3장 관계와 함수(Relations and Functions)

김준희

교재

- 집합론/You-Feng Lin, Shwu-Yeng T. Lin 지음/이흥천 옮김/경문사

3.4 함수(functions)

정의 8

공집합이 아닌 두 집합 X, Y에 대하여, X에서 Y로의 함수란 하나의 세 짝 (f, X, Y)으로서 다음 두 조건을 만족하는 X에서 Y로의 관계이다:

(a) (존재성) $\mathrm{Dom}(f) = X$

(b) (유일성) $(x, y) \in f \wedge (x, z) \in f \quad \Rightarrow \quad y = z$

- (f, X, Y) 대신 $f : X \to Y$를, $(x, y) \in f$ 대신 $y = f(x)$를 쓰기도 한다.

정의 8

공집합이 아닌 두 집합 X, Y에 대하여, X에서 Y로의 함수란 하나의 세 짝 (f, X, Y)으로서 다음 두 조건을 만족하는 X에서 Y로의 관계이다:

(a) (존재성) $\mathrm{Dom}(f) = X$

(b) (유일성) $(x, y) \in f \wedge (x, z) \in f \quad \Rightarrow \quad y = z$

- (f, X, Y) 대신 $f : X \to Y$를, $(x, y) \in f$ 대신 $y = f(x)$를 쓰기도 한다.

3.4 함수(functions)

정의 8

공집합이 아닌 두 집합 X, Y에 대하여, X에서 Y로의 함수란 하나의 세 짝 (f, X, Y)으로서 다음 두 조건을 만족하는 X에서 Y로의 관계이다:

(a) (존재성) $\mathrm{Dom}(f) = X$

(b) (유일성) $(x, y) \in f \wedge (x, z) \in f \quad \Rightarrow \quad y = z$

- (f, X, Y) 대신 $f : X \to Y$를, $(x, y) \in f$ 대신 $y = f(x)$를 쓰기도 한다.

3.4 함수(functions)

정의 8

공집합이 아닌 두 집합 X, Y에 대하여, X에서 Y로의 함수란 하나의 세 짝 (f, X, Y)으로서 다음 두 조건을 만족하는 X에서 Y로의 관계이다:

(a) (존재성) $\mathrm{Dom}(f) = X$

(b) (유일성) $(x, y) \in f \wedge (x, z) \in f \quad \Rightarrow \quad y = z$

- (f, X, Y) 대신 $f : X \to Y$를, $(x, y) \in f$ 대신 $y = f(x)$를 쓰기도 한다.

정의

함수 $f : X \to Y$에 대하여 $y = f(x)$일 때, y를 f에 따른 x에서의 상(image)(또는 함숫값)이라 하고, x는 f에 따른 y의 원상(preimage)이라고 한다.

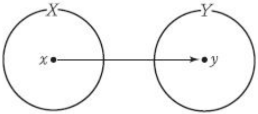

Figure 9 y is the image of x

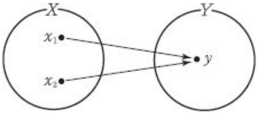

Figure 10 x_1 and x_2 are preimages of y

3.4 함수(functions)

정의

함수 $f : X \to Y$에 대하여 집합 Y를 f의 공역(codomain)이라 한다.

- 일반적으로 함수의 공역은 함수의 치역과 같지 않을 수 있다.

$$Y \neq \{f(x) \in Y \mid x \in X\}$$

3.4 함수(functions)

정의

함수 $f : X \to Y$에 대하여 집합 Y를 f의 공역(codomain)이라 한다.

- 일반적으로 함수의 공역은 함수의 치역과 같지 않을 수 있다.

$$Y \neq \{f(x) \in Y \mid x \in X\}$$

예제 7

각 $x \in \mathbb{R}$에 대하여 $[x]$는 x보다 작거나 같은 실수 중 가장 큰 정수를 나타낸다. 이를테면

$$[\sqrt{2}] = 1,\ \left[-\tfrac{1}{2}\right] = -1,\ [-5] = -5,\ [0] = 0,\ [7] = 7$$

여기서 $f(x) = [x]$로 정의된 함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$의 공역은 실수의 집합 $\mathbb{R}$이지만 그 치역은 공역 $\mathbb{R}$의 진부분집합으로서 정수들의 집합 $\mathbb{Z}$와 같다.

- 주어진 함수에 대하여 그 공역을 바꿀 때마다 새로운 함수를 얻는다.

예제 7

각 $x \in \mathbb{R}$에 대하여 $[x]$는 x보다 작거나 같은 실수 중 가장 큰 정수를 나타낸다. 이를테면

$$[\sqrt{2}] = 1,\ \left[-\tfrac{1}{2}\right] = -1,\ [-5] = -5,\ [0] = 0,\ [7] = 7$$

여기서 $f(x) = [x]$로 정의된 함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$의 공역은 실수의 집합 $\mathbb{R}$이지만 그 치역은 공역 $\mathbb{R}$의 진부분집합으로서 정수들의 집합 $\mathbb{Z}$와 같다.

- 주어진 함수에 대하여 그 공역을 바꿀 때마다 새로운 함수를 얻는다.

3.4 함수(functions)

정리 6

함수 $f : X \to Y$에 대하여 W가 f의 공역 Y를 포함하는 집합이라 하자. 그러면 f는 X에서 W로의 함수이다. (유의: 교재와 다름)

증명

주장1 : 우선 f는 X에서 W로의 관계, 즉, $f \subseteq X \times W$이다.

$$\begin{aligned}(x,y) \in f &\Rightarrow x \in X \land y \in Im(f) && (\text{상의 정의})\\ &\Rightarrow x \in X \land y \in W && (\mathrm{Im}(f) \subseteq W)\\ &\Rightarrow (x,y) \in X \times W && (\times\text{의 정의})\end{aligned}$$

따라서 f는 X에서 W로의 관계이다.

3.4 함수(functions)

정리 6

함수 $f : X \to Y$에 대하여 W가 f의 공역 Y를 포함하는 집합이라 하자. 그러면 f는 X에서 W로의 함수이다. (유의: 교재와 다름)

증명

주장1 : 우선 f는 X에서 W로의 관계, 즉, $f \subseteq X \times W$이다.

$$\begin{aligned}
(x, y) \in f &\Rightarrow x \in X \wedge y \in Im(f) && (\text{상의 정의}) \\
&\Rightarrow x \in X \wedge y \in W && (\mathrm{Im}(f) \subseteq W) \\
&\Rightarrow (x, y) \in X \times W && (\times\text{의 정의})
\end{aligned}$$

따라서 f는 X에서 W로의 관계이다.

3.4 함수(functions)

주장2 : $\mathrm{Dom}(f) = X$.

그런데 가정에서 $f : X \to Y$는 함수이므로 $\mathrm{Dom}(f) = X$이다.

주장3 : $(x, y) \in f \wedge (x, y) \in f \quad \Rightarrow \quad y = z$.

$f : X \to Y$는 함수이기 때문에 명백하다.

그러므로 f는 X에서 W로의 함수이다. $\square$

3.4 함수(functions)

정리 7

$f : X \to Y$와 $g : X \to Y$가 함수라 하자. 그러면

$$f = g \quad \text{iff} \quad f(x) = g(x) \quad \forall\, x \in X$$

증명

$(\Rightarrow)$ $f = g$라 가정하자. 그러면 임의의 $x \in X$에 대하여

$$\begin{aligned} y = f(x) &\Leftrightarrow (x, y) \in f && (\text{기호}) \\ &\Leftrightarrow (x, y) \in g && (f = g) \\ &\Leftrightarrow y = g(x) && (\text{기호}) \end{aligned}$$

그러므로 $f(x) = g(x)$ $\forall x \in X$ (왜냐하면, y는 유일하기 때문에)

정리 7

$f : X \to Y$와 $g : X \to Y$가 함수라 하자. 그러면

$$f = g \quad \text{iff} \quad f(x) = g(x) \quad \forall\, x \in X$$

증명

$(\Rightarrow)$ $f = g$라 가정하자. 그러면 임의의 $x \in X$에 대하여

$$\begin{aligned} y = f(x) &\Leftrightarrow (x, y) \in f \quad &&(\text{기호}) \\ &\Leftrightarrow (x, y) \in g &&(f = g) \\ &\Leftrightarrow y = g(x) &&(\text{기호}) \end{aligned}$$

그러므로 $f(x) = g(x)\ \forall x \in X$ (왜냐하면, y는 유일하기 때문에)

($\Leftarrow$) $f(x) = g(g)\ \forall x \in X$라 가정하자. 그러면

$$\begin{aligned} (x, y) \in f &\Leftrightarrow y = f(x) && \text{(기호)} \\ &\Leftrightarrow y = g(x) && (f(x) = g(x)) \\ &\Leftrightarrow (x, y) \in g && \text{(기호)} \end{aligned}$$

그러므로 $f = g$이다. $\square$

예제 8

$A \subseteq X$이고 $A \neq \phi$일 때, 관계

$$\{(x, y) \in X \times \{0, 1\} \mid (x \in A \Rightarrow y = 1) \wedge (x \notin A \Rightarrow y = 0)\}$$

은 X에서 $\{0, 1\}$로의 함수이다. 이 함수를 X에서 A의 특성함수라 하고 χ_A로 나타낸다. 즉,

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \in X - A \end{cases}$$

예제 9

집합 X에 대하여

$$\Delta_X = \{(x, x) \mid x \in X\}$$

는 X에서 X로의 함수이다. 이 함수를 X 위의 항등함수라 하고 I_X로 나타낸다. 즉,

$$I_X(x) = x \;\forall x \in X$$

예제 10

X, Y가 공집합이 아닌 집합이고, b가 Y의 고정된 원소라 하자. 그러면 관계

$$C_b = \{(x, b) \mid x \in X\}$$

는 X에서 Y로의 함수이다. 이 함수를 **상수함수**라 한다. 즉,

$$C_b(x) = b \ \forall x \in X$$

정리 8

두 함수 $f : A \to C$, $g : B \to D$가

$$f(x) = g(x) \quad \forall x \in A \cap B$$

을 만족한다고 하자. 그러면 $f \cup g$는 다음과 같이 정의된 함수 h와 같다:

$$h = f \cup g : A \cup B \to C \cup D$$

여기서

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A \\ g(x), & x \in B \end{cases}$$

증명

판서로 증명 □

3.4 함수(functions)

정리 8

두 함수 $f : A \to C$, $g : B \to D$가

$$f(x) = g(x) \quad \forall x \in A \cap B$$

을 만족한다고 하자. 그러면 $f \cup g$는 다음과 같이 정의된 함수 h와 같다:

$$h = f \cup g : A \cup B \to C \cup D$$

여기서

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A \\ g(x), & x \in B \end{cases}$$

증명

판서로 증명 $\square$

연습문제 3.4

7, 9, 10, 12, 13, 14번 : 스스로 해결