4장 가부번집합과 비가부번집합

김준희

교재

- 집합론/You-Feng Lin, Shwu-Yeng T. Lin 지음/이홍천 옮김/경문사

4.1 유한집합과 무한집합

정의 1(Dedekind, 1888)

주어진 집합 $X(\neq \phi)$에 대하여 그 진부분집합 Y가 존재함으로써 X와 Y 사이에 일대일 대응이 존재할 때 X를 **무한집합**이라 한다. 즉

$$X\text{는 무한집합} \quad \Leftrightarrow \quad \exists\text{단사 } f : X \to X \ \text{ s.t. } \ f(X) \subset X.$$

한편 무한집합이 아닌 집합을 **유한집합**이라 한다.

- 자연수들의 집합 $\mathbb{N}$이 무한집합임을 설명할 수 있는 단사 함수 $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$를 찾으시오.(check!)

정의 1(Dedekind, 1888)

주어진 집합 $X(\neq \phi)$에 대하여 그 진부분집합 Y가 존재함으로써 X와 Y 사이에 일대일 대응이 존재할 때 X를 무한집합이라 한다. 즉

$$X\text{는 무한집합} \quad \Leftrightarrow \quad \exists\text{단사 } f : X \to X \ \text{ s.t. } \ f(X) \subset X.$$

한편 무한집합이 아닌 집합을 유한집합이라 한다.

- 자연수들의 집합 $\mathbb{N}$이 무한집합임을 설명할 수 있는 단사함수 $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$를 찾으시오.(check!)

예제 1

공집합 ϕ와 한원소집합은 유한집합이다.

풀이

(1) 공집합은 진부분집합을 갖지 않으므로 무한집합이 아니다. 그러므로 ϕ는 유한집합이다.

(2) $X = \{a\}$이라 하자. X의 진부분집합은 ϕ뿐이고, X와 ϕ 사이에는 일대일 대응이 존재하지 않는다(why?). 따라서 X는 유한집합이다. □

예제 1

공집합 ϕ와 한원소집합은 유한집합이다.

풀이

(1) 공집합은 진부분집합을 갖지 않으므로 무한집합이 아니다. 그러므로 ϕ는 유한집합이다.

(2) $X = \{a\}$이라 하자. X의 진부분집합은 ϕ뿐이고, X와 ϕ 사이에는 일대일 대응이 존재하지 않는다(why?). 따라서 X는 유한집합이다. $\square$

정리 1

(a) 임의의 무한집합의 초집합은 무한집합이다.

(b) 임의의 유한집합의 부분집합은 유한집합이다.

증명

(a) X가 무한집합이고 $X \subseteq Y$라 하자. 무한집합의 정의에 의하여 $f(X) \neq X$을 만족하는 단사 $f : X \to X$가 존재한다. 함수 $g : Y \to Y$를 다음과 같이 정의하자:

$$g(y) = \begin{cases} f(y), & y \in X \\ y, & y \in Y - X \end{cases}$$

정리 1

(a) 임의의 무한집합의 초집합은 무한집합이다.

(b) 임의의 유한집합의 부분집합은 유한집합이다.

증명

(a) X가 무한집합이고 $X \subseteq Y$라 하자. 무한집합의 정의에 의하여 $f(X) \neq X$을 만족하는 단사 $f : X \to X$가 존재한다. 함수 $g : Y \to Y$를 다음과 같이 정의하자:

$$g(y) = \begin{cases} f(y), & y \in X \\ y, & y \in Y - X \end{cases}$$

이 함수는 단사이고 $g(Y) \neq Y$이다(check!). 그러므로 무한집합의 정의에 의하여 Y는 무한집합이다.

(b)(모순법) Y가 유한집합이고 $X \subseteq Y$라 하고 X는 무한집합이라 가정하자. 그러면 (a)에 의하여 Y는 무한집합이다. 이것은 Y가 유한집합이라는 가정에 모순이다. 그러므로 X는 유한집합이다. $\square$

정리 2

$g : X \to Y$가 일대일 대응이라 하자. X가 무한집합이면 공역 Y도 무한집합이다.

증명

X는 무한집합이므로, $f(X) \neq X$을 만족하는 단사 $f : X \to X$가 존재한다. 가정에서 $g : X \to Y$는 일대일 대응이므로 $g^{-1} : Y \to X$도 일대일 대응이다[제3장 정리 14(187쪽)].

정리 2

$g : X \to Y$가 일대일 대응이라 하자. X가 무한집합이면 공역 Y도 무한집합이다.

증명

X는 무한집합이므로, $f(X) \neq X$을 만족하는 단사 $f : X \to X$가 존재한다. 가정에서 $g : X \to Y$는 일대일 대응이므로 $g^{-1} : Y \to X$도 일대일 대응이다[제3장 정리 14(187쪽)].

4.1 유한집합과 무한집합

$$
\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, dashed, "h"] \arrow[d, "g^{-1}"'] & Y \\
X \arrow[r, "f"'] & X \arrow[u, "g"']
\end{tikzcd}
$$

(1) 그러면 $h = g \circ f \circ g^{-1} : Y \to Y$는 단사이다(check!).

(2) 그리고

$$
\begin{aligned}
h(Y) = (g \circ f \circ g^{-1})(Y) &= g(f(g^{-1}(Y))) \\
&= g(f(X)) \subset g(X) = Y
\end{aligned}
$$

이다. 그러므로 (1)과 (2)에 의하여 Y는 무한집합이다. $\square$

따름정리

$g : X \to Y$가 일대일 대응이라 하자. X가 유한집합이면, Y도 유한집합이다.

증명

Leave to students. □

따름정리

$g : X \to Y$가 일대일 대응이라 하자. X가 유한집합이면, Y도 유한집합이다.

증명

Leave to students. $\square$

4.1 유한집합과 무한집합

정리 3

X가 무한집합이고 $x_0 \in X$라 하자. 그러면 $X - \{x_0\}$은 무한집합이다.

증명

X가 무한집합이므로, $f(X) \subset X$을 만족하는 단사 $f : X \to X$가 존재한다.

<u>경우 (1) $x_0 \in f(X)$</u>

$\exists! x_1 \in X$ s.t. $f(x_1) = x_0$.

함수 $g : X - \{x_0\} \to X - \{x_0\}$를 아래와 같이 정의한다:

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq x_1 \\ x_2, & x = x_1 \in X - \{x_0\} \end{cases}$$

여기서 x_2는 집합 $X - f(X)$의 고정된 원소이다.

정리 3

X가 무한집합이고 $x_0 \in X$라 하자. 그러면 $X - \{x_0\}$은 무한집합이다.

증명

X가 무한집합이므로, $f(X) \subset X$을 만족하는 단사 $f : X \to X$가 존재한다.

<u>경우 (1) $x_0 \in f(X)$</u>

$\exists! x_1 \in X$ s.t. $f(x_1) = x_0$.

함수 $g : X - \{x_0\} \to X - \{x_0\}$를 아래와 같이 정의한다:

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq x_1 \\ x_2, & x = x_1 \in X - \{x_0\} \end{cases}$$

여기서 x_2는 집합 $X - f(X)$의 고정된 원소이다.

그러면 g는 단아시고(check!)

$$
\begin{aligned}
g(X-\{x_0\}) &= f(X-\{x_0,x_1\})\cup\{x_2\} \\
&= [f(X)-f(\{x_0,x_1\})]\cup\{x_2\} \quad \textit{why?} \\
&\subset (X-\{f(x_0),x_0\})\cup\{x_2\} \\
&\subseteq X-\{x_0\}.
\end{aligned}
$$

따라서 $X-\{x_0\}$는 무한집합이다.

경우 (2) $x_0 \in X - f(X)$

함수 $g : X - \{x_0\} \to X - \{x_0\}$를 다음과 같이 정의한다:

$$g(x) = f(x) \quad \forall x \in X - \{x_0\}.$$

여기서 f는 단사이므로 g도 단사이다. 그리고

$$\begin{aligned} g(X - \{x_0\}) &= f(X - \{x_0\}) \\ &= f(X) - \{f(x_0)\} \\ &\subseteq (X - \{x_0\}) - \{f(x_0)\} \\ &\subset X - \{x_0\} \end{aligned}$$

따라서 $X - \{x_0\}$는 무한집합이다.

그러므로 모든 경우에 대하여 $X - \{x_0\}$는 무한집합이다. □

각 $k \in \mathbb{N}$에 대하여 $\mathbb{N}_k = \{1, 2, \cdots, k\}$라 하자.

예제 2

각 $k \in \mathbb{N}$에 대하여 $\mathbb{N}_k$는 유한집합이다.

풀이

Leave to students(by M.I.). $\square$

각 $k \in \mathbb{N}$에 대하여 $\mathbb{N}_k = \{1, 2, \cdots, k\}$라 하자.

예제 2

각 $k \in \mathbb{N}$에 대하여 $\mathbb{N}_k$는 유한집합이다.

풀이

Leave to students(by M.I.). $\square$

정리 4

X가 유한집합이기 위한 필요충분조건은 다음 두 가지 중 하나만을 만족하는 것이다:

- $X = \phi$
- 어떤 $k \in \mathbb{N}$에 대하여 일대일 대응 $g_k : X \to \mathbb{N}_k$가 존재한다.

증명

(⇐) 경우 (1) $X = \phi$

X는 예제 1에 의하여 유한집합이다.

경우 (2) 어떤 $k \in \mathbb{N}$에 대하여 일대일 대응 $g_k : X \to \mathbb{N}_k$가 존재

$\mathbb{N}_k$는 예제 2에 의하여 유한집합이므로, 정리 2의 따름정리에 의하여 X는 유한집합이다.

(⇒) 주장 : $X \neq \phi$이고 모든 $k \in \mathbb{N}$에 대하여 전단사 $g_k : X \to \mathbb{N}_k$가 존재하지 않으면, X는 무한이다. (check!). □

연습문제 4.1

- 2, 4, 8번 : 스스로 해결
- 5, 6, 7 번 : 각 조별 한 문제씩(연습문제 4.2 포함)

4.2 집합의 대등(equipotence of Sets

정의 2

두 집합 X, Y에 대하여 일대일 대응 $f : X \to Y$가 존재할 때, X와 Y는 대등(equipotent)하다고 말하며, $X \sim Y$로 나타낸다.

- $X \sim Y \quad \Leftrightarrow \quad Y \sim X$
- 기호 $f : X \sim Y$는 $f : X \to Y$가 일대일 대응임을 나타낸다.

4.2 집합의 대등(equipotence of Sets

정리 5

집합족 $\mathcal{P}$ 위의 관계 $\mathcal{R}$을 다음과 같이 정의하자: 임의의 $X, Y \in \mathcal{P}$에 대하여

$$X \sim Y \quad \Leftrightarrow \quad X\mathcal{R}Y$$

그러면 $\mathcal{R}$은 $\mathcal{P}$ 위의 동치관계이다.

증명

항등함수 이용.

일대일 대응 함수들의 역함수와 합성함수들 역시 일대일 대응임을 이용. (check!) □

정리 5

집합족 $\mathcal{P}$ 위의 관계 $\mathcal{R}$을 다음과 같이 정의하자: 임의의 $X, Y \in \mathcal{P}$에 대하여

$$X \sim Y \quad \Leftrightarrow \quad X\mathcal{R}Y$$

그러면 $\mathcal{R}$은 $\mathcal{P}$ 위의 동치관계이다.

증명

항등함수 이용.
일대일 대응 함수들의 역함수와 합성함수들 역시 일대일 대응임을 이용. (check!) □

4.2 집합의 대등(equipotence of Sets

예제 3에서 기호 $(,01)$, $(-1,1)$은 $\mathbb{R}$의 진부분집합인 구간이다.

예제 3

다음이 성립함을 보여라.

(a) $(0,1) \sim (-1,1)$

(b) $(-1,1) \sim \mathbb{R}$, $(0,1) \sim \mathbb{R}$

풀이

(a) 함수 $f : (0,1) \to (-1,1)$를 다음과 같이 정의하자:

$$f(x) = 2x - 1 \quad \forall x \in (0,1).$$

그러면 f는 일대일 대응이다.(check!).

그러므로 $(0,1) \sim (-1,1)$.

4.2 집합의 대등(equipotence of Sets

예제 3에서 기호 $(,01)$, $(-1,1)$은 $\mathbb{R}$의 진부분집합인 구간이다.

예제 3

다음이 성립함을 보여라.

(a) $(0,1) \sim (-1,1)$

(b) $(-1,1) \sim \mathbb{R}$, $(0,1) \sim \mathbb{R}$

풀이

(a) 함수 $f : (0,1) \to (-1,1)$를 다음과 같이 정의하자:

$$f(x) = 2x - 1 \quad \forall x \in (0,1).$$

그러면 f는 일대일 대응이다.(check!).

그러므로 $(0,1) \sim (-1,1)$.

예제 3에서 기호 $(,01)$, $(-1,1)$은 $\mathbb{R}$의 진부분집합인 구간이다.

예제 3

다음이 성립함을 보여라.

(a) $(0,1) \sim (-1,1)$

(b) $(-1,1) \sim \mathbb{R}$, $(0,1) \sim \mathbb{R}$

풀이

(a) 함수 $f:(0,1) \to (-1,1)$를 다음과 같이 정의하자:

$$f(x) = 2x - 1 \quad \forall x \in (0,1).$$

그러면 f는 일대일 대응이다.(check!).

그러므로 $(0,1) \sim (-1,1)$.

예제 3에서 기호 $(,01)$, $(-1,1)$은 $\mathbb{R}$의 진부분집합인 구간이다.

예제 3

다음이 성립함을 보여라.

(a) $(0,1) \sim (-1,1)$

(b) $(-1,1) \sim \mathbb{R}$, $(0,1) \sim \mathbb{R}$

풀이

(a) 함수 $f : (0,1) \to (-1,1)$를 다음과 같이 정의하자:

$$f(x) = 2x - 1 \quad \forall x \in (0,1).$$

그러면 f는 일대일 대응이다.(check!).

그러므로 $(0,1) \sim (-1,1)$.

(b) (1) 함수 $g : (-1, 1) \to \mathbb{R}$를 다음과 같이 정의하자:

$$g(x) = \tan(\tfrac{\pi}{2}x) \quad \forall x \in (-1, 1).$$

그러면 g는 일대일 대응이다(그래프로 확인).

그러므로 $(-1, 1) \sim \mathbb{R}$이다.

(2) 위에서 정의된 함수 $f : (0, 1) \to (-1, 1)$와 $g : (-1, 1) \to \mathbb{R}$는 일대일 대응이므로, 합성 $g \circ f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ 역시 일대일 대응이다.

$$((g \circ f)(x) = \tan(\pi x - \tfrac{\pi}{2}) \quad \forall x \in (0, 1))$$

그러므로 $(0, 1) \sim \mathbb{R}$이다. $\square$

4.2 집합의 대등(equipotence of Sets)

정리 6

임의의 집합 X, Y, Z, W에 대하여

- $X \cap Z = \phi = Y \cap W$
- $f : X \sim Y$, $g : Z \sim W$

이라 하자. 그러면

$$f \cup g : (X \cup Z) \sim (Y \cup W).$$

증명

$X \cap Z = \phi$이므로, 제3장 정리 8(167쪽)에 의해

$f \cup g : X \cup Z \to Y \cup W$는 함수이다.

주장 : $f \cup g$는 일대일 대응이다(check!). $\square$

정리 6

임의의 집합 X, Y, Z, W에 대하여

- $X \cap Z = \phi = Y \cap W$
- $f : X \sim Y$, $g : Z \sim W$

이라 하자. 그러면

$$f \cup g : (X \cup Z) \sim (Y \cup W).$$

증명

$X \cap Z = \phi$이므로, 제3장 정리 8(167쪽)에 의해

$f \cup g : X \cup Z \to Y \cup W$는 함수이다.

<u>주장 : $f \cup g$는 일대일 대응이다(check!).</u> $\square$

정리 7

집합 X, Y, Z, W에 대하여 $X \sim Y$, $Z \sim W$이라 하자. 그러면

$$X \times Z \sim Y \times W.$$

증명

$f : X \sim Y$이고 $g : Z \sim W$라 놓고, 함수

$f \times g : X \times Z \to Y \times W$를 다음과 같이 정의하자:

$$(f \times g)(x, z) = (f(x), g(z)) \quad \forall (x, z) \in X \times Z.$$

그러면 $f \times g$는 일대일 대응이다(check!). $\square$

정리 7

집합 X, Y, Z, W에 대하여 $X \sim Y$, $Z \sim W$이라 하자. 그러면

$$X \times Z \sim Y \times W.$$

증명

$f : X \sim Y$이고 $g : Z \sim W$라 놓고, 함수

$f \times g : X \times Z \to Y \times W$를 다음과 같이 정의하자:

$$(f \times g)(x, z) = (f(x), g(z)) \quad \forall (x, z) \in X \times Z.$$

그러면 $f \times g$는 일대일 대응이다(check!). $\square$

- What is the smallest infinite set?
-

정의 3

4.2 집합의 대등(equipotence of Sets

- What is the “smallest” infinite set?
- Ans : $\mathbb{N}$ or any set which is equipotent to $\mathbb{N}$

정의 3

집합 X에 대하여

- $X \sim \mathbb{N}$일 때, X를 가부번집합(denumberable set)이라 한다.
- X가 유한집합이거나 가부번집합일 때, X를 가산 집합(countable set)이라 한다.

X가 가부번 즉, $f : \mathbb{N} \sim X$인 f가 존재할 때,

$$f(1) = x_1,\ f(2) = x_2,\ \cdots,\ f(k) = x_k,\ \cdots$$

라 놓으면 $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_k, \cdots\}$로 나타낼 수 있다.

정리 8

가부번집합의 모든 무한 부분집합은 가부번(집합)이다.

증명

Y가 가부번집합 $X = \{x_1, x_2, x_3, \cdots\}$의 무한 부분집합이라 하자.

Y의 원소 중 그 첨자가 가장 작은 것을 n_1, 즉,

$$x_{n_1} \in Y$$

이라 놓는다.

집합 $Y - \{x_{n_1}\}$의 원소 중 첨자가 가장 작은 것을 n_2, 즉,

$$x_{n_2} \in Y - \{x_{n_1}\}$$

이라 놓는다.

정리 8

가부번집합의 모든 무한 부분집합은 가부번(집합)이다.

증명

Y가 가부번집합 $X = \{x_1, x_2, x_3, \cdots\}$의 무한 부분집합이라 하자.

Y의 원소 중 그 첨자가 가장 작은 것을 n_1, 즉,

$$x_{n_1} \in Y$$

이라 놓는다.

집합 $Y - \{x_{n_1}\}$의 원소 중 첨자가 가장 작은 것을 n_2, 즉,

$$x_{n_2} \in Y - \{x_{n_1}\}$$

이라 놓는다.

이와 같이 $x_{n_{k-1}} \in Y$를 선택한 뒤 원소

$$x_{n_k} \in Y - \{x_{n_1}, x_{n_2}, \cdots, x_{n_{k-1}}\}$$

를 그 첨자 n_k가 가장 작은 경우의 것으로 택한다.
여기서 Y는 무한집합이므로 각 $k \in \mathbb{N}$에 대한 $x_{n_k} \in Y$는 항상 존재한다.
그러므로 각 $k \in \mathbb{N}$에 대하여 $Y - \{x_{n_1}, x_{n_2}, \cdots, x_{n_{k-1}}\} \neq \phi$.
함수 $f : \mathbb{N} \to Y$를 다음과 같이 정의하자:

$$f(k) = x_{n_k} \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

그러면 f는 일대일 대응이다(check!).
그러므로 Y는 가부번집합이다. □

4.2 집합의 대등(equipotence of Sets

따름정리

가산집합의 모든 부분집합은 가산(집합)이다.

연습문제 4.2

6, 7, 8, 9 번 : 각 조별 한 문제씩(연습문제 4.1 포함)