4장 가부번집합과 비가부번집합

김준희

교재

- 집합론/You-Feng Lin, Shwu-Yeng T. Lin 지음/이흥천 옮김/경문사

4.3 가부번집합의 성질

- $\mathbb{N}_e = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$, $\mathbb{N}_o = \{2n-1 \mid n \in \mathbb{N}\}$
- $\mathbb{N}_e$와 $\mathbb{N}_o$는 가부번이다.
- $\mathbb{N}_e \cup \mathbb{N}_o = \mathbb{N}$ 역시 가부번이다.

4.3 가부번집합의 성질

정리 9

두 가부번 집합 A, B의 합집합 $A \cup B$는 가부번(집합)이다.

증명

<u>경우 (1) $A \cap B = \phi$</u>

$A \sim \mathbb{N}$이고 $\mathbb{N} \sim \mathbb{N}_o$이므로, $A \sim \mathbb{N}_o$이다. 마찬가지로 $B \sim \mathbb{N}_e$이다. 따라서 정리 6(219쪽)에 의하여 $(A \cup B) \sim (\mathbb{N}_e \cup \mathbb{N}_o)$이다. 그러므로 $A \cup B \sim \mathbb{N}$이다.

4.3 가부번집합의 성질

정리 9

두 가부번 집합 A, B의 합집합 $A \cup B$는 가부번(집합)이다.

증명

경우 (1) $A \cap B = \phi$

$A \sim \mathbb{N}$이고 $\mathbb{N} \sim \mathbb{N}_o$이므로, $A \sim \mathbb{N}_o$이다. 마찬가지로 $B \sim \mathbb{N}_e$이다. 따라서 정리 6(219쪽)에 의하여 $(A \cup B) \sim (\mathbb{N}_e \cup \mathbb{N}_o)$이다. 그러므로 $A \cup B \sim \mathbb{N}$이다.

4.3 가부번집합의 성질

경우 (2) $A \cap B \neq \phi$

$C = B - A$라 하면 $A \cup C = A \cup B$이고 $A \cap C = \phi$이다. 여기서 집합 $C \subseteq B$는 유한집합이거나 가부번집합이다(정리 8의 따름정리).

C가 유한집합이면, $A \cup C$는 가부번집합이다(연습문제 4.2 문제 7번(223쪽))

C가 가부번집합이면, (1)에 의하여 $A \cup C$는 가부번집합이다.

경우 (1), (2)에 의하여 $A \cup B$는 가부번이다. □

4.3 가부번집합의 성질

따름정리

$A_1, A_2, \cdots, A_n$이 가부번집합이면, $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{n} A_k$도 가부번집합이다.

증명

Leave it to students. □

4.3 가부번집합의 성질

따름정리

$A_1, A_2, \cdots, A_n$이 가부번집합이면, $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{n} A_k$도 가부번집합이다.

증명

Leave it to students. $\square$

예제 4

정수의 집합 $\mathbb{Z}$는 가부번집합이다. (check!)

4.3 가부번집합의 성질

정리 10

집합 $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$은 가부번집합이다.

증명

다음과 같이 정의된 함수 $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$을 생각하자:

$$f(j,k) = 2^j 3^k \quad \forall (j,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}.$$

f는 단사이므로(check!),

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim f(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \subseteq \mathbb{N}$$

이다. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$이 무한집합이므로 $f(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$도 무한집합이다. 가부번집합의 무한부분집합은 가부번집합이므로(정리 8) $f(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$은 가부번이다. 그러므로 $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$은 가부번이다. □

정리 10

집합 $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$은 가부번집합이다.

증명

다음과 같이 정의된 함수 $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$을 생각하자:

$$f(j, k) = 2^j 3^k \quad \forall (j, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}.$$

f는 단사이므로(check!),

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim f(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \subseteq \mathbb{N}$$

이다. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$이 무한집합이므로 $f(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$도 무한집합이다. 가부번집합의 무한부분집합은 가부번집합이므로(정리 8) $f(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$은 가부번이다. 그러므로 $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$은 가부번이다. □

4.3 가부번집합의 성질

따름정리

각 $k \in \mathbb{N}$에 대하여 A_k가 가부번집합이고 모든 $j, k \in \mathbb{N}$에 대하여 $A_j \cap A_k = \phi (j \neq k)$이라 하자. 그러면 $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$는 가부번집합이다.

증명

각 $k \in \mathbb{N}$에 대하여 다음과 같이 정의된 함수 $f_k : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \{k\}$를 생각하자:

$$f_k(i) = (i, k) \quad \forall i \in \mathbb{N}$$

그러면 각각의 f_k는 일대일 대응이다(check!). 즉 $\mathbb{N} \sim \mathbb{N} \times \{k\}$이다.

4.3 가부번집합의 성질

따름정리

각 $k \in \mathbb{N}$에 대하여 A_k가 가부번집합이고 모든 $j, k \in \mathbb{N}$에 대하여 $A_j \cap A_k = \phi(j \neq k)$이라 하자. 그러면 $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$는 가부번집합이다.

증명

각 $k \in \mathbb{N}$에 대하여 다음과 같이 정의된 함수 $f_k : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \{k\}$를 생각하자:

$$f_k(i) = (i, k) \quad \forall i \in \mathbb{N}$$

그러면 각각의 f_k는 일대일 대응이다(check!). 즉 $\mathbb{N} \sim \mathbb{N} \times \{k\}$이다.

각 $k \in \mathbb{N}$에 대하여 $A_k \sim \mathbb{N}$이고 $\mathbb{N} \sim \mathbb{N} \times \{k\}$이므로

$$A_k \sim \mathbb{N} \times \{k\}$$

이다. 그런데

$$\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{N} \times \{k\} = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

이므로, $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \sim \mathbb{N} \times \mathbb{N}$이다(연습문제 4.2 문제 5).

그러므로 $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$는 가부번집합이다. $\square$

예제 5

유리수의 집합 $\mathbb{Q}$는 가부번집합이다.

증명

각 유리수를 $\frac{p}{q}$와 같이 유일하게 나타내자. 여기서 $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$이고 $\gcd(p, q) = 1$이다. 이제

$$\mathbb{Q}_+ = \{\tfrac{p}{q} \mid \tfrac{p}{q} > 0\},\ \mathbb{Q}_- = \{-\tfrac{p}{q} \mid \tfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}_+\}$$

이라 놓자. 그러면 $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_+ \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}_-$이고 $\mathbb{Q}_+ \sim \mathbb{Q}_-$이다.

예제 5

유리수의 집합 $\mathbb{Q}$는 가부번집합이다.

증명

각 유리수를 $\frac{p}{q}$와 같이 유일하게 나타내자. 여기서 $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$이고 $\gcd(p, q) = 1$이다. 이제

$$\mathbb{Q}_+ = \{\tfrac{p}{q} \mid \tfrac{p}{q} > 0\},\ \mathbb{Q}_- = \{-\tfrac{p}{q} \mid \tfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}_+\}$$

이라 놓자. 그러면 $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_+ \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}_-$이고 $\mathbb{Q}_+ \sim \mathbb{Q}_-$이다.

주장 : $\mathbb{Q}_+$는 가부번이다.

함수 $f : \mathbb{Q}_+ \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$을 다음과 같이 정의하자:

$$f\left(\tfrac{p}{q}\right) = (p, q) \quad \forall \tfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}_+$$

그러면 f는 단사이다(check!). 따라서

$\mathbb{Q}_+ \sim f(\mathbb{Q}_+) \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$이다. 또한 $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}_+$이므로, $\mathbb{Q}_+$는

무한집합이다.

$f(\mathbb{Q}_+)$는 가부번집합 $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$의 무한부분집합이므로

가부번집합이다. 따라서 $\mathbb{Q}_+$는 가부번이다.

그러므로 $\mathbb{Q}$는 가부번집합이다. (why?) $\square$

4.3 가부번집합의 성질

다음 정리는 무한집합 중 가부번집합이 "크기"에 있어서 가장 작다는 것을 지적하고 있다.

정리 11

모든 무한집합은 가부번집합을 포함한다.

증명

Leave it to students. □

4.3 가부번집합의 성질

다음 정리는 무한집합 중 가부번집합이 "크기"에 있어서 가장 작다는 것을 지적하고 있다.

정리 11

모든 무한집합은 가부번집합을 포함한다.

증명

Leave it to students. □

연습문제 4.3

1, 2, 4, 6, 7번 : 각자 해결.

4.4 비가부번집합

정리 12

개구간 $(0,1)$은 비가부번집합이다.

증명

각 $0 < x < 1$에 대하여 소수표현 $0.x_1x_2x_3\cdots$와 같이 나타내자. 여기서 각 $n \in \mathbb{N}$에 대하여 $x_n \in \{0,1,2,\cdots,9\}$이다. 예를 들면,

$$\frac{1}{3} = 0.333\cdots, \quad \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.707106\cdots.$$

유한소수의 경우도 유일하게 표현하기 위해 위와 같이 무한소수로 나타내자. 이를테면 $\frac{1}{4} = 0.25$ 대신에 $\frac{1}{4} = 0.24999\cdots$로 나타내자. 그러면 $x, y \in (0,1)$에 대하여

$$x = y \text{ if and only if } x_i = y_i \ \forall i \in \mathbb{N}$$

4.4 비가부번집합

정리 12

개구간 $(0, 1)$은 비가부번집합이다.

증명

각 $0 < x < 1$에 대하여 소수표현 $0.x_1x_2x_3\cdots$와 같이 나타내자. 여기서 각 $n \in \mathbb{N}$에 대하여 $x_n \in \{0, 1, 2, \cdots, 9\}$이다. 예를 들면,

$$\frac{1}{3} = 0.333\cdots, \ \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.707106\cdots.$$

유한소수의 경우도 유일하게 표현하기 위해 위와 같이 무한소수로 나타내자. 이를테면 $\frac{1}{4} = 0.25$ 대신에 $\frac{1}{4} = 0.24999\cdots$로 나타내자. 그러면 $x, y \in (0, 1)$에 대하여

$$x = y \text{ if and only if } x_i = y_i \ \forall i \in \mathbb{N}$$

4.4 비가부번집합

개구간 $(0,1)$이 가부번이라 가정하자. 그러면 일대일 대응 $f:\mathbb{N}\sim(0,1)$가 존재하여 $(0,1)$의 모든 원소를 다음과 같이 나열할 수 있다:

$$
\begin{array}{l}
f(1)=0.a_{11}a_{12}a_{13}\cdots \\
f(2)=0.a_{21}a_{22}a_{23}\cdots \\
f(3)=0.a_{31}a_{32}a_{33}\cdots \\
\qquad\quad \vdots \\
f(k)=0.a_{k1}a_{k2}a_{k3}\cdots \\
\qquad\quad \vdots
\end{array}
$$

여기서 각 a_{jk}에 대하여 $a_{jk}\in\{0,1,2,\cdots,9\}$이다.

이제 $z = 0.z_1z_2z_3\cdots$를 다음과 같이 정의하자:

$$z_k = \begin{cases} 5, & a_{kk} \neq 5 \\ 1, & a_{kk} = 5 \end{cases}$$

그러면 $0 < z < 1$이고 모든 $k \in \mathbb{N}$에 대하여 $z_k \neq a_{kk}$이다. 즉 $z \neq f(k)$이다. 따라서 $z \notin f(\mathbb{N}) = (0,1)$이고 $z \in (0,1)$이다. 이것은 모순이므로 $(0,1)$은 비가부번이다. $\square$

4.4 비가부번집합

따름정리

실수의 집합 $\mathbb{R}$은 비가부번집합이다.

증명

$\mathbb{R}$이 가부번이라 가정하자. 그러면 $\mathbb{R} \sim \mathbb{N}$이다. $\mathbb{R} \sim (0,1)$이기 때문에, $(0,1) \sim \mathbb{N}$이다. 이것은 $(0,1)$이 비가부번이라는 사실에 모순이다. 그러므로 $\mathbb{R}$은 비가부번이다. □

따름정리

실수의 집합 $\mathbb{R}$은 비가부번집합이다.

증명

$\mathbb{R}$이 가부번이라 가정하자. 그러면 $\mathbb{R} \sim \mathbb{N}$이다. $\mathbb{R} \sim (0,1)$이기 때문에, $(0,1) \sim \mathbb{N}$이다. 이것은 $(0,1)$이 비가부번이라는 사실에 모순이다. 그러므로 $\mathbb{R}$은 비가부번이다. $\square$

예제 6

무리수들의 집합 $\mathbb{P}$는 비가부번집합이다.

증명

$\mathbb{P}$가 가부번이라 가정하자. 그러면 $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{P}$이고 $\mathbb{Q}$는 가부번이기 때문에, $\mathbb{R}$은 가부번이다. 이것은 $\mathbb{R}$이 비가부번이라는 사실에 모순이다. 그러므로 $\mathbb{P}$는 비가부번이다. □

4.4 비가부번집합

예제 6

무리수들의 집합 $\mathbb{P}$는 비가부번집합이다.

증명

$\mathbb{P}$가 가부번이라 가정하자. 그러면 $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{P}$이고 $\mathbb{Q}$는 가부번이기 때문에, $\mathbb{R}$은 가부번이다. 이것은 $\mathbb{R}$이 비가부번이라는 사실에 모순이다. 그러므로 $\mathbb{P}$는 비가부번이다. $\square$

연습문제 4.4

1, 2, 4번 : 스스로 해결.