2장 집합의 개념(The Concept of Sets)

김준희

교재

- 집합론/You-Feng Lin, Shwu-Yeng T. Lin 지음/이흥천 옮김/경문사

2.5 벤 다이어그램

2.5절 생략하되 p.107의 하단 내용 참고

2.6 첨수집합족

- 원소들이 집합인 집합을 집합족 또는 간단히 족이라 한다.
- ex) $\mathcal{P} = \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$
- 멱집합은 집합족이다.

정의

하나의 집합 Γ의 각 $\gamma \in \Gamma$에 집합 A_γ가 대응할 때,

- γ를 첨수,
- Γ를 첨수집합,
- $\{A_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$를 첨수집합족

이라 한다.

2.6 첨수집합족

- 원소들이 집합인 집합을 **집합족** 또는 간단히 **족**이라 한다.
- ex) $\mathcal{P} = \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$
- 멱집합은 집합족이다.

정의

하나의 집합 Γ의 각 $\gamma \in \Gamma$에 집합 A_γ가 대응할 때,

- γ를 첨수,
- Γ를 첨수집합,
- $\{A_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$를 첨수집합족

이라 한다.

2.6 첨수집합족

- 원소들이 집합인 집합을 집합족 또는 간단히 족이라 한다.
- ex) $\mathcal{P} = \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$
- 멱집합은 집합족이다.

정의

하나의 집합 Γ의 각 $\gamma \in \Gamma$에 집합 A_γ가 대응할 때,

- γ를 첨수,
- Γ를 첨수집합,
- $\{A_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$를 첨수집합족

이라 한다.

2.6 첨수집합족

- 원소들이 집합인 집합을 집합족 또는 간단히 족이라 한다.
- ex) $\mathcal{P} = \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$
- 멱집합은 집합족이다.

정의

하나의 집합 Γ의 각 $\gamma \in \Gamma$에 집합 A_γ가 대응할 때,

- γ를 첨수,
- Γ를 첨수집합,
- $\{A_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$를 첨수집합족

이라 한다.

2.6 첨수집합족

- 원소들이 집합인 집합을 집합족 또는 간단히 족이라 한다.
- ex) $\mathcal{P} = \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$
- 멱집합은 집합족이다.

정의

하나의 집합 Γ의 각 $\gamma \in \Gamma$에 집합 A_γ가 대응할 때,

- γ를 첨수,
- Γ를 첨수집합,
- $\{A_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$를 첨수집합족

이라 한다.

2.6 첨수집합족

- 원소들이 집합인 집합을 집합족 또는 간단히 족이라 한다.
- ex) $\mathcal{P} = \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$
- 멱집합은 집합족이다.

정의

하나의 집합 Γ의 각 $\gamma \in \Gamma$에 집합 A_γ가 대응할 때,

- γ를 첨수,
- Γ를 첨수집합,
- $\{A_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$를 첨수집합족

이라 한다.

2.6 첨수집합족

- 원소들이 집합인 집합을 집합족 또는 간단히 족이라 한다.
- ex) $\mathcal{P} = \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$
- 멱집합은 집합족이다.

정의

하나의 집합 Γ의 각 $\gamma \in \Gamma$에 집합 A_γ가 대응할 때,

- γ를 첨수,
- Γ를 첨수집합,
- $\{A_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$를 첨수집합족

이라 한다.

2.6 첨수집합족

각 첨수 $n \in \mathbb{N}$에 집합 $A_n = \{n, 2n\}$을 대응시키면 첨수집합족

$$\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots\}$$

을 얻는다.

2.6 첨수집합족

예제 7

다음 족을 첨수집합족으로 나타내시오.

$$\mathcal{F} = \{\phi, \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{R}\}$$

풀이

첨수집합으로 $\Gamma = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$을 택하고

$$A_1 = \phi,\ A_2 = \mathbb{N},\ A_3 = \mathbb{Z},\ A_4 = \mathbb{Q},\ A_5 = \mathbb{R},\ A_6 = \mathbb{R}$$

와 같이 첨수를 매겨 다음과 같은 첨수집합족을 얻는다.

$$\mathcal{F} = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6\}$$

□

예제 7

다음 족을 첨수집합족으로 나타내시오.

$$\mathcal{F} = \{\phi, \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{R}\}$$

풀이

첨수집합으로 $\Gamma = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$을 택하고

$$A_1 = \phi,\ A_2 = \mathbb{N},\ A_3 = \mathbb{Z},\ A_4 = \mathbb{Q},\ A_5 = \mathbb{R},\ A_6 = \mathbb{R}$$

와 같이 첨수를 매겨 다음과 같은 첨수집합족을 얻는다.

$$\mathcal{F} = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6\}$$

□

정의 6 (집합족의 합집합)

임의의 족 $\mathcal{F}$에 대하여 그것에 속하는 집합의 합집합을 $\bigcup_{A \in \mathcal{F}} A$ 또는 $\cup\mathcal{F}$로 나타낸다.

다음과 같이 나타낼 수도 있다.

- $\bigcup_{A \in \mathcal{F}} A = \{x \in U \mid \exists A \in \mathcal{F} \text{ s.t. } x \in A\}$
- 즉, $\mathcal{F}$에 속하는 모든 집합들의 합집합을 의미한다.

2.6 첨수집합족

정의 6 (집합족의 합집합)

임의의 족 $\mathcal{F}$에 대하여 그것에 속하는 집합의 합집합을 $\bigcup_{A \in \mathcal{F}} A$ 또는 $\cup\mathcal{F}$로 나타낸다.

다음과 같이 나타낼 수도 있다.

- $\bigcup_{A \in \mathcal{F}} A = \{x \in U \mid \exists A \in \mathcal{F} \text{ s.t. } x \in A\}$
- 즉, $\mathcal{F}$에 속하는 모든 집합들의 합집합을 의미한다.

정의 6 (집합족의 합집합)

임의의 족 $\mathcal{F}$에 대하여 그것에 속하는 집합의 합집합을 $\bigcup_{A\in\mathcal{F}} A$ 또는 $\cup\mathcal{F}$로 나타낸다.

다음과 같이 나타낼 수도 있다.

- $\displaystyle\bigcup_{A\in\mathcal{F}} A = \{x \in U \mid \exists A \in \mathcal{F} \text{ s.t. } x \in A\}$
- 즉, $\mathcal{F}$에 속하는 모든 집합들의 합집합을 의미한다.

2.6 첨수집합족

- $\mathcal{F}$가 첨수집합족(Γ가 $\mathcal{F}$의 첨수집합)일 때에는 다음과 같이 나타내기도 한다.

$$\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma = \{x \in U \mid \exists\gamma \in \Gamma \ \text{ s.t. } \ x \in A_\gamma\}$$

- Γ가 유한집합 $\Gamma = \{1, 2, 3, \cdots, n\}$인 경우

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i \text{ 또는 } A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$$

와 같이 나타내기도 한다.

2.6 첨수집합족

- $\mathcal{F}$가 첨수집합족(Γ가 $\mathcal{F}$의 첨수집합)일 때에는 다음과 같이 나타내기도 한다.

$$\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma = \{x \in U \mid \exists\gamma \in \Gamma \ \text{ s.t. } \ x \in A_\gamma\}$$

- Γ가 유한집합 $\Gamma = \{1, 2, 3, \cdots, n\}$인 경우

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i \text{ 또는 } A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$$

와 같이 나타내기도 한다.

2.6 첨수집합족

- $\mathcal{F}$가 첨수집합족(Γ가 $\mathcal{F}$의 첨수집합)일 때에는 다음과 같이 나타내기도 한다.

$$\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma = \{x \in U \mid \exists\gamma \in \Gamma \ \text{ s.t. } \ x \in A_\gamma\}$$

- Γ가 유한집합 $\Gamma = \{1, 2, 3, \cdots, n\}$인 경우

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i \text{ 또는 } A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$$

와 같이 나타내기도 한다.

예제 8

다음과 같이 원소가 n개인 족 $\mathcal{F}$의 합집합을 구하여라.

$$\mathcal{F} = \{\{1\}, \{2, 3\}, \{3, 4, 5\}, \cdots, \{n, n+1, \cdots, 2n-1\}\}$$

풀이

첨수집합 $\Gamma = \{1, 2, 3, \cdots, n\}$의 각 $i \in \Gamma$에 대하여

$$A_i = \{i, i+1, i+2, \cdots, 2i-1\}$$

가 대응하는 첨수집합족으로 볼 수 있다. 그러므로

$$\begin{aligned} \bigcup_{i=1}^{n} A_i &= \bigcup_{i=1}^{n} \{i, i+1, i+2, \cdots, 2i-1\} \\ &= \{1, 2, 3, \cdots, 2n-1\} \end{aligned}$$

이다. □

2.6 첨수집합족

예제 8

다음과 같이 원소가 n개인 족 $\mathcal{F}$의 합집합을 구하여라.

$$\mathcal{F} = \{\{1\}, \{2,3\}, \{3,4,5\}, \cdots, \{n, n+1, \cdots, 2n-1\}\}$$

풀이

첨수집합 $\Gamma = \{1,2,3,\cdots,n\}$의 각 $i \in \Gamma$에 대하여

$$A_i = \{i, i+1, i+2, \cdots, 2i-1\}$$

가 대응하는 첨수집합족으로 볼 수 있다. 그러므로

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{i=1}^{n} \{i, i+1, i+2, \cdots, 2i-1\}$$
$$= \{1,2,3,\cdots,2n-1\}$$

이다. □

정의 7 (집합족의 교집합)

임의의 족 $\mathcal{F}$에 대하여 그것에 속하는 집합의 **교집합**을 $\bigcap_{A \in \mathcal{F}} A$ 또는 $\cap \mathcal{F}$로 나타낸다.

다음과 같이 나타낼 수도 있다.

- $\bigcap_{A \in \mathcal{F}} A = \{x \in U \mid \forall A \in \mathcal{F},\ x \in A\}$
- 즉, $\mathcal{F}$에 속하는 모든 집합들의 교집합을 의미한다.

정의 7 (집합족의 교집합)

임의의 족 $\mathcal{F}$에 대하여 그것에 속하는 집합의 교집합을 $\bigcap_{A\in\mathcal{F}} A$ 또는 $\cap\mathcal{F}$로 나타낸다.

다음과 같이 나타낼 수도 있다.

- $\displaystyle\bigcap_{A\in\mathcal{F}} A = \{x \in U \mid \forall A \in \mathcal{F},\ x \in A\}$
- 즉, $\mathcal{F}$에 속하는 모든 집합들의 교집합을 의미한다.

정의 7 (집합족의 교집합)

임의의 족 $\mathcal{F}$에 대하여 그것에 속하는 집합의 교집합을 $\displaystyle\bigcap_{A\in\mathcal{F}} A$ 또는 $\cap\mathcal{F}$로 나타낸다.

다음과 같이 나타낼 수도 있다.

- $\displaystyle\bigcap_{A\in\mathcal{F}} A = \{x \in U \,|\, \forall A \in \mathcal{F},\ x \in A\}$
- 즉, $\mathcal{F}$에 속하는 모든 집합들의 교집합을 의미한다.

2.6 첨수집합족

- $\mathcal{F}$가 첨수집합족(Γ가 $\mathcal{F}$의 첨수집합)일 때에는 다음과 같이 나타내기도 한다.

$$\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma = \{x \in U \mid \forall \gamma \in \Gamma,\ x \in A_\gamma\}$$

- Γ가 유한집합 $\Gamma = \{1, 2, 3, \cdots, n\}$인 경우

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i \text{ 또는 } A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$$

와 같이 나타내기도 한다.

2.6 첨수집합족

- $\mathcal{F}$가 첨수집합족(Γ가 $\mathcal{F}$의 첨수집합)일 때에는 다음과 같이 나타내기도 한다.

$$\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma = \{x \in U \mid \forall \gamma \in \Gamma,\ x \in A_\gamma\}$$

- Γ가 유한집합 $\Gamma = \{1, 2, 3, \cdots, n\}$인 경우

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i \text{ 또는 } A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$$

와 같이 나타내기도 한다.

2.6 첨수집합족

- $\mathcal{F}$가 첨수집합족(Γ가 $\mathcal{F}$의 첨수집합)일 때에는 다음과 같이 나타내기도 한다.

$$\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma = \{x \in U \mid \forall \gamma \in \Gamma,\ x \in A_\gamma\}$$

- Γ가 유한집합 $\Gamma = \{1, 2, 3, \cdots, n\}$인 경우

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i \text{ 또는 } A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$$

와 같이 나타내기도 한다.

2.6 첨수집합족

임의의 두 실수 a, b에 대하여

- $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$를 개구간이라 하고 (a, b)로 나타낸다.
- $a \geq b$인 경우 $(a, b) = \phi$으로 정한다.

임의의 두 실수 a, b에 대하여

- $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$를 개구간이라 하고 (a, b)로 나타낸다.
- $a \geq b$인 경우 $(a, b) = \phi$으로 정한다.

임의의 두 실수 a, b에 대하여

- $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$를 개구간이라 하고 (a, b)로 나타낸다.
- $a \geq b$인 경우 $(a, b) = \phi$으로 정한다.

예제 9

다음 개구간족의 교집합을 구하여라.

$$\{(0,1),(0,1/2),(0,1/3),\cdots\}$$

풀이

주장 : $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(0,1/n)=\phi$

(모순법) $a\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(0,1/n)$인 a가 존재한다고 가정하자. 그러면 모든 $n\in\mathbb{N}$에 대하여 $0<a<1/n$을 만족한다.

그러나 $1/n<a$을 만족하는 $n\in\mathbb{N}$이 존재하므로 이것은 모순이다. 따라서 $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(0,1/n)=\phi$이다. □

예제 9

다음 개구간족의 교집합을 구하여라.

$$\{(0,1),(0,1/2),(0,1/3),\cdots\}$$

풀이

주장 : $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(0,1/n)=\phi$

(모순법) $a\in\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(0,1/n)$인 a가 존재한다고 가정하자. 그러면

모든 $n\in\mathbb{N}$에 대하여 $0<a<1/n$을 만족한다.

그러나 $1/n<a$을 만족하는 $n\in\mathbb{N}$이 존재하므로 이것은

모순이다. 따라서 $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(0,1/n)=\phi$이다. □

2.6 첨수집합족

정리 7

첨수집합족 $\{A_\gamma \,|\, \gamma \in \Gamma\}$에 대하여 $\Gamma = \emptyset$이면 다음이 성립한다:

(a) $\displaystyle\bigcup_{\gamma\in\phi} A_\gamma = \phi$

(b) $\displaystyle\bigcap_{\gamma\in\phi} A_\gamma = U$

정리 7

첨수집합족 $\{A_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$에 대하여 $\Gamma = \emptyset$이면 다음이 성립한다:

(a) $\displaystyle\bigcup_{\gamma\in\phi} A_\gamma = \phi$

(b) $\displaystyle\bigcap_{\gamma\in\phi} A_\gamma = U$

정리 7

첨수집합족 $\{A_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$에 대하여 $\Gamma = \emptyset$이면 다음이 성립한다:

(a) $\displaystyle\bigcup_{\gamma\in\phi} A_\gamma = \phi$

(b) $\displaystyle\bigcap_{\gamma\in\phi} A_\gamma = U$

증명

(a) 모든 $x \in U$에 대하여 $x \notin \bigcup_{\gamma \in \phi} A_\gamma$임을 보이면 충분하다.

$$
\begin{aligned}
x \notin \bigcup_{\gamma \in \phi} A_\gamma &\equiv \sim (x \in \bigcup_{\gamma \in \phi} A_\gamma) && (\notin \text{ 의 정의}) \\
&\equiv \sim (x \in A_\gamma \text{ for some } \gamma \in \phi) && (\cup\text{의 정의}) \\
&\equiv x \notin A_\gamma \text{ for all } \gamma \in \phi && (\text{한정기호의 부정규칙}) \\
&\equiv (\gamma \in \phi \to x \notin A_\gamma)
\end{aligned}
$$

$\gamma \in \phi$는 모순(항상 거짓인 명제)이므로 조건명제 '$\gamma \in \phi \to x \notin A_\gamma$'는 항상 참이다. 그러므로 $\bigcup_{\gamma \in \phi} A_\gamma = \phi$이 성립한다.

2.6 첨수집합족

(b) 모든 $x \in U$에 대하여 $x \in \bigcap_{\gamma \in \phi} A_\gamma$임을 보이면 충분하다.

$$x \in \bigcap_{\gamma \in \phi} A_\gamma \equiv x \in A_\gamma \text{ for all } \gamma \in \phi \quad (\cap\text{의 정의})$$

$$\equiv (\gamma \in \phi \to x \in A_\gamma)$$

$\gamma \in \phi$는 모순(항상 거짓인 명제)이므로 조건명제 '$\gamma \in \phi \to x \in A_\gamma$'는 항상 참이다. 그러므로 $\bigcap_{\gamma \in \phi} A_\gamma = U$이 성립한다. □

2.6 첨수집합족

정리 8 (드 모르간의 정리)

임의의 첨수집합족 $\{A_\gamma \,|\, \gamma \in \Gamma\}$에 대하여 다음이 성립한다:

(a) $\left(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma \right)^c = \bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma^c$

(b) $\left(\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma \right)^c = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma^c$

증명

(a)

$$
\begin{aligned}
x \in \Big(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma\Big)^c &\equiv \sim \Big(x \in \bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma\Big) && (^c\text{의 정의})\\
&\equiv \sim (\exists \gamma \in \Gamma \ \ \text{s.t.} \ \ x \in A_\gamma) && (\cup\text{의 정의})\\
&\equiv \forall \gamma \in \Gamma \ \ x \notin A_\gamma && (\text{한정기호의 부정규칙})\\
&\equiv \forall \gamma \in \Gamma \ \ x \in A_\gamma^c && (^c\text{의 정의})\\
&\equiv x \in \bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma^c && (\cap\text{의 정의})
\end{aligned}
$$

그러므로 $\left(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma\right)^c = \bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma^c$이다. (b)는 연습문제. □

정리 9 (분배법칙)

집합 A와 임의의 첨수집합족 $\mathcal{F} = \{B_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$에 대하여 다음이 성립한다:

(a) $A \cap (\bigcup_{\gamma \in \Gamma} B_\gamma) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} (A \cap B_\gamma)$

(b) $A \cup (\bigcap_{\gamma \in \Gamma} B_\gamma) = \bigcap_{\gamma \in \Gamma} (A \cup B_\gamma)$

증명

(a)

$$
\begin{aligned}
x \in A \cap (\bigcup_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma) &\equiv x \in A \ \wedge \ x \in \bigcup_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma && (\cap\text{의 정의})\\
&\equiv x \in A \ \wedge (\exists\gamma \in \Gamma \ \text{ s.t. } \ x \in B_\gamma) && (\cup\text{의 정의})\\
&\equiv \exists\gamma \in \Gamma \ \text{ s.t. } \ x \in A \wedge x \in B_\gamma\\
&\equiv \exists\gamma \in \Gamma \ \text{ s.t. } \ x \in A \cap B_\gamma && (\cap\text{의 정의})\\
&\equiv x \in \bigcup_{\gamma\in\Gamma}(A \cap B_\gamma) && (\cup\text{의 정의})
\end{aligned}
$$

그러므로 $A \cap (\bigcup_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma) = \bigcup_{\gamma\in\Gamma}(A \cap B_\gamma)$이 성립한다.

(b)는 연습문제. □

연습문제 2.6

2, 3, 4, 5(a)-(b), 6, 7번 : 스스로 해결.

2.7 러셀의 역리(참고)

수학계의 충격

1902년 영국의 철학자 러셀(1872-1970)은 집합을 원소로 하는 모든 집합의 집합을 허용한다면 모순이 일어난다는 사실을 주장함으로써 수학계에 큰 충격을 주었다.

보조정리 1

모든 집합의 집합 $\mathcal{U}$가 존재한다고 가정하고 $R = \{S \in \mathcal{U} \mid S \notin S\}$이라 하자. 그러면 $R \notin R$.

증명

(모순법) $R \in R$이라 가정하자. 그러면 집합 R의 정의에 의하여 $R \notin R$이다. 이것은 가정 $R \in R$에 모순이므로 위 명제의 결론 $R \notin R$은 참이다. $\square$

2.7 러셀의 역리(참고)

보조정리 1

모든 집합의 집합 $\mathcal{U}$가 존재한다고 가정하고
$R = \{S \in \mathcal{U} \mid S \notin S\}$이라 하자. 그러면 $R \notin R$.

증명

(모순법) $R \in R$이라 가정하자. 그러면 집합 R의 정의에 의하여
$R \notin R$이다. 이것은 가정 $R \in R$에 모순이므로 위 명제의 결론
$R \notin R$은 참이다. $\square$

2.7 러셀의 역리(참고)

보조정리 2

모든 집합의 집합 $\mathcal{U}$가 존재한다고 가정하고 $R = \{S \in \mathcal{U} \mid S \notin S\}$이라 하자. 그러면 $R \in R$.

증명

(모순법) $R \notin R$이라 가정하자. 그러면 집합 R의 정의에 의하여 $R \in R$이다. 이것은 가정 $R \notin R$에 모순이므로 위 명제의 결론 $R \in R$은 참이다. □

보조정리 2

모든 집합의 집합 $\mathcal{U}$가 존재한다고 가정하고

$R = \{S \in \mathcal{U} \mid S \notin S\}$이라 하자. 그러면 $R \in R$.

증명

(모순법) $R \notin R$이라 가정하자. 그러면 집합 R의 정의에 의하여

$R \in R$이다. 이것은 가정 $R \notin R$에 모순이므로 위 명제의 결론

$R \in R$은 참이다. □

정리 10

모든 집합들을 원소로 하는 집합 $\mathcal{U}$는 존재하지 않는다.

증명

보조정리 1과 보조정리 2로부터 다음을 얻는다:

$$R \notin R \wedge R \in R \equiv c$$

그러므로 두 보조정리의 가정인 모든 집합의 집합 $\mathcal{U}$가 존재한다는 것은 모순이다. □

2.7 러셀의 역리(참고)

정리 10

모든 집합들을 원소로 하는 집합 $\mathcal{U}$는 존재하지 않는다.

증명

보조정리 1과 보조정리 2로부터 다음을 얻는다:

$$R \notin R \wedge R \in R \equiv c$$

그러므로 두 보조정리의 가정인 모든 집합의 집합 $\mathcal{U}$가 존재한다는 것은 모순이다. □

2.7 러셀의 역리(참고)

질문

우주는 끝이 없을까?