(x)$

1.6 한정규칙

정의

"적어도 하나의 x가 존재함으로써"를 $\exists x$로 나타내고 존재기호라고 한다.

- "어느 사람은 죽기 마련이다."의 다른 표현
- 죽기 마련인 사람이 적어도 한 명 존재한다.
- 적어도 하나의 x가 존재함으로써 x는 죽는다.
- 적어도 하나의 x가 존재함으로써 $p(x)$
- $\exists x \, p(x)$

1.6 한정규칙

정의

“적어도 하나의 x가 존재함으로써”를 $\exists x$로 나타내고 존재기호라고 한다.

- “어느 사람은 죽기 마련이다.”의 다른 표현
- 죽기 마련인 사람이 적어도 한 명 존재한다.
- 적어도 하나의 x가 존재함으로써 x는 죽는다.
- 적어도 하나의 x가 존재함으로써 $p(x)$
- $\exists x\, p(x)$

1.6 한정규칙

정의

"적어도 하나의 x가 존재함으로써"를 $\exists x$로 나타내고 존재기호라고 한다.

- "어느 사람은 죽기 마련이다."의 다른 표현
- 죽기 마련인 사람이 적어도 한 명 존재한다.
- 적어도 하나의 x가 존재함으로써 x는 죽는다.
- 적어도 하나의 x가 존재함으로써 $p(x)$
- $\exists x\ p(x)$

정의

"적어도 하나의 x가 존재함으로써"를 $\exists x$로 나타내고 존재기호라고 한다.

- "어느 사람은 죽기 마련이다."의 다른 표현
- 죽기 마련인 사람이 적어도 한 명 존재한다.
- 적어도 하나의 x가 존재함으로써 x는 죽는다.
- 적어도 하나의 x가 존재함으로써 $p(x)$
- $\exists x\ p(x)$

정의

"적어도 하나의 x가 존재함으로써"를 $\exists x$로 나타내고 존재기호라고 한다.

- "어느 사람은 죽기 마련이다."의 다른 표현
- 죽기 마련인 사람이 적어도 한 명 존재한다.
- 적어도 하나의 x가 존재함으로써 x는 죽는다.
- 적어도 하나의 x가 존재함으로써 $p(x)$
- $\exists x\, p(x)$

1.6 한정규칙

- $p(x)$가 전체집합 U에서의 명제함수로 보면
- 각각의 $x \in U$에 따라 $p(x)$의 참, 거짓이 정해진다.
- 명제함수 $p(x)$가 참일 때의 $x \in U$의 집합을 $p(x)$의 진리집합이라 하고 $\{x \mid p(x)\}$로 나타낸다.

정의

- $\forall x\, p(x)$을 전칭명제, $\exists x\, p(x)$를 특칭명제라 부른다.

1.6 한정규칙

- $p(x)$가 전체집합 U에서의 명제함수로 보면
- 각각의 $x \in U$에 따라 $p(x)$의 참, 거짓이 정해진다.
- 명제함수 $p(x)$가 참일 때의 $x \in U$의 집합을 $p(x)$의 진리집합이라 하고 $\{x \mid p(x)\}$로 나타낸다.

정의

- $\forall x\ p(x)$을 전칭명제, $\exists x\ p(x)$를 특칭명제라 부른다.

1.6 한정규칙

- $p(x)$가 전체집합 U에서의 명제함수로 보면
- 각각의 $x \in U$에 따라 $p(x)$의 참, 거짓이 정해진다.
- 명제함수 $p(x)$가 참일 때의 $x \in U$의 집합을 $p(x)$의 진리집합이라 하고 $\{x \mid p(x)\}$로 나타낸다.

정의

- $\forall x\, p(x)$을 전칭명제, $\exists x\, p(x)$를 특칭명제라 부른다.

1.6 한정규칙

- $p(x)$가 전체집합 U에서의 명제함수로 보면
- 각각의 $x \in U$에 따라 $p(x)$의 참, 거짓이 정해진다.
- 명제함수 $p(x)$가 참일 때의 $x \in U$의 집합을 $p(x)$의 진리집합이라 하고 $\{x \mid p(x)\}$로 나타낸다.

정의

- $\forall x\, p(x)$을 전칭명제, $\exists x\, p(x)$를 특칭명제라 부른다.

1.6 한정규칙

- $p(x)$가 전체집합 U에서의 명제함수로 보면
- 각각의 $x \in U$에 따라 $p(x)$의 참, 거짓이 정해진다.
- 명제함수 $p(x)$가 참일 때의 $x \in U$의 집합을 $p(x)$의 진리집합이라 하고 $\{x \mid p(x)\}$로 나타낸다.

정의

- $\forall x\, p(x)$을 전칭명제, $\exists x\, p(x)$를 특칭명제라 부른다.

1.6 한정규칙

- $p(x)$가 전체집합 U에서의 명제함수로 보면
- 각각의 $x \in U$에 따라 $p(x)$의 참, 거짓이 정해진다.
- 명제함수 $p(x)$가 참일 때의 $x \in U$의 집합을 $p(x)$의 진리집합이라 하고 $\{x \mid p(x)\}$로 나타낸다.

정의

- $\forall x\, p(x)$을 전칭명제, $\exists x\, p(x)$를 특칭명제라 부른다.

1.6 한정규칙

정의

전칭기호 $\forall x$, 존재기호 $\exists x$ 모두 한정 기호라고 한다.

한정기호의 부정규칙

전체집합 U의 임의의 원소 x에 관한 명제함수 $p(x)$에 대하여 다음이 성립한다.

- $\sim \forall x\ p(x) \equiv \exists x \sim p(x)$
- $\sim \exists x\ p(x) \equiv \forall x \sim p(x)$

1.6 한정규칙

정의

전칭기호 $\forall x$, 존재기호 $\exists x$ 모두 한정 기호라고 한다.

한정기호의 부정규칙

전체집합 U의 임의의 원소 x에 관한 명제함수 $p(x)$에 대하여 다음이 성립한다.

- $\sim \forall x\, p(x) \equiv \exists x \sim p(x)$
- $\sim \exists x\, p(x) \equiv \forall x \sim p(x)$

정의

전칭기호 $\forall x$, 존재기호 $\exists x$ 모두 **한정 기호**라고 한다.

한정기호의 부정규칙

전체집합 U의 임의의 원소 x에 관한 명제함수 $p(x)$에 대하여 다음이 성립한다.

- $\sim \forall x\, p(x) \equiv \exists x \sim p(x)$
- $\sim \exists x\, p(x) \equiv \forall x \sim p(x)$

1.6 한정규칙

정의

전칭기호 $\forall x$, 존재기호 $\exists x$ 모두 **한정 기호**라고 한다.

한정기호의 부정규칙

전체집합 U의 임의의 원소 x에 관한 명제함수 $p(x)$에 대하여 다음이 성립한다.

- $\sim \forall x\, p(x) \equiv \exists x \sim p(x)$
- $\sim \exists x\, p(x) \equiv \forall x \sim p(x)$

예제 9

다음 중 어느 것이 명제 "모든 뱀은 독을 지닌다."의 부정과 동치인가를 지적하여라.

(a) 모든 뱀은 독을 지니지 않는다.

(b) 독을 지닌 뱀이 존재한다.

(c) 독을 지니지 않은 뱀이 존재한다.

풀이

- 모든 뱀의 모임을 U, 임의의 원소 $x \in U$에 대한 명제함수 "x는 독을 지닌다."를 $p(x)$라 하자. 그러면
- 주어진 명제의 부정은 $\sim \forall x\, p(x)$이다.
- $\sim \forall x\, p(x) \equiv \exists x \sim p(x)$이므로 (c)가 구하는 명제이다. □

예제 9

다음 중 어느 것이 명제 "모든 뱀은 독을 지닌다."의 부정과 동치인가를 지적하여라.

(a) 모든 뱀은 독을 지니지 않는다.

(b) 독을 지닌 뱀이 존재한다.

(c) 독을 지니지 않은 뱀이 존재한다.

풀이

- 모든 뱀의 모임을 U, 임의의 원소 $x \in U$에 대한 명제함수 "x는 독을 지닌다."를 $p(x)$라 하자. 그러면
- 주어진 명제의 부정은 $\sim \forall x\, p(x)$이다.
- $\sim \forall x\, p(x) \equiv \exists x \sim p(x)$이므로 (c)가 구하는 명제이다. □

예제 9

다음 중 어느 것이 명제 “모든 뱀은 독을 지닌다.”의 부정과 동치인가를 지적하여라.

(a) 모든 뱀은 독을 지니지 않는다.

(b) 독을 지닌 뱀이 존재한다.

(c) 독을 지니지 않은 뱀이 존재한다.

풀이

- 모든 뱀의 모임을 U, 임의의 원소 $x \in U$에 대한 명제함수 “x는 독을 지닌다.”를 $p(x)$라 하자. 그러면
- 주어진 명제의 부정은 $\sim \forall x\, p(x)$이다.
- $\sim \forall x\, p(x) \equiv \exists x \sim p(x)$이므로 (c)가 구하는 명제이다. □

예제 9

다음 중 어느 것이 명제 "모든 뱀은 독을 지닌다."의 부정과 동치인가를 지적하여라.

(a) 모든 뱀은 독을 지니지 않는다.

(b) 독을 지닌 뱀이 존재한다.

(c) 독을 지니지 않은 뱀이 존재한다.

풀이

- 모든 뱀의 모임을 U, 임의의 원소 $x \in U$에 대한 명제함수 "x는 독을 지닌다."를 $p(x)$라 하자. 그러면
- 주어진 명제의 부정은 $\sim \forall x\, p(x)$이다.
- $\sim \forall x\, p(x) \equiv \exists x \sim p(x)$이므로 (c)가 구하는 명제이다. □

1.6 한정규칙

예제 9

다음 중 어느 것이 명제 "모든 뱀은 독을 지닌다."의 부정과 동치인가를 지적하여라.

(a) 모든 뱀은 독을 지니지 않는다.

(b) 독을 지닌 뱀이 존재한다.

(c) 독을 지니지 않은 뱀이 존재한다.

풀이

- 모든 뱀의 모임을 U, 임의의 원소 $x \in U$에 대한 명제함수 "x는 독을 지닌다."를 $p(x)$라 하자. 그러면
- 주어진 명제의 부정은 $\sim \forall x\, p(x)$이다.
- $\sim \forall x\, p(x) \equiv \exists x \sim p(x)$이므로 (c)가 구하는 명제이다. □

1.6 한정규칙

예제 9

다음 중 어느 것이 명제 “모든 뱀은 독을 지닌다.”의 부정과 동치인가를 지적하여라.

(a) 모든 뱀은 독을 지니지 않는다.

(b) 독을 지닌 뱀이 존재한다.

(c) 독을 지니지 않은 뱀이 존재한다.

풀이

- 모든 뱀의 모임을 U, 임의의 원소 $x \in U$에 대한 명제함수 “x는 독을 지닌다.”를 $p(x)$라 하자. 그러면
- 주어진 명제의 부정은 $\sim \forall x\, p(x)$이다.
- $\sim \forall x\, p(x) \equiv \exists x \sim p(x)$이므로 (c)가 구하는 명제이다. □

예제 9

다음 중 어느 것이 명제 “모든 뱀은 독을 지닌다.”의 부정과 동치인가를 지적하여라.

(a) 모든 뱀은 독을 지니지 않는다.

(b) 독을 지닌 뱀이 존재한다.

(c) 독을 지니지 않은 뱀이 존재한다.

풀이

- 모든 뱀의 모임을 U, 임의의 원소 $x \in U$에 대한 명제함수 “x는 독을 지닌다.”를 $p(x)$라 하자. 그러면
- 주어진 명제의 부정은 $\sim \forall x\, p(x)$이다.
- $\sim \forall x\, p(x) \equiv \exists x \sim p(x)$이므로 (c)가 구하는 명제이다. □

예제 9

다음 중 어느 것이 명제 "모든 뱀은 독을 지닌다."의 부정과 동치인가를 지적하여라.

(a) 모든 뱀은 독을 지니지 않는다.

(b) 독을 지닌 뱀이 존재한다.

(c) 독을 지니지 않은 뱀이 존재한다.

풀이

- 모든 뱀의 모임을 U, 임의의 원소 $x \in U$에 대한 명제함수 "x는 독을 지닌다."를 $p(x)$라 하자. 그러면
- 주어진 명제의 부정은 $\sim \forall x \, p(x)$이다.
- $\sim \forall x \, p(x) \equiv \exists x \sim p(x)$이므로 (c)가 구하는 명제이다. $\square$

연습문제 1.6

4, 5, 6번 : 스스로 해결. 질문은 연구실로.

1.7 타당성 밝힘

- 논리학자의 중요한 과제 중의 하나는 논증을 점검하는 일이다.
- 논증이란 가정 또는 전제로 불리는 명제로부터 결론이라고 불리는 명제를 논리적으로 유도하는 과정을 뜻한다.
- 여기서 가정들의 논리곱이 결론을 함의하면 그 논증은 타당한 것으로 여긴다.

1.7 타당성 밝힘

다음은 네 명제 $\mathbf{H_1} - \mathbf{H_4}$가 모두 가정이고 **C**가 결론인 논증이다.

예제

H$_1$. 명수가 의학공부를 한다면 타워팰리스에서 살 수 있을 것이다.

H$_2$. 명수가 예술공부를 한다면 예술의 전당에서 공연을 할 수 있을 것이다.

H$_3$. 명수가 타워팰리스에서 살거나 예술의 전당에서 공연을 할 수 있으려면 대학등록금을 다른 곳에 사용하면 안 된다.

H$_4$. 명수는 대학등록금을 다른 곳에 사용하고 있다.

C. 따라서 명수는 의학과 예술을 공부하지 않는다.

다음은 네 명제 $\mathbf{H_1} - \mathbf{H_4}$가 모두 가정이고 **C**가 결론인 논증이다.

예제

$\mathbf{H_1}$. 명수가 의학공부를 한다면 타워팰리스에서 살 수 있을 것이다.

$\mathrm{H_2}$. 명수가 예술공부를 한다면 예술의 전당에서 공연을 할 수 있을 것이다.

$\mathrm{H_3}$. 명수가 타워팰리스에서 살거나 예술의 전당에서 공연을 할 수 있으려면 대학등록금을 다른 곳에 사용하면 안 된다.

$\mathrm{H_4}$. 명수는 대학등록금을 다른 곳에 사용하고 있다.

C. 따라서 명수는 의학과 예술을 공부하지 않는다.

1.7 타당성 밝힘

다음은 네 명제 $\mathbf{H_1} - \mathbf{H_4}$가 모두 가정이고 **C**가 결론인 논증이다.

예제

H₁. 명수가 의학공부를 한다면 타워팰리스에서 살 수 있을 것이다.

H₂. 명수가 예술공부를 한다면 예술의 전당에서 공연을 할 수 있을 것이다.

H₃. 명수가 타워팰리스에서 살거나 예술의 전당에서 공연을 할 수 있으려면 대학등록금을 다른 곳에 사용하면 안 된다.

H₄. 명수는 대학등록금을 다른 곳에 사용하고 있다.

C. 따라서 명수는 의학과 예술을 공부하지 않는다.

1.7 타당성 밝힘

다음은 네 명제 $\mathbf{H_1} - \mathbf{H_4}$가 모두 가정이고 $\mathbf{C}$가 결론인 논증이다.

예제

$\mathbf{H_1}$. 명수가 의학공부를 한다면 타워팰리스에서 살 수 있을 것이다.

$\mathbf{H_2}$. 명수가 예술공부를 한다면 예술의 전당에서 공연을 할 수 있을 것이다.

$\mathbf{H_3}$. 명수가 타워팰리스에서 살거나 예술의 전당에서 공연을 할 수 있으려면 대학등록금을 다른 곳에 사용하면 안 된다.

$\mathbf{H_4}$. 명수는 대학등록금을 다른 곳에 사용하고 있다.

$\mathbf{C}$. 따라서 명수는 의학과 예술을 공부하지 않는다.

다음은 네 명제 $\mathbf{H_1} - \mathbf{H_4}$가 모두 가정이고 **C**가 결론인 논증이다.

예제

$\mathbf{H_1}$. 명수가 의학공부를 한다면 타워팰리스에서 살 수 있을 것이다.

$\mathbf{H_2}$. 명수가 예술공부를 한다면 예술의 전당에서 공연을 할 수 있을 것이다.

$\mathbf{H_3}$. 명수가 타워팰리스에서 살거나 예술의 전당에서 공연을 할 수 있으려면 대학등록금을 다른 곳에 사용하면 안 된다.

$\mathbf{H_4}$. 명수는 대학등록금을 다른 곳에 사용하고 있다.

C. 따라서 명수는 의학과 예술을 공부하지 않는다.

1.7 타당성 밝힘

다음은 네 명제 $\mathbf{H_1} - \mathbf{H_4}$가 모두 가정이고 **C**가 결론인 논증이다.

예제

$\mathbf{H_1}$. 명수가 의학공부를 한다면 타워팰리스에서 살 수 있을 것이다.

$\mathbf{H_2}$. 명수가 예술공부를 한다면 예술의 전당에서 공연을 할 수 있을 것이다.

$\mathbf{H_3}$. 명수가 타워팰리스에서 살거나 예술의 전당에서 공연을 할 수 있으려면 대학등록금을 다른 곳에 사용하면 안 된다.

$\mathbf{H_4}$. 명수는 대학등록금을 다른 곳에 사용하고 있다.

C. 따라서 명수는 의학과 예술을 공부하지 않는다.

1.7 타당성 밝힘

위 논증의 가정과 결론에 나타난 단순명제들을 다음과 같이 표현하자.

M. 명수는 의학공부를 한다.

A. 명수는 예술공부를 한다.

T. 명수는 타워팰리스에서 살 수 있다.

P. 명수는 예술의 전당에서 공연을 할 수 있을 것이다.

W. 명수는 대학등록금을 낭비한다.

1.7 타당성 밝힘

위 논증을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$\mathbf{H_1}$. $\mathbf{M} \rightarrow \mathbf{T}$

$\mathbf{H_2}$. $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{P}$

$\mathbf{H_3}$. $(\mathbf{T} \vee \mathbf{P}) \rightarrow \sim \mathbf{W}$

$\mathbf{H_4}$. $\mathbf{W}$

C. 그러므로 $\sim \mathbf{M} \wedge \sim \mathbf{A}$

논증의 타당성 증명

1.	$\mathbf{W}$	$(\mathbf{H_4})$
2.	$\sim(\mathbf{T} \vee \mathbf{P})$	($\mathbf{H_3}$의 대우명제)
3.	$\sim\mathbf{T} \wedge \sim\mathbf{P}$	(드모르간의 법칙)
4.	$\sim\mathbf{M} \wedge \sim\mathbf{A}$	($\mathbf{H_1}$과 $\mathbf{H_2}$의 대우명제)

그러므로 위 논증은 타당하다. $\square$

예제 10 [직접증명]

다음 소괄호 안의 문자를 써서 아래 논증에 대한 타당성을 형식적으로 밝혀보아라.

Winston이 위원회 회장으로 선출되거나 Halbert와 Luke는 부회장으로 선출된다. Winston이 회장으로 선출되거나 Halbert가 부회장으로 선출되면 David는 항의서를 제출할 것이다. 그러므로 Winston이 회장으로 선출되거나 David가 항의서를 제출할 것이다(W, H, L, D).

예제 10 [직접증명]

다음 소괄호 안의 문자를 써서 아래 논증에 대한 타당성을 형식적으로 밝혀보아라.

Winston이 위원회 회장으로 선출되거나 Halbert와 Luke는 부회장으로 선출된다. Winston이 회장으로 선출되거나 Halbert가 부회장으로 선출되면 David는 항의서를 제출할 것이다. 그러므로 Winston이 회장으로 선출되거나 David가 항의서를 제출할 것이다(W, H, L, D).

증명

1. $W \vee (H \wedge L)$
2. $W \vee H \rightarrow D /$그러므로$W \vee D$
3. $(W \vee H) \wedge (W \vee L)$ (1, 분배법칙)
4. $W \vee H$ (3, 단순화법칙)
5. D (4, 2)
6. $D \vee W$ (5, 합의 법칙)
7. $W \vee D$ (6, 교환법칙)

그러므로 위 논증은 타당하다. □

예제 11[간접증명]

다음 논증의 타당성을 밝혀라.

$$p \vee q \to r$$

$$s \to p \wedge w$$

$$q \vee s / \quad \text{그러므로} \quad r$$

증명

1. $p \vee q \to r$
2. $s \to p \wedge w$
3. $q \vee s /$ 그러므로 r
4. $\sim r$ (간접증명(결론 부정))
5. $\sim (p \vee q)$ (1, 4, 대우법칙)
6. $\sim p \wedge \sim q$ (5, 드모르간의 법칙))

7. $\sim p$ (6, 단순화 법칙)

8. $\sim q$ (6, 단순화 법칙)

9. s (3, 8, 논리합의 삼단논법)

10. $p \wedge w$ (2, 9)

11. p (10, 단순화법칙)

12. $p \wedge \sim p$ (7, 11, 논리곱)

12 단계에서 명제 $p \wedge \sim p$는 모순이므로 위 논증은 타당하다. □

연습문제 1.7

1, 2, 3, 4 번 : 스스로 해결. 질문은 연구실로

수학적 귀납법

자연수 n에 관한 명제함수 $p(n)$에 대하여

(1) $n = 1$일 때 $p(1)$이 참이다.

(2) 임의의 자연수 k에 대하여 $p(k) \Rightarrow p(k+1)$

를 만족하면, 모든 자연수 n에 대하여 $p(n)$은 참이다.

- (2)에서 "$n = k$에 대하여 $p(k)$는 참이다."라는 가정 하에 "$p(k+1)$은 참이다."를 유도해야 한다.
- "$p(k)$는 참이다."를 귀납적 가정이라고 한다.

1.8 수학적 귀납법

수학적 귀납법

자연수 n에 관한 명제함수 $p(n)$에 대하여

(1) $n = 1$일 때 $p(1)$이 참이다.

(2) 임의의 자연수 k에 대하여 $p(k) \Rightarrow p(k+1)$

를 만족하면, 모든 자연수 n에 대하여 $p(n)$은 참이다.

- (2)에서 "$n = k$에 대하여 $p(k)$는 참이다."라는 가정 하에 "$p(k+1)$은 참이다."를 유도해야 한다.
- "$p(k)$는 참이다."를 귀납적 가정이라고 한다.

수학적 귀납법

자연수 n에 관한 명제함수 $p(n)$에 대하여

(1) $n = 1$일 때 $p(1)$이 참이다.

(2) 임의의 자연수 k에 대하여 $p(k) \Rightarrow p(k+1)$

를 만족하면, 모든 자연수 n에 대하여 $p(n)$은 참이다.

- (2)에서 "$n = k$에 대하여 $p(k)$는 참이다."라는 가정 하에 "$p(k+1)$은 참이다."를 유도해야 한다.
- "$p(k)$는 참이다."를 귀납적 가정이라고 한다.

참고:페아노의 공리(p.367)

다음 공리 1~5를 모두 만족하는 집합 $\mathbb{N}$이 존재한다. 이때 그 원소를 자연수라고 부른다.

1. $\mathbb{N}$에는 1로 나타낸 특별한 원소가 존재한다.
2. 각 $n \in \mathbb{N}$에 대하여 그의 후임자인 원소 n^+가 $\mathbb{N}$에 단 하나씩 존재한다.
3. 모든 $n \in \mathbb{N}$에 대하여 $n^+ \neq 1$.
4. $\mathbb{N}$의 원소 m, n에 대하여 $m^+ = n^+ \Rightarrow m = n$.
5. 각 $n \in \mathbb{N}$과 $\mathbb{N}$의 부분집합 $\mathbb{P}$에 대하여
   $(1 \in \mathbb{P} \wedge n \in \mathbb{P} \Rightarrow n^+ \in \mathbb{P})$이면 $\mathbb{P} = \mathbb{N}$.

참고:페아노의 공리(p.367)

다음 공리 1~5를 모두 만족하는 집합 $\mathbb{N}$이 존재한다. 이때 그 원소를 자연수라고 부른다.

1. $\mathbb{N}$에는 1로 나타낸 특별한 원소가 존재한다.
2. 각 $n \in \mathbb{N}$에 대하여 그의 후임자인 원소 n^+가 $\mathbb{N}$에 단 하나씩 존재한다.
3. 모든 $n \in \mathbb{N}$에 대하여 $n^+ \neq 1$.
4. $\mathbb{N}$의 원소 m, n에 대하여 $m^+ = n^+ \Rightarrow m = n$.
5. 각 $n \in \mathbb{N}$과 $\mathbb{N}$의 부분집합 $\mathbb{P}$에 대하여

   $(1 \in \mathbb{P} \wedge n \in \mathbb{P} \Rightarrow n^+ \in \mathbb{P})$이면 $\mathbb{P} = \mathbb{N}$.

참고:페아노의 공리(p.367)

다음 공리 1~5를 모두 만족하는 집합 $\mathbb{N}$이 존재한다. 이때 그 원소를 자연수라고 부른다.

1. $\mathbb{N}$에는 1로 나타낸 특별한 원소가 존재한다.
2. 각 $n \in \mathbb{N}$에 대하여 그의 후임자인 원소 n^+가 $\mathbb{N}$에 단 하나씩 존재한다.
3. 모든 $n \in \mathbb{N}$에 대하여 $n^+ \neq 1$.
4. $\mathbb{N}$의 원소 m, n에 대하여 $m^+ = n^+ \Rightarrow m = n$.
5. 각 $n \in \mathbb{N}$과 $\mathbb{N}$의 부분집합 $\mathbb{P}$에 대하여

   $(1 \in \mathbb{P} \wedge n \in \mathbb{P} \Rightarrow n^+ \in \mathbb{P})$이면 $\mathbb{P} = \mathbb{N}$.

참고:페아노의 공리(p.367)

다음 공리 1~5를 모두 만족하는 집합 $\mathbb{N}$이 존재한다. 이때 그 원소를 자연수라고 부른다.

1. $\mathbb{N}$에는 1로 나타낸 특별한 원소가 존재한다.
2. 각 $n \in \mathbb{N}$에 대하여 그의 후임자인 원소 n^+가 $\mathbb{N}$에 단 하나씩 존재한다.
3. 모든 $n \in \mathbb{N}$에 대하여 $n^+ \neq 1$.
4. $\mathbb{N}$의 원소 m, n에 대하여 $m^+ = n^+ \Rightarrow m = n$.
5. 각 $n \in \mathbb{N}$과 $\mathbb{N}$의 부분집합 $\mathbb{P}$에 대하여
$$(1 \in \mathbb{P} \wedge n \in \mathbb{P} \Rightarrow n^+ \in \mathbb{P})\text{이면 } \mathbb{P} = \mathbb{N}.$$

참고:페아노의 공리(p.367)

다음 공리 1~5를 모두 만족하는 집합 $\mathbb{N}$이 존재한다. 이때 그 원소를 자연수라고 부른다.

1. $\mathbb{N}$에는 1로 나타낸 특별한 원소가 존재한다.
2. 각 $n \in \mathbb{N}$에 대하여 그의 후임자인 원소 n^+가 $\mathbb{N}$에 단 하나씩 존재한다.
3. 모든 $n \in \mathbb{N}$에 대하여 $n^+ \neq 1$.
4. $\mathbb{N}$의 원소 m, n에 대하여 $m^+ = n^+ \Rightarrow m = n$.
5. 각 $n \in \mathbb{N}$과 $\mathbb{N}$의 부분집합 $\mathbb{P}$에 대하여

$$(1 \in \mathbb{P} \wedge n \in \mathbb{P} \Rightarrow n^+ \in \mathbb{P})\text{이면 } \mathbb{P} = \mathbb{N}.$$

1.8 수학적 귀납법

참고:페아노의 공리(p.367)

다음 공리 1~5를 모두 만족하는 집합 $\mathbb{N}$이 존재한다. 이때 그 원소를 자연수라고 부른다.

1. $\mathbb{N}$에는 1로 나타낸 특별한 원소가 존재한다.
2. 각 $n \in \mathbb{N}$에 대하여 그의 후임자인 원소 n^+가 $\mathbb{N}$에 단 하나씩 존재한다.
3. 모든 $n \in \mathbb{N}$에 대하여 $n^+ \neq 1$.
4. $\mathbb{N}$의 원소 m, n에 대하여 $m^+ = n^+ \Rightarrow m = n$.
5. 각 $n \in \mathbb{N}$과 $\mathbb{N}$의 부분집합 $\mathbb{P}$에 대하여

$$(1 \in \mathbb{P} \wedge n \in \mathbb{P} \Rightarrow n^+ \in \mathbb{P})\text{이면 } \mathbb{P} = \mathbb{N}.$$

예제 12

임의의 자연수 n에 대한 다음 등식이 성립한다. 이것을 수학적 귀납법으로 증명하여라.

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \qquad (*)$$

증명

임의의 자연수 n에 관한 등식 $(*)$를 $p(n)$으로 놓는다.

(1) $n = 1$일 때 $p(1)$이 참임을 보이자.

좌변은 1, 우변은 $\frac{1(1+1)}{2} = 1$ 이다. 따라서 $p(1)$은 참이다.

예제 12

임의의 자연수 n에 대한 다음 등식이 성립한다. 이것을 수학적 귀납법으로 증명하여라.

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \qquad (*)$$

증명

임의의 자연수 n에 관한 등식 $(*)$를 $p(n)$으로 놓는다.

(1) $n = 1$일 때 $p(1)$이 참임을 보이자.

좌변은 1, 우변은 $\frac{1(1+1)}{2} = 1$ 이다. 따라서 $p(1)$은 참이다.

(2) $n = k$에 대하여 $p(k)$, 즉 $1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}$이 참이라고 가정하고 $p(k+)$이 참임을 보여야 한다. 위 등식의 양변에 $k + 1$을 더하면

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k+1) &= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) \\ &= \frac{k(k+1)}{2} + \frac{2(k+1)}{2} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \end{aligned}$$

이다. 따라서 $p(k+1)$은 참이다.

그러므로, 수학적 귀납법에서의 전제 (1), (2)가 모두 성립하므로 임의의 자연수 n에 대하여 등식 $(*)$가 성립한다. $\square$

1.8 수학적 귀납법

수학적 귀납법은 자연수에 관련된 정의를 내리는 데에도 이용된다. 다음은 문자 x에 대한 거듭제곱의 정의이다.

$x^1 = x$, 임의의 자연수 n에 대하여 $x^{n+1} = x^n x$.

위의 두 등식은

$$x^1 = x,\ x^2 = x \cdot x,\ x^3 = x^2 \cdots x,\ \cdots$$

와 같은 사실을 요약해 놓은 것이다.

정의 7

정수 n $(n \geq 0)$과 정수 r에 관한 기호 $C(n,r)$을 다음과 같이 정의한다.

$$C(n+1,r) = C(n,r) + C(n,r-1)$$

특히,

$$C(0,0) = 1, \quad C(0,r) = 0, r \neq 0$$

정리 8

정수 n, r $(0 \leq r \leq n)$에 대하여 다음 등식이 성립한다.

$$C(n, r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

여기서 $n > 0$일 때 $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)n$을 나타낸다. 특히, $n = 0$이면 $0! = 1$로 약속한다.

증명

연습문제 1번

정리 8

정수 n, r $(0 \le r \le n)$에 대하여 다음 등식이 성립한다.

$$C(n,r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

여기서 $n > 0$일 때 $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)n$을 나타낸다. 특히, $n = 0$이면 $0! = 1$로 약속한다.

증명

연습문제 1번

정리 9(이항정리)

임의의 자연수 n과 두 문자 x, y에 대하여 다음 등식이 성립한다.

$$(x+y)^n = C(n,0)x^n + C(n,1)x^{n-1}y + \cdots + C(n,r)x^{n-r}y^r + \cdots + C(n,n)y^n$$

증명

(1) $n = 1$일 때, 좌변은 $x + y$, 우변은 $C(1,0)x + C(1,1)y$이다.
여기서 $C(1,0) = C(0,0) + C(0,-1) = 1 + 0 = 1$이고
$C(1,1) = C(0,1) + C(0,0) = 0 + 1 = 1$이므로,
$C(1,0)x + C(1,1)y = x + y$이다. 따라서 좌변과 우변은 같다.

정리 9(이항정리)

임의의 자연수 n과 두 문자 x, y에 대하여 다음 등식이 성립한다.

$$(x+y)^n = C(n,0)x^n + C(n,1)x^{n-1}y + \cdots + C(n,r)x^{n-r}y^r + \cdots + C(n,n)y^n$$

증명

(1) $n = 1$일 때, 좌변은 $x + y$, 우변은 $C(1,0)x + C(1,1)y$이다.
여기서 $C(1,0) = C(0,0) + C(0,-1) = 1 + 0 = 1$이고
$C(1,1) = C(0,1) + C(0,0) = 0 + 1 = 1$이므로,
$C(1,0)x + C(1,1)y = x + y$이다. 따라서 좌변과 우변은 같다.

$n = k$에 대하여 다음 등식이 성립한다고 가정하자.

$$(x+y)^k = C(k,0)x^k + C(k,1)x^{k-1}y + \cdots + C(k,r)x^{k-r}y^r + \cdots + C(k,k)y^k$$

이 등식의 양변에 각각 $x+y$를 곱하면

$$\begin{aligned}(x+y)^{k+1} &= (x+y)(C(k,0)x^k + C(k,1)x^{k-1}y + \cdots \\ &\quad + C(k,r)x^{k-r}y^r + \cdots + C(k,k)y^k) \\ &= x^{k+1} + \{C(k,0) + C(k,1)\}x^k y + \cdots \\ &\quad + \{C(k,r-1) + C(k,r)\}x^{(k+1)-r}y^r + \cdots y^{k+1} \\ &= C(k+1,0)x^{k+1} + C(k+1,1)x^k y + \cdots \\ &\quad + C(k+1,r)x^{(k+1)-r}y^r + \cdots C(k+1,k+1)y^{k+1}\end{aligned}$$

따라서 $n = k + 1$에 대하여 위 등식은 성립한다. 그러므로 수학적 귀납법에 의하여 임의의 자연수 n에 관한 위 등식은 성립한다. 여기서 $C(n, r)$를 이항계수라고 한다.

연습문제 1.8

3, 4, 5, 6, 7 번 : 스스로 해결