

## 3장 관계와 함수(Relations and Functions)

김준희

### 교재

- 집합론/You-Feng Lin, Shwu-Yeng T. Lin 지음/이흥천  
옮김/경문사

### 3.5 집합의 상과 역상

#### 정의 9

함수  $f : X \rightarrow Y$ 에 대하여  $A, B$ 가 각각  $X, Y$ 의 부분집합일 때

(a)  $f$ 에 따른  $A$ 의 **상**이란 다음 집합을 의미한다:

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$$

(b)  $f$ 에 따른  $B$ 의 **역상**이란 다음 집합을 의미한다:

$$f^{-1}(B) = \{x \mid f(x) \in B\}$$

### 3.5 집합의 상과 역상

#### 정의 9

함수  $f : X \rightarrow Y$ 에 대하여  $A, B$ 가 각각  $X, Y$ 의 부분집합일 때

(a)  $f$ 에 따른  $A$ 의 **상**이란 다음 집합을 의미한다:

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$$

(b)  $f$ 에 따른  $B$ 의 **역상**이란 다음 집합을 의미한다:

$$f^{-1}(B) = \{x \mid f(x) \in B\}$$

### 3.5 집합의 상과 역상

#### 정의 9

함수  $f : X \rightarrow Y$ 에 대하여  $A, B$ 가 각각  $X, Y$ 의 부분집합일 때

(a)  $f$ 에 따른  $A$ 의 **상**이란 다음 집합을 의미한다:

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$$

(b)  $f$ 에 따른  $B$ 의 **역상**이란 다음 집합을 의미한다:

$$f^{-1}(B) = \{x \mid f(x) \in B\}$$

### 3.5 집합의 상과 역상

#### 정리 9

함수  $f : X \rightarrow Y$ 에 대하여 다음이 성립한다.

(a)  $f(\phi) = \phi$

(b)  $\forall x \in X \quad f(\{x\}) = \{f(x)\}$

(c)  $A \subseteq B \subseteq X$ 이면,  $f(A) \subseteq f(B)$

(d)  $C \subseteq D \subseteq Y$ 이면,  $f^{-1}(C) \subseteq f^{-1}(D)$

#### 증명

Leave to students.



### 3.5 집합의 상과 역상

#### 정리 9

함수  $f : X \rightarrow Y$ 에 대하여 다음이 성립한다.

(a)  $f(\phi) = \phi$

(b)  $\forall x \in X \quad f(\{x\}) = \{f(x)\}$

(c)  $A \subseteq B \subseteq X$ 이면,  $f(A) \subseteq f(B)$

(d)  $C \subseteq D \subseteq Y$ 이면,  $f^{-1}(C) \subseteq f^{-1}(D)$

#### 증명

Leave to students.



### 3.5 집합의 상과 역상

#### 정리 9

함수  $f : X \rightarrow Y$ 에 대하여 다음이 성립한다.

(a)  $f(\phi) = \phi$

(b)  $\forall x \in X \quad f(\{x\}) = \{f(x)\}$

(c)  $A \subseteq B \subseteq X$ 이면,  $f(A) \subseteq f(B)$

(d)  $C \subseteq D \subseteq Y$ 이면,  $f^{-1}(C) \subseteq f^{-1}(D)$

#### 증명

Leave to students.



### 3.5 집합의 상과 역상

#### 정리 9

함수  $f : X \rightarrow Y$ 에 대하여 다음이 성립한다.

(a)  $f(\phi) = \phi$

(b)  $\forall x \in X \quad f(\{x\}) = \{f(x)\}$

(c)  $A \subseteq B \subseteq X$ 이면,  $f(A) \subseteq f(B)$

(d)  $C \subseteq D \subseteq Y$ 이면,  $f^{-1}(C) \subseteq f^{-1}(D)$

#### 증명

Leave to students.



### 3.5 집합의 상과 역상

#### 정리 9

함수  $f : X \rightarrow Y$ 에 대하여 다음이 성립한다.

- (a)  $f(\phi) = \phi$
- (b)  $\forall x \in X \quad f(\{x\}) = \{f(x)\}$
- (c)  $A \subseteq B \subseteq X$ 이면,  $f(A) \subseteq f(B)$
- (d)  $C \subseteq D \subseteq Y$ 이면,  $f^{-1}(C) \subseteq f^{-1}(D)$

#### 증명

Leave to students.



### 3.5 집합의 상과 역상

#### 정리 9

함수  $f : X \rightarrow Y$ 에 대하여 다음이 성립한다.

- (a)  $f(\phi) = \phi$
- (b)  $\forall x \in X \quad f(\{x\}) = \{f(x)\}$
- (c)  $A \subseteq B \subseteq X$ 이면,  $f(A) \subseteq f(B)$
- (d)  $C \subseteq D \subseteq Y$ 이면,  $f^{-1}(C) \subseteq f^{-1}(D)$

#### 증명

Leave to students.



### 3.5 집합의 상과 역상

#### 정리 10

함수  $f : X \rightarrow Y$ 와 정의역  $X$ 의 부분집합의 족  $\{A_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ 에 대하여 다음이 성립한다.

$$(a) \quad f\left(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma\right) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} f(A_\gamma)$$

$$(b) \quad f\left(\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma\right) \subseteq \bigcap_{\gamma \in \Gamma} f(A_\gamma)$$

### 3.5 집합의 상과 역상

#### 정리 10

함수  $f : X \rightarrow Y$ 와 정의역  $X$ 의 부분집합의 족  $\{A_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ 에 대하여 다음이 성립한다.

$$(a) \quad f\left(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma\right) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} f(A_\gamma)$$

$$(b) \quad f\left(\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma\right) \subseteq \bigcap_{\gamma \in \Gamma} f(A_\gamma)$$

### 3.5 집합의 상과 역상

#### 정리 10

함수  $f : X \rightarrow Y$ 와 정의역  $X$ 의 부분집합의 족  $\{A_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ 에 대하여 다음이 성립한다.

$$(a) \quad f\left(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma\right) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} f(A_\gamma)$$

$$(b) \quad f\left(\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma\right) \subseteq \bigcap_{\gamma \in \Gamma} f(A_\gamma)$$

### 3.5 집합의 상과 역상

#### 증명

정의 9와 제2장 정의 6(111쪽)에 의하여

$$(a) \quad y \in f\left(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_{\gamma}\right) \Leftrightarrow y = f(x) \quad \text{for some } x \in \bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_{\gamma}$$

$$\Leftrightarrow y = f(x) \quad \text{for some } x \in A_{\gamma} \text{ for some } \gamma \in \Gamma$$

$$\Leftrightarrow y \in f(A_{\gamma}) \quad \text{for some } \gamma \in \Gamma$$

$$\Leftrightarrow y \in \bigcup_{\gamma \in \Gamma} f(A_{\gamma})$$

$$\text{그러므로 } f\left(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_{\gamma}\right) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} f(A_{\gamma})$$

### 3.5 집합의 상과 역상

(b) 각  $\gamma \in \Gamma$ 에 대하여  $\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma \subseteq A_\gamma$ 이므로, 정리 9(c)에 의하여  
각  $\gamma \in \Gamma$ 에 대하여

$$f\left(\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma\right) \subseteq f(A_\gamma)$$

그러므로, 2장 정의 7(113쪽)에 의하여

$$f\left(\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma\right) \subseteq \bigcap_{\gamma \in \Gamma} f(A_\gamma).$$

### 3.5 집합의 상과 역상

다음 예제에서 보듯이 정리 10(b)에서의 포함기호  $\subseteq$  를 등호  $=$  로 바꿔 놓을 수 없는 경우가 있다.

#### 예제 11

$X = \{a, b\}$ ,  $Y = \{c\}$ ,  $\Gamma = \{1, 2\}$ ,  $A_1 = \{a\}$ ,  $A_2 = \{b\}$ 라 하고  $f : X \rightarrow Y$ 가  $f(a) = f(b) = c$ 을 만족하는 상수함수라 하자. 그러면

$$f(A_1 \cap A_2) = f(\emptyset) = \emptyset$$

이다. 반면에

$$f(A_1) \cap f(A_2) = \{c\} \cap \{c\} = \{c\}$$

이다. 따라서  $f(A_1 \cap A_2) \neq f(A_1) \cap f(A_2)$ 이다. □

### 3.5 집합의 상과 역상

#### 정리 11

$f : X \rightarrow Y$ 가 함수이고  $\{B_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ 가  $Y$ 의 부분집합들의 족이라 하자. 그러면

$$(a) \quad f^{-1}\left(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} B_\gamma\right) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} f^{-1}(B_\gamma)$$

$$(b) \quad f^{-1}\left(\bigcap_{\gamma \in \Gamma} B_\gamma\right) = \bigcap_{\gamma \in \Gamma} f^{-1}(B_\gamma)$$

### 3.5 집합의 상과 역상

#### 정리 11

$f : X \rightarrow Y$ 가 함수이고  $\{B_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ 가  $Y$ 의 부분집합들의 족이라 하자. 그러면

$$(a) \quad f^{-1}\left(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} B_\gamma\right) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} f^{-1}(B_\gamma)$$

$$(b) \quad f^{-1}\left(\bigcap_{\gamma \in \Gamma} B_\gamma\right) = \bigcap_{\gamma \in \Gamma} f^{-1}(B_\gamma)$$

### 3.5 집합의 상과 역상

#### 정리 11

$f : X \rightarrow Y$ 가 함수이고  $\{B_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ 가  $Y$ 의 부분집합들의 족이라 하자. 그러면

$$(a) \quad f^{-1}\left(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} B_\gamma\right) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} f^{-1}(B_\gamma)$$

$$(b) \quad f^{-1}\left(\bigcap_{\gamma \in \Gamma} B_\gamma\right) = \bigcap_{\gamma \in \Gamma} f^{-1}(B_\gamma)$$

### 3.5 집합의 상과 역상

#### 증명

정의 9와 제2장 정의 6에 의하여

$$(a) \quad x \in f^{-1}\left(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} B_{\gamma}\right) \Leftrightarrow f(x) \in \bigcup_{\gamma \in \Gamma} B_{\gamma}$$

$$\Leftrightarrow f(x) \in B_{\gamma} \quad \text{for some } \gamma \in \Gamma$$

$$\Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_{\gamma}) \quad \text{for some } \gamma \in \Gamma$$

$$\Leftrightarrow x \in \bigcup_{\gamma \in \Gamma} f^{-1}(B_{\gamma})$$

그러므로  $f^{-1}\left(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} B_{\gamma}\right) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} f^{-1}(B_{\gamma})$ 이다.

### 3.5 집합의 상과 역상

(b) (a)의 증명에서 기호  $\cup$ 를  $\cap$ 로, 또 “적당한 ...에 대하여”를 “모든 ...에 대하여”로 각각 바꿈으로써 (b)를 증명할 수 있다.



## 3.5 집합의 상과 역상

### 정리 12

$f : X \rightarrow Y$ 가 함수이고  $B$ 와  $C$ 가  $Y$ 의 부분집합이라 하자.  
그러면

$$f^{-1}(B - C) = f^{-1}(B) - f^{-1}(C)$$

### 증명

정의 9와 제2장 정의 5에 의하여

$$x \in f^{-1}(B - C) \Leftrightarrow f(x) \in (B - C)$$

$$\Leftrightarrow f(x) \in B \wedge f(x) \notin C$$

$$\Leftrightarrow x \in f^{-1}(B) \wedge x \notin f^{-1}(C)$$

$$\Leftrightarrow x \in f^{-1}(B) - f^{-1}(C)$$

그러므로  $f^{-1}(B - C) = f^{-1}(B) - f^{-1}(C)$ 이다. □

### 3.5 집합의 상과 역상

#### 정리 12

$f : X \rightarrow Y$ 가 함수이고  $B$ 와  $C$ 가  $Y$ 의 부분집합이라 하자.  
그러면

$$f^{-1}(B - C) = f^{-1}(B) - f^{-1}(C)$$

#### 증명

정의 9와 제2장 정의 5에 의하여

$$x \in f^{-1}(B - C) \Leftrightarrow f(x) \in (B - C)$$

$$\Leftrightarrow f(x) \in B \wedge f(x) \notin C$$

$$\Leftrightarrow x \in f^{-1}(B) \wedge x \notin f^{-1}(C)$$

$$\Leftrightarrow x \in f^{-1}(B) - f^{-1}(C)$$

그러므로  $f^{-1}(B - C) = f^{-1}(B) - f^{-1}(C)$ 이다. □

## 연습문제 3.5

1, 4, 5, 6, 9, 10, 11 번 : 조별 1문제씩 숙제

12번 : 공통 숙제

### 3.6 단사, 전사, 전단사

#### 정의 10

함수  $f : X \rightarrow Y$ 에서의  $x_1, x_2 \in X$ 에 대하여

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

일 때, 이 함수를 **일대일(one-to-one)** 또는 **단사적(injective)**이라 한다. 단사적 함수를 간단히 **단사(injection)**라고 부른다.

- 단사함수의 정의와 동치인 명제 :

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

### 3.6 단사, 전사, 전단사

#### 정의 10

함수  $f : X \rightarrow Y$ 에서의  $x_1, x_2 \in X$ 에 대하여

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

일 때, 이 함수를 **일대일(one-to-one)** 또는 **단사적(injective)**이라 한다. 단사적 함수를 간단히 **단사(injection)**라고 부른다.

- 단사함수의 정의와 동치인 명제 :

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

### 3.6 단사, 전사, 전단사

#### 정의 11

함수  $f : X \rightarrow Y$ 에 있어서 임의의  $y \in Y$ 에 대하여 적어도 하나의  $x \in X$ 가 존재하여  $y = f(x)$ 일 때, 즉,

$$f(X) = Y$$

일 때, 이 함수를 **위로(onto)** 또는 **전사적(surjective)**이라 한다.  
전사적 함수를 간단히 **전사(surjection)**라고 부른다.

### 3.6 단사, 전사, 전단사

#### 예제 12

$f(x) = \sin x$ 로 정의된 함수  $f : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ 은 전사이지만 그 공역  $[-1, 1]$ 을 집합  $\mathbb{R}$ 로 바꿔 놓은 함수  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 는 전사가 아니다.

## 3.6 단사, 전사, 전단사

### 정의 12

함수  $f : X \rightarrow Y$ 가 단사적이고 전사적일 때 이 함수를 **전단사적(bijective)**이라 하고 간단히 **전단사(bijection)** 또는 **일대일 대응(one-to-one correspondence)**이라고 한다.

### 3.6 단사, 전사, 전단사

정리 10(b)(173쪽)와 다음 정리 비교.

#### 정리 13

$f : X \rightarrow Y$ 가 단사이고  $\{A_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ 가  $X$ 의 부분집합들의 족이라 하자. 그러면

$$f\left(\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma\right) = \bigcap_{\gamma \in \Gamma} f(A_\gamma)$$

### 3.6 단사, 전사, 전단사

#### 증명

정의 9와 제2장 정의 7에 의하여 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} y \in \bigcap_{\gamma \in \Gamma} f(A_\gamma) &\Leftrightarrow \forall \gamma \in \Gamma \quad y \in f(A_\gamma) \\ &\Leftrightarrow \forall \gamma \in \Gamma \quad [\exists x_\gamma \in A_\gamma \text{ s.t. } y = f(x_\gamma)] \end{aligned}$$

가정에서  $f : X \rightarrow Y$ 는 단사이므로 모든  $x_\gamma \in A_\gamma$ 들은 같다.  
이것을  $x_0$ 라 놓으면

### 3.6 단사, 전사, 전단사

$$y \in \bigcap_{\gamma \in \Gamma} f(A_\gamma) \Leftrightarrow \forall \gamma \in \Gamma \ [\exists x_\gamma \in A_\gamma \text{ s.t. } y = f(x_\gamma)]$$

$$\Leftrightarrow \exists x_0 \in \bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma \text{ s.t. } y = f(x_0)$$

$$\Leftrightarrow y \in f\left(\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma\right)$$

그러므로  $f\left(\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma\right) = \bigcap_{\gamma \in \Gamma} f(A_\gamma)$ 이다.



## 3.6 단사, 전사, 전단사

### 정리 14

함수  $f : X \rightarrow Y$ 가 전단사라 하자. 그러면  $f^{-1} : Y \rightarrow X$ 도 전단사이다.

### 증명

주장1 : 관계  $f^{-1}$ 는  $Y$ 에서  $X$ 로의 함수이다.

$f^{-1}$ 는 전사  $f : X \rightarrow Y$ 의 역관계이므로

$\text{Dom}(f^{-1}) = \text{Im}(f) = Y$ 이다.

$(y, x_1) \in f^{-1}, (y, x_2) \in f^{-1}$ 라 놓으면

$(x_1, y) \in f, (x_2, y) \in f$ 이므로  $y = f(x_1) = f(x_2)$ 이다.

가정에서  $f$ 는 단사이므로  $x_1 = x_2$ 이다.

그러므로  $f^{-1} : Y \rightarrow X$ 는 함수이다.

## 3.6 단사, 전사, 전단사

### 정리 14

함수  $f : X \rightarrow Y$ 가 전단사라 하자. 그러면  $f^{-1} : Y \rightarrow X$ 도 전단사이다.

### 증명

주장1 : 관계  $f^{-1}$ 는  $Y$ 에서  $X$ 로의 함수이다.

$f^{-1}$ 는 전사  $f : X \rightarrow Y$ 의 역관계이므로

$\text{Dom}(f^{-1}) = \text{Im}(f) = Y$ 이다.

$(y, x_1) \in f^{-1}$ ,  $(y, x_2) \in f^{-1}$ 라 놓으면

$(x_1, y) \in f$ ,  $(x_2, y) \in f$ 이므로  $y = f(x_1) = f(x_2)$ 이다.

가정에서  $f$ 는 단사이므로  $x_1 = x_2$ 이다.

그러므로  $f^{-1} : Y \rightarrow X$ 는 함수이다.

### 3.6 단사, 전사, 전단사

주장2 :  $f^{-1} : Y \rightarrow X$ 는 단사이다.

$y_1, y_2 \in Y$ 에 대하여  $f^{-1}(y_1) = f^{-1}(y_2) = x$ 라 놓으면  
 $f(x) = y_1, f(x) = y_2$ 이다.

가정에서  $f$ 는 **함수**이므로,  $y_1 = y_2$ 이다. 따라서  $f^{-1}$ 는  
단사이다.

### 3.6 단사, 전사, 전단사

주장3 :  $f^{-1} : Y \rightarrow X$ 는 전사이다.

$f^{-1}$ 는  $f$ 의 역관계이므로

$$\text{Im}(f^{-1}) = \text{Dom}(f)$$

그리고  $f$ 는 함수이므로,  $\text{Dom}(f) = X$ 이다. 따라서  $\text{Im}(f^{-1}) = X$ 이다. 즉,  $f^{-1}$ 는 전사이다.

주장1, 2, 3에 의하여  $f^{-1} : Y \rightarrow X$ 는 전단사이다. □

- $f$ 가 전단사일 때,  $f^{-1} : Y \rightarrow X$ 를  $f$ 의 역함수(inverse function)라 부른다.

## 3.6 단사, 전사, 전단사

주장3 :  $f^{-1} : Y \rightarrow X$ 는 전사이다.

$f^{-1}$ 는  $f$ 의 역관계이므로

$$\text{Im}(f^{-1}) = \text{Dom}(f)$$

그리고  $f$ 는 함수이므로,  $\text{Dom}(f) = X$ 이다. 따라서  $\text{Im}(f^{-1}) = X$ 이다. 즉,  $f^{-1}$ 는 전사이다.

주장1, 2, 3에 의하여  $f^{-1} : Y \rightarrow X$ 는 전단사이다. □

- $f$ 가 전단사일 때,  $f^{-1} : Y \rightarrow X$ 를  $f$ 의 역함수(inverse function)라 부른다.

## 연습문제 3.6

1, 5, 8, 9, 12, 13 번 : 스스로 해결

## 3.7 함수의 합성(Composition)

### 정의 13

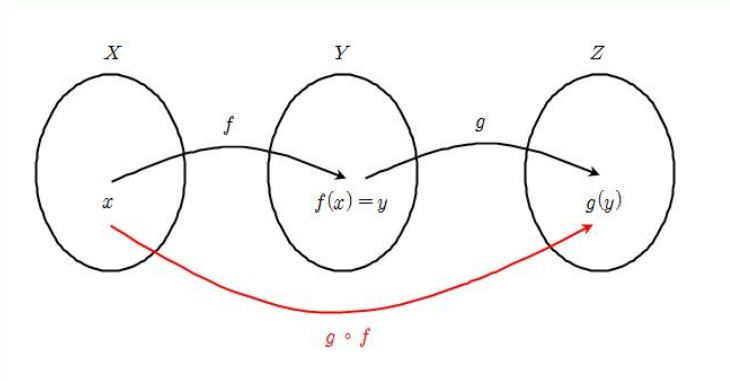
두 함수  $f: X \rightarrow Y$ 와  $g: Y \rightarrow Z$ 에 대하여,  $f$ 와  $g$ 의 **합성(composition)**은 다음과 같이 정의된 함수  $g \circ f: X \rightarrow Z$ 이다.

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad \forall x \in X$$

$g \circ f$ 를 아래와 같이 나타낼 수도 있다.

$$g \circ f = \{(x, z) \in X \times Z \mid \exists y \in Y [(x, y) \in f \wedge (y, z) \in g]\}$$

### 3.7 함수의 합성(Composition)



## 3.7 함수의 합성(Composition)

### 예제 13

$\forall x \in \mathbb{R} \ f(x) = x + 1, \ g(x) = x^2$ 으로 정의된 함수

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

에 대하여 합성함수  $(g \circ f)(x), (f \circ g)(x)$ 를 구하여라.

풀이

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x + 1) = (x + 1)^2$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = x^2 + 1$$

$$(g \circ f)(0) = (f \circ g)(0) = 1 \text{이지만}$$

$x \neq 0$ 이면,  $(g \circ f)(x) \neq (f \circ g)(x)$ 이다.(why?)

그러므로  $g \circ f \neq f \circ g$ 이다. □

## 3.7 함수의 합성(Composition)

### 예제 13

$\forall x \in \mathbb{R} \ f(x) = x + 1, \ g(x) = x^2$ 으로 정의된 함수

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

에 대하여 합성함수  $(g \circ f)(x), (f \circ g)(x)$ 를 구하여라.

### 풀이

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x + 1) = (x + 1)^2$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = x^2 + 1$$

$$(g \circ f)(0) = (f \circ g)(0) = 1 \text{이지만}$$

$x \neq 0$ 이면,  $(g \circ f)(x) \neq (f \circ g)(x)$ 이다.(why?)

그러므로  $g \circ f \neq f \circ g$ 이다.



### 3.7 함수의 합성(Composition)

#### 정리 15

$f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow Z, h : Z \rightarrow W$ 가 함수라 하자. 그러면

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

#### 증명

$(h \circ g) \circ f$ 와  $h \circ (g \circ f)$ 는 모두  $X$ 에서  $W$ 로의 함수인 것을 쉽게 알 수 있다. 그러므로 위 등식이 성립함을 보이려면 3.4절의 정리 7(161쪽)에 의해 다음을 보이면 된다.

$$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ (g \circ f))(x) \quad \forall x \in X$$

### 3.7 함수의 합성(Composition)

#### 정리 15

$f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow Z, h : Z \rightarrow W$ 가 함수라 하자. 그러면

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

#### 증명

$(h \circ g) \circ f$ 와  $h \circ (g \circ f)$ 는 모두  $X$ 에서  $W$ 로의 함수인 것을 쉽게 알 수 있다. 그러므로 위 등식이 성립함을 보이려면 3.4절의 정리 7(161쪽)에 의해 다음을 보이면 된다.

$$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ (g \circ f))(x) \quad \forall x \in X$$

### 3.7 함수의 합성(Composition)

합성함수의 정의에 의하여

$$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x)))$$

이고

$$(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x)))$$

이다.

따라서  $((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ (g \circ f))(x) \quad \forall x \in X$ .

그러므로  $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ 이다. □

### 3.7 함수의 합성(Composition)

#### 정리 16

$f : X \rightarrow Y$ 가 함수라 하자. 그러면

- (a)  $g \circ f = I_X$  (항등함수)을 만족하는 함수  $g : Y \rightarrow X$ 가 존재하면,  $f : X \rightarrow Y$ 는 단사이다.
- (b)  $f \circ h = I_Y$ 을 만족하는 함수  $h : Y \rightarrow X$ 가 존재하면,  $f : X \rightarrow Y$ 는 전사이다.

### 3.7 함수의 합성(Composition)

#### 정리 16

$f : X \rightarrow Y$ 가 함수라 하자. 그러면

- (a)  $g \circ f = I_X$  (항등함수)을 만족하는 함수  $g : Y \rightarrow X$ 가 존재하면,  $f : X \rightarrow Y$ 는 단사이다.
- (b)  $f \circ h = I_Y$ 을 만족하는 함수  $h : Y \rightarrow X$ 가 존재하면,  $f : X \rightarrow Y$ 는 전사이다.

### 3.7 함수의 합성(Composition)

#### 정리 16

$f : X \rightarrow Y$ 가 함수라 하자. 그러면

- (a)  $g \circ f = I_X$  (항등함수)을 만족하는 함수  $g : Y \rightarrow X$ 가 존재하면,  $f : X \rightarrow Y$ 는 단사이다.
- (b)  $f \circ h = I_Y$ 을 만족하는 함수  $h : Y \rightarrow X$ 가 존재하면,  $f : X \rightarrow Y$ 는 전사이다.

### 3.7 함수의 합성(Composition)

#### 증명

(a) 임의의  $x_1, x_2 \in X$ 에 대하여  $f(x_1) = f(x_2)$ 라 하자. 그러면

$$x_1 = I_X(x_1) = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = I_X(x_2) = x_2.$$

그러므로  $f$ 는 단사이다.

(b)  $y \in Y$ 라 하자. 그러면  $h(y) = x$ 인  $x \in X$ 가 존재한다.

따라서

$$f(x) = f(h(y)) = (f \circ h)(y) = I_Y(y) = y.$$

그러므로  $f$ 는 전사이다. □

## 연습문제 3.7

- 5, 6, 7, 9번 : 스스로 해결
- cf.) 6번과 비교.  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 일 때,  
 $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = x$ 이면  $f$ 는 전단사이다.