5장 기수와 기수의 셈

김준희

교재

- 집합론/You-Feng Lin, Shwu-Yeng T. Lin 지음/이흥천 옮김/경문사

5.1 기수(Cardinal Number)의 개념

- $2 + 3 = 5$, $3 < 4$, $6 \times 7 = 42$
  와 같이 수의 개념은 어렴풋이 알고 있다.
- 그렇다면 수의 정확한 정의는 무엇인가?

5.1 기수(Cardinal Number)의 개념

- $2 + 3 = 5$, $3 < 4$, $6 \times 7 = 42$
  와 같이 수의 개념은 어렴풋이 알고 있다.
- 그렇다면 수의 정확한 정의는 무엇인가?

기수의 공리(집합의 "크기"와 관련된 개념과 규칙)

C-1 임의의 집합 A에 대하여 $\mathrm{card}A$로 표기되는 하나의 기수가 결부되고, 각 기수 a에 대하여 $\mathrm{card}A = a$인 하나의 집합 A가 존재한다.

C-2 $A = \phi \Leftrightarrow \mathrm{card}A = 0$.

C-3 A가 공집합이 아닌 유한집합이면, 즉, 어떤 $k \in \mathbb{N}$에 대하여

$$A \sim \{1, 2, 3, \cdots, k\}\text{이면, } \mathrm{card}A = k.$$

C-4 임의의 집합 A, B에 대하여

$$A \sim B \Leftrightarrow \mathrm{card}A = \mathrm{card}B.$$

5.1 기수(Cardinal Number)의 개념

기수의 공리(집합의 "크기"와 관련된 개념과 규칙)

C-1 임의의 집합 A에 대하여 $\mathrm{card}A$로 표기되는 하나의 기수가 결부되고, 각 기수 a에 대하여 $\mathrm{card}A = a$인 하나의 집합 A가 존재한다.

C-2 $A = \phi \Leftrightarrow \mathrm{card}A = 0$.

C-3 A가 공집합이 아닌 유한집합이면, 즉, 어떤 $k \in \mathbb{N}$에 대하여

$$A \sim \{1, 2, 3, \cdots, k\}\text{이면, } \mathrm{card}A = k.$$

C-4 임의의 집합 A, B에 대하여

$$A \sim B \Leftrightarrow \mathrm{card}A = \mathrm{card}B.$$

5.1 기수(Cardinal Number)의 개념

기수의 공리(집합의 "크기"와 관련된 개념과 규칙)

C-1 임의의 집합 A에 대하여 $\mathrm{card}A$로 표기되는 하나의 기수가 결부되고, 각 기수 a에 대하여 $\mathrm{card}A = a$인 하나의 집합 A가 존재한다.

C-2 $A = \phi \Leftrightarrow \mathrm{card}A = 0$.

C-3 A가 공집합이 아닌 유한집합이면, 즉, 어떤 $k \in \mathbb{N}$에 대하여

$$A \sim \{1, 2, 3, \cdots, k\}\text{이면, } \mathrm{card}A = k.$$

C-4 임의의 집합 A, B에 대하여

$$A \sim B \Leftrightarrow \mathrm{card}A = \mathrm{card}B.$$

5.1 기수(Cardinal Number)의 개념

기수의 공리(집합의 “크기”와 관련된 개념과 규칙)

C-1 임의의 집합 A에 대하여 $\mathrm{card}A$로 표기되는 하나의 기수가 결부되고, 각 기수 a에 대하여 $\mathrm{card}A = a$인 하나의 집합 A가 존재한다.

C-2 $A = \phi \Leftrightarrow \mathrm{card}A = 0$.

C-3 A가 공집합이 아닌 유한집합이면, 즉, 어떤 $k \in \mathbb{N}$에 대하여

$$A \sim \{1, 2, 3, \cdots, k\}\text{이면, } \mathrm{card}A = k.$$

C-4 임의의 집합 A, B에 대하여

$$A \sim B \Leftrightarrow \mathrm{card}A = \mathrm{card}B.$$

5.1 기수(Cardinal Number)의 개념

기수의 공리(집합의 "크기"와 관련된 개념과 규칙)

C-1 임의의 집합 A에 대하여 $\mathrm{card}A$로 표기되는 하나의 기수가 결부되고, 각 기수 a에 대하여 $\mathrm{card}A = a$인 하나의 집합 A가 존재한다.

C-2 $A = \phi \Leftrightarrow \mathrm{card}A = 0$.

C-3 A가 공집합이 아닌 유한집합이면, 즉, 어떤 $k \in \mathbb{N}$에 대하여

$$A \sim \{1, 2, 3, \cdots, k\}\text{이면, } \mathrm{card}A = k.$$

C-4 임의의 집합 A, B에 대하여

$$A \sim B \Leftrightarrow \mathrm{card}A = \mathrm{card}B.$$

정의

- 유한집합의 기수를 유한기수(finite cardinal number)라 하고
- 무한집합의 기수를 초한기수(transfinite cardinal number)라 한다.

- 유한기수는 자연수로부터 이어받은 순서

$$0 < 1 < 2 < \cdots < k < k+1 < \cdots$$

을 따른다.

정의 1(in English)

Let A and B be sets. Then $\mathrm{card}A$ is less than $\mathrm{card}B$, denoted by $\mathrm{card}A < \mathrm{card}B$, if

(1) A is equipotent to a subset of B, but

(2) B is not equipotent to any subset of A.

- (1)번 조건만을 생각할 경우 $\mathrm{card}A \leq \mathrm{card}B$라고 나타낸다.

5.2 기수의 순서 - Cantor Bernstein Theorem

정의 1(in English)

Let A and B be sets. Then $\mathrm{card}A$ is less than $\mathrm{card}B$, denoted by $\mathrm{card}A < \mathrm{card}B$, if

(1) A is equipotent to a subset of B, but

(2) B is not equipotent to any subset of A.

- (1)번 조건만을 생각할 경우 $\mathrm{card}A \leq \mathrm{card}B$라고 나타낸다.

5.2 기수의 순서 - Cantor Bernstein Theorem

예제 1

$\text{card}\mathbb{N} < \text{card}\mathbb{R}$임을 밝혀라.

증명

(1) $\mathbb{N}$은 $\mathbb{R}$의 부분집합인 $\mathbb{N}$과 대등하다. 즉, $\mathbb{N} \sim \mathbb{N}$.

(2) $\mathbb{R}$은 비가부번집합이므로 $\mathbb{R}$은 가부번집합인 $\mathbb{N}$의 어느 부분집합과도 대등하지 않다.

그러므로 정의 1에 의하여 $\text{card}\mathbb{N} < \text{card}\mathbb{R}$이다. □

예제 1

card$\mathbb{N}$ $<$ card$\mathbb{R}$임을 밝혀라.

증명

(1) $\mathbb{N}$은 $\mathbb{R}$의 부분집합인 $\mathbb{N}$과 대등하다. 즉, $\mathbb{N} \sim \mathbb{N}$.

(2) $\mathbb{R}$은 비가부번집합이므로 $\mathbb{R}$은 가부번집합인 $\mathbb{N}$의 어느 부분집합과도 대등하지 않다.

그러므로 정의 1에 의하여 card$\mathbb{N}$ $<$ card$\mathbb{R}$이다. $\square$

정리 1(Cantor Bernstein Theorem)

집합 A, B에 대하여

(1) A가 B의 부분집합과 대등하고

(2) B가 A의 부분집합과 대등하면

$A \sim B$이다.

정리 1은 다음 보조정리에 의하여 쉽게 유도된다.

보조정리

$B \subseteq A$이고 $f : A \to B$가 단사이면, 전단사 $h : A \sim B$가 존재한다.

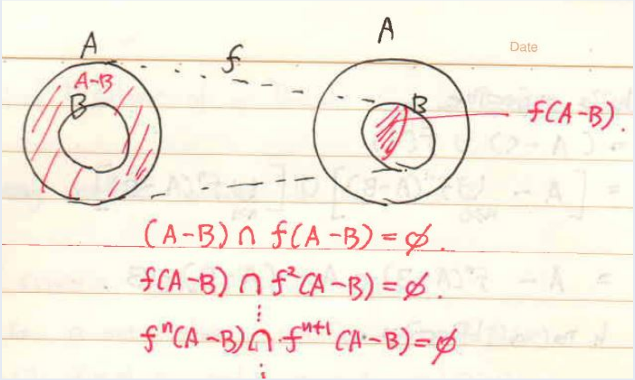
증명

<u>경우 (1) $B = A$</u> h로서 항등함수 I_A를 택하면 된다.

<u>경우 (2) $B \subset A$</u> $C = \bigcup_{n \geq 0} f^n(A - B)$라 놓자. 여기서 f^0는 A 위의 항등함수이고 각 $k \in \mathbb{N}$와 각 $x \in A$에 대하여 $f^k(x) = f(f^{k-1}(x))$로 정의한다. 그러면

$$\begin{aligned} f(C) &= f\left(\cup_{n \geq 0} f^n(A - B)\right) \\ &= f\left((A - B) \cup f(A - B) \cup f^2(A - B) \cup \cdots\right) \\ &= f(A - B) \cup f^2(A - B) \cup f^3(A - B) \cup \cdots \\ &= \cup_{n \geq 1} f^n(A - B) \subseteq C. \end{aligned}$$

5.2 기수의 순서 - Cantor Bernstein Theorem



5.2 기수의 순서 - Cantor Bernstein Theorem

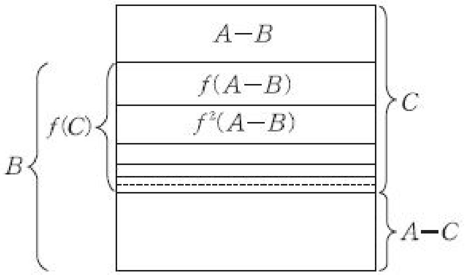


그림 17

이제 함수 $h : A \to B$를 다음과 같이 정의하자:

$$h(z) = \begin{cases} f(z), & z \in C \\ z, & z \in A - C \end{cases}$$

이 경우 $A - B \subseteq C$이고 $f(C) \subseteq C$이다. 그리고
$m \neq n$ (say $m < n$)이면 $f^m(A - B) \cap f^n(A - B) = \phi$이다.
($\because$ 그렇지 않으면 $f^m(x) = f^n(x')$인 $x, x' \in A - B$가 존재하고,
이 때, $f^{n-m}(x') = x \in B \cap (A - B)$가 되어 모순이다.)

주장 1 : $h : A \to B$는 단사이다.(check!)

힌트 : 3가지 경우로 나누어 생각.

주장 2 : $h : A \to B$는 전사이다.

$$
\begin{aligned}
h(A) &= (A - C) \cup f(C) \\
&= [A - \cup_{n \geq 0} f^n(A - B)] \cup [\cup_{n \geq 1} f^n(A - B)] \\
&= A - f^0(A - B) = A - (A - B) = B
\end{aligned}
$$

그러므로 주장 1,2에 의하여 h는 전단사이다. □

정리 1의 증명

$A_0 \subseteq A$, $B_0 \subseteq B$이고 $A \sim B_0$, $B \sim A_0$이라 가정하고, 두 전단사 $f_0 : A \sim B_0$와 $g_0 : B \sim A_0$를 생각하자.
이제 $f : A \to A_0$를 $f(x) = g_0(f_0(x))$와 같이 정의하자. 그러면 $f : A \to A_0$는 단사이다(why?). 따라서 앞 보조정리에 의하여 전단사 $h : A \sim A_0$가 존재한다. 그러므로 $g_0^{-1} \circ h : A \to B$는 전단사이다. $\square$

따름정리

임의의 집합 A, B에 대하여

$\mathrm{card}A \leq \mathrm{card}B$이고 $\mathrm{card}B \leq \mathrm{card}A$이면 $\mathrm{card}A = \mathrm{card}B$.

연습문제 5.2

3번 : 각자 해결.