5장 기수와 기수의 셈

김준희

교재

- 집합론/You-Feng Lin, Shwu-Yeng T. Lin 지음/이흥천 옮김/경문사

정리 2(Cantor Theorem)

임의의 집합 X에 대하여

$$\mathrm{card}X < \mathrm{card}\mathcal{P}(X).$$

증명

경우 (1) : $X = \phi$

$$\mathrm{card}\phi = 0 < 1 = \mathrm{card}\mathcal{P}(\phi).$$

정리 2(Cantor Theorem)

임의의 집합 X에 대하여

$$\mathrm{card} X < \mathrm{card} \mathcal{P}(X).$$

증명

<u>경우 (1) : $X = \phi$</u>

$$\mathrm{card} \phi = 0 < 1 = \mathrm{card} \mathcal{P}(\phi).$$

5.3 멱집합의 기수-Cantor Theorem

경우 (2) : $X \neq \phi$

함수 $g : X \to \mathcal{P}(X)$를 다음과 같이 정의하자:

$$g(x) = \{x\} \quad \forall x \in X$$

g는 단사이므로, $X \sim \{\{x\} \mid x \in X\} \subseteq \mathcal{P}(X)$. 따라서

$$\mathrm{card} X \leq \mathrm{card} \mathcal{P}(X)$$

이다. 이제 $\mathrm{card} X \neq \mathrm{card} \mathcal{P}(X)$, 즉, $X \nsim \mathcal{P}(X)$임을 보이자.

$X \sim \mathcal{P}(X)$, 즉, 전단사 $f : X \to \mathcal{P}(X)$가 존재한다고 가정하고,

집합 $S = \{x \in X \mid x \notin f(x)\}$을 생각하자.

$S \in \mathcal{P}(X)$이고 f는 전사이기 때문에,

$$f(e) = S$$

을 만족하는 $e \in X$가 존재한다.

<u>경우 (2-1) $e \in S$</u>

$e \in f(e)$이기 때문에, S의 정의에 의하여 $e \notin S$이고, 이것은 불가능하다.

<u>경우 (2-2) $e \notin S$</u>

$e \notin f(e)$이기 때문에, S의 정의에 의하여 $e \in S$이고, 이것은 불가능하다.

따라서, $\mathrm{card} X \neq \mathrm{card} \mathcal{P}(X)$이다. 그러므로

$$\mathrm{card} X < \mathrm{card} \mathcal{P}(X)$$

이다. □

연습문제 5.3

2, 3 번 : 각자 해결.

5.4 기수의 덧셈

k와 l이 유한기수 즉, $k, l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$인 경우 $k + l$과 kl은 어떤 의미를 가지고 있을까?

정의 2

서로 소인 두 집합 A, B의 기수를 각각 a, b라 할 때, $\mathrm{card}(A \cup B)$를 a, b의 기수의 합이라 하고 $a + b$로 나타낸다.

정의2는 잘 정의되어 있다.

a와 b가 기수라 하자. (C-1)에 의해, $\mathrm{card}X = a$, $\mathrm{card}\,Y = b$을 만족하는 집합 X와 Y가 존재한다. 만약 $X \cap Y \neq \phi$이면, $A = X \times \{0\}$, $B = Y \times \{1\}$이라 놓자. 그러면 $A \cap B = \phi$, $A \sim X$, $B \sim Y$이므로, $\mathrm{card}A = a$, $\mathrm{card}B = b$이다. 그러므로 $a + b = \mathrm{card}(A \cup B)$.

또한, $a + b$는 유일하다. 왜냐하면, $\mathrm{card}A_1 = a$, $\mathrm{card}B_1 = b$인 서로 소인 두 집합 A_1, B_1이 존재한다면, $A_1 \sim A$, $B_1 \sim B$이다. 그러면 4장의 정리 6에 의하여 $A_1 \cup B_1 \sim A \cup B$.

그러므로 $\mathrm{card}(A_1 \cup B_1) = \mathrm{card}(A \cup B)$.

위의 내용은 정리 3의 증명임.

정리 3

a, b가 기수라 하자. 그러면

(a) 다음을 만족하는 서로 소인 두 집합 A, B가 존재한다:

$$\mathrm{card} A = a, \qquad \mathrm{card} B = b.$$

(b) $\mathrm{card} A = \mathrm{card} A_1$, $\mathrm{card} B = \mathrm{card} B_1$, $A \cap B = \phi$, $A_1 \cap B_1 = \phi$이면,

$$\mathrm{card} A \cup B) = \mathrm{card}(A_1 \cup B_1).$$

위의 내용은 정리 3의 증명임.

정리 3

a, b가 기수라 하자. 그러면

(a) 다음을 만족하는 서로 소인 두 집합 A, B가 존재한다:

$$\mathrm{card} A = a, \qquad \mathrm{card} B = b.$$

(b) $\mathrm{card} A = \mathrm{card} A_1$, $\mathrm{card} B = \mathrm{card} B_1$, $A \cap B = \phi$, $A_1 \cap B_1 = \phi$이면,

$$\mathrm{card} A \cup B) = \mathrm{card}(A_1 \cup B_1).$$

위의 내용은 정리 3의 증명임.

정리 3

a, b가 기수라 하자. 그러면

(a) 다음을 만족하는 서로 소인 두 집합 A, B가 존재한다:

$$\mathrm{card}A = a, \qquad \mathrm{card}B = b.$$

(b) $\mathrm{card}A = \mathrm{card}A_1$, $\mathrm{card}B = \mathrm{card}B_1$,

$A \cap B = \phi$, $A_1 \cap B_1 = \phi$이면,

$$\mathrm{card}A \cup B) = \mathrm{card}(A_1 \cup B_1).$$

예제 2

두 유한기수 4, 3의 기수의 합 $4+3$을 구하여라.

풀이

$A = \mathbb{N}_4$, $B = \{5, 6, 7\}$이라 하자. 그러면

$$\mathrm{card}A = 4,\ \mathrm{card}B = 3,\ A \cap B = \phi$$

이다. 그러므로

$$4 + 3 = \mathrm{card}(A \cup B) = \mathrm{card}\mathbb{N}_7 = 7.$$

$\square$

예제 2

두 유한기수 4, 3의 기수의 합 $4+3$을 구하여라.

풀이

$A=\mathbb{N}_4$, $B=\{5,6,7\}$이라 하자. 그러면

$$\mathrm{card}A=4,\ \mathrm{card}B=3,\ A\cap B=\phi$$

이다. 그러므로

$$4+3=\mathrm{card}(A\cup B)=\mathrm{card}\mathbb{N}_7=7.$$

□

정리 4

x, y, z가 임의의 기수라 하자. 그러면

(a) 교환법칙 $x + y = y + x$

(b) 결합법칙 $(x + y) + z = x + (y + z)$

증명

집합의 연산 $\cup$은 교환법칙과 결합법칙이 성립하므로 쉽게 증명할 수 있다. (증명 생략) $\square$

정리 4

x, y, z가 임의의 기수라 하자. 그러면

(a) 교환법칙 $x + y = y + x$

(b) 결합법칙 $(x + y) + z = x + (y + z)$

증명

집합의 연산 $\cup$은 교환법칙과 결합법칙이 성립하므로 쉽게 증명할 수 있다. (증명 생략) $\square$

5.4 기수의 덧셈

정리 4

x, y, z가 임의의 기수라 하자. 그러면

(a) 교환법칙 $x + y = y + x$

(b) 결합법칙 $(x + y) + z = x + (y + z)$

증명

집합의 연산 $\cup$은 교환법칙과 결합법칙이 성립하므로 쉽게 증명할 수 있다. (증명 생략) $\square$

5.4 기수의 덧셈

정리 4

x, y, z가 임의의 기수라 하자. 그러면

(a) 교환법칙 $x + y = y + x$

(b) 결합법칙 $(x + y) + z = x + (y + z)$

증명

집합의 연산 $\cup$은 교환법칙과 결합법칙이 성립하므로 쉽게 증명할 수 있다. (증명 생략) $\square$

- $\mathrm{card}\mathbb{N} = \aleph_0$ (알레프 제로)
- $\mathrm{card}\mathbb{R} = \mathfrak{c}$

예제 3

기수의 합 $\aleph_0 + \aleph_0$을 구하여라.

풀이

$\mathbb{N}_e = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$, $\mathbb{N}_o = \{2n-1 \mid n \in \mathbb{N}\}$라 하자.
그러면 $\mathbb{N}_e \cap \mathbb{N}_o = \phi$이고 $\mathbb{N}_e \cup \mathbb{N}_o = \mathbb{N}$이다. 그러므로
$\aleph_0 + \aleph_0 = \mathrm{card}\mathbb{N}_e + \mathrm{card}\mathbb{N}_o = \mathrm{card}(\mathbb{N}_e \cup \mathbb{N}_o) = \mathrm{card}\mathbb{N} = \aleph_0$. □

- $\mathrm{card}\mathbb{N} = \aleph_0$ (알레프 제로)
- $\mathrm{card}\mathbb{R} = \mathfrak{c}$

예제 3

기수의 합 $\aleph_0 + \aleph_0$을 구하여라.

풀이

$\mathbb{N}_e = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$, $\mathbb{N}_o = \{2n-1 \mid n \in \mathbb{N}\}$라 하자.

그러면 $\mathbb{N}_e \cap \mathbb{N}_o = \phi$이고 $\mathbb{N}_e \cup \mathbb{N}_o = \mathbb{N}$이다. 그러므로

$\aleph_0 + \aleph_0 = \mathrm{card}\mathbb{N}_e + \mathrm{card}\mathbb{N}_o = \mathrm{card}(\mathbb{N}_e \cup \mathbb{N}_o) = \mathrm{card}\mathbb{N} = \aleph_0$. $\square$

예제 4

기수의 합 $\aleph_0 + \mathfrak{c}$을 구하여라.

풀이

$(0,1) \sim \mathbb{R}$이므로, $\mathrm{card}(0,1) = \mathrm{card}\mathbb{R} = \mathfrak{c}$ 이다.

$S = \mathbb{N} \cup (0,1)$이라 놓자. $\mathbb{N} \cap (0,1) = \phi$이기 때문에,

$$\mathrm{card}S = \aleph_0 + \mathfrak{c}.$$

한편, $\mathbb{R} \sim (0,1) \subset S$이고 $S \sim S \subset \mathbb{R}$이기 때문에,

Cantor-Berstein Theorem에 의해 $\mathbb{R} \sim S$이다. 그러므로

$$\aleph_0 + \mathfrak{c} = \mathrm{card}S = \mathrm{card}\mathbb{R} = \mathfrak{c}$$

이다. □

예제 4

기수의 합 $\aleph_0 + \mathfrak{c}$을 구하여라.

풀이

$(0,1) \sim \mathbb{R}$이므로, $\mathrm{card}(0,1) = \mathrm{card}\mathbb{R} = \mathfrak{c}$ 이다.

$S = \mathbb{N} \cup (0,1)$이라 놓자. $\mathbb{N} \cap (0,1) = \phi$이기 때문에,

$$\mathrm{card}S = \aleph_0 + \mathfrak{c}.$$

한편, $\mathbb{R} \sim (0,1) \subset S$이고 $S \sim S \subset \mathbb{R}$이기 때문에,

Cantor-Berstein Theorem에 의해 $\mathbb{R} \sim S$이다. 그러므로

$$\aleph_0 + \mathfrak{c} = \mathrm{card}S = \mathrm{card}\mathbb{R} = \mathfrak{c}$$

이다. $\square$

5.4 기수의 덧셈

연습문제 5.4

3, 5 번 : 모든 조 공통 과제