11. 회 절

11.1 기초 이론

11.2 프라운호퍼 회절

11.3 프레넬 회절

11.1 기초 이론

☞ 광원과 스크린 사이에 빛이 투과하지 않는 원 모양의 물체를 두었을 경우에
관측하고자 하는 스크린 위에 생긴 **물체의 그림자 주위에 밝고 어두운 무늬**들을 볼 수 있는데
이와 같이 기하광학의 예측으로부터 벗어나는 현상을 **빛의 회절**이라고 한다.
☞ 광학 기기의 근본적인 분해능의 한계는 빛의 회절에 기인하며, 이러한 빛의 회절은 빛의 파동성에 기인한다.

회절의 수학적 표현인 프레넬 - 키르히호프(Fresnel - Kirchhoff) 공식을 유도하고
이를 여러 경우의 프라운호퍼 회절과 프레넬 회절에 대하여 적용

회절 현상은 "빛의 1차 파면 위의 각 점이 모든 방향으로 진행하는 2차 구면파의 광원으로 작용할 수 있다"고 한 호이겐스(Huygens)의 원리에 의해 정성적으로 설명된다.
개념적으로 볼 때에 간섭과 회절은 동일하다 하더라도, **연속적인 광원의 분포에 기인한 경우는 회절**로,
그리고 **불연속적인 광원에 기인한 경우는 간섭**으로 분류한다.

키르히호프(Kirchhoff) 정리

빛의 회절을 다루기 위해서는 회절이 일어나기 전의 1차 파와 회절이 일어난 후의 2차 파들을
동시에 고려할 필요가 있으며, 1차 파를 U로 그리고 2차 파를 V로 표현하면
키르히호프 정리에 의하여 이들 사이의 관계가 간결히 기술.

U와 V가 연속이고 적분 가능한 스칼라 함수라면, **그린(Green)-정리**에 의하여

$$\oint_S (V\nabla_n U - U\nabla_n V)\cdot d\vec{A} = \int_V (V\nabla^2 U - U\nabla^2 V)dv \quad (11.1.1)$$

닫혀진 표면에 대한 면적 적분

닫혀진 표면 안에 있는 체적에 대한 체적 적분

∇_n 적분 표면(S)에서 방향기울기의 수직 성분을 의미

11.1 기초 이론

$\nabla^2 U = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$, $\nabla^2 V = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}$ ⇒ U와 V는 파동방적식 만족
회절 전후의 빛의 진동수는 동일하므로
$e^{\pm i\omega t}$의 시간 의존성을 갖는 **조화파라고 볼 수 있음**.

식 (11.1.1)의 오른쪽 항

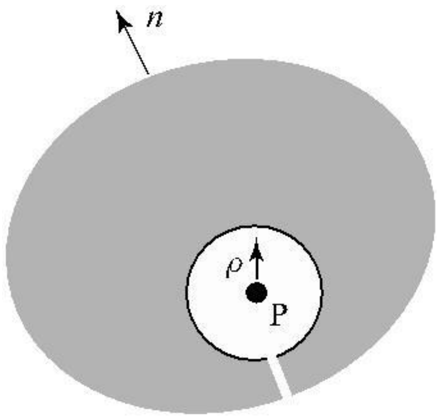
$$V\nabla^2 U - U\nabla^2 V = \frac{1}{v^2}\left(V\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - U\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}\right) = 0$$

$$\oint_S (V\nabla_n U - U\nabla_n V)\cdot\hat{n}dA = 0 \qquad (11.1.2)$$

스칼라 함수 V가 r=0인 점 P로 모여드는 구면파라면 V는

$$V = V_0\frac{e^{i(kr+\omega t)}}{r} \qquad (11.1.3)$$

적분 표면이 점 P를 포함하는 경우에 V는 점 P에서 무한대가 되므로 r=0인 부분을 적분구간에서 제외시켜야 한다.
이를 위해서는 그림과 같이 점 P주위에 반경이 ρ인 매우 작은 구를 생각하고
아주 가느다란 통로를 이용하여 외부와 연결하면, 또 하나의 표면(그림에서 바깥쪽 면)이 만들어진다.



점 P 주위의 작은 원의 표면 위에서 r=ρ, $\nabla_n = -\frac{\partial}{\partial r}$("-"부호는 반경 "r"의 증가 방향이
구 표면에서의 수직 방향과 반대이기 때문이다.)이 되므로 식 (11.1.2)은

$$\underbrace{\oint_S\left(\frac{e^{ikr}}{r}\nabla_n U - U\nabla_n\frac{e^{ikr}}{r}\right)dA}_{\text{바깥 면에 대한 적분}} - \underbrace{\oint_S\left(\frac{e^{ikr}}{r}\frac{\partial U}{\partial r} - U\frac{\partial}{\partial r}\frac{e^{ikr}}{r}\right)_{r=\rho}\rho^2 d\Omega}_{\text{안쪽 면에 대한 적분}} = 0 \qquad (11.1.4)$$

dΩ는 점 P에 중심을 둔 입체각이므로 $\rho^2 d\Omega$는 작은 구 표면에서의 면적 요소에 해당

11.1 기초 이론

ρ는 "0"으로 접근하는 대단히 작은 값이므로 급수전개하면 $\left[e^{ikr}\right]_{r\to\rho} = 1 + ik\rho + \frac{1}{2}(ik\rho)^2 + \cdots$

또한 ∂U/∂r가 ρ→0에서 유한하다면, $\left[\left(\frac{e^{ikr}}{r}\frac{\partial U}{\partial r}\rho^2 d\Omega\right)_{r\to\rho} = \frac{\rho^2}{\rho}\frac{\partial U}{\partial r} + ik\frac{\rho^3}{\rho}\frac{\partial U}{\partial r} + \cdots\right]_{\rho\to 0} \to 0$

식 (11.1.4)에서 왼쪽의 두 번째 항은

$$-\rho^2\left[U\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right)\right]_{r\to\rho} = -\rho^2\left[U\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r} + \frac{ikr}{r} + \cdots\right)\right]_{r=\rho}$$

$$= -\left[-U\frac{1}{\rho} - \frac{1}{2}Uk^2 - \cdots\right]\rho^2 = U \quad \Rightarrow \quad U_p$$

식 (11.1.4)의 두 번째 항은 $\oint_S U_p d\Omega = 4\pi U_p$ (11.1.5)

$$U_p = -\frac{1}{4\pi}\oint_S \left(U\nabla_n \frac{e^{ikr}}{r} - \frac{e^{ikr}}{r}\nabla_n U\right) dA$$

키르히호프 적분 정리

(11.1.6)

닫혀진 표면 안쪽 공간내의 한 점 P에서의 스칼라 함수 U_p의 값을
P를 감싸고 있는 닫혀진 표면 위에서의 파동 함수에 대한 적분 값으로 나타낼 수 있음을 의미한다.

주

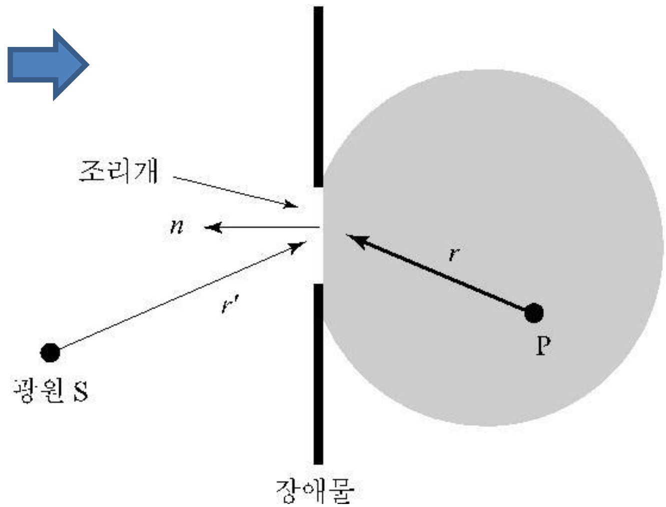
키르히호프 적분 정리를 회절에 적용시키는데 있어서 파동함수 U는 광학적 교란으로서 스칼라량이므로,
벡터로 표시되는 빛의 전자기장을 정확히 기술해주지는 못한다 하더라도
$|U_p|^2$는 점 P에서의 빛의 세기(irradiance)에 대한 측정으로서 사용될 수 있다.

11.1 기초 이론

프레넬-키르히호프 적분 공식 회절현상에 대한 수학적인 표현

적분 정리를 빛의 회절에 대한 일반적인 문제에 적용

점광원 S에서 나온 빛이 임의의 모양을 한 조리개를 지나 회절에 의해 점 P로 도달하는 경우에 적용.
키르히호프 적분 정리를 적용하기 위하여 조리개 부분을 포함하고
관측점 P를 포함하는 닫혀진 표면을 그림과 같이 선택하자.



이때에 광원 S로부터 나온 빛이 장애물에 의해
회절되어 관측점 P에 도달한 U_p의 값을 알아보기 위하여
다음의 세 가지 **가정**을 한다.

① 조리개 부분을 제외하고는 파동함수 U와 ∇U는 적분에 기여를 하지 않는다.
② 조리개에서의 파동함수 U와 ∇U의 값은 장애물에 의해 영향을 받지 않는다.
③ 조리개의 크기, 조리개에서 광원까지의 거리 및 조리개에서 관측점까지의 거리는 빛의 파장에 비해 매우 크다.

점광원(S)에서 조리개까지의 거리를 r′이라 하면, 조리개면 위에서 파동함수의 값은

$$U = U_0 \frac{e^{i(kr' - \omega t)}}{r'} \quad (11.1.7)$$

U_0는 광원에서의 파동함수의 진폭이다.
식 (11.1.7)은 진폭이 거리에 반비례하므로 점광원(S)으로부터 퍼져나가는 진동수 ω를 가진 **구면파를 의미**한다.

식 (11.1.7)을 키르히호프 적분 정리인 식 (11.1.6)에 대입하면,

$$U_p = -\frac{U_0 e^{-i\omega t}}{4\pi} \oint_S \left(\frac{e^{ikr'}}{r'} \nabla_n \frac{e^{ikr}}{r} - \frac{e^{ikr}}{r} \nabla_n \frac{e^{ikr'}}{r'} \right) dA \qquad (11.1.8)$$

가정 ①에 의하여 조리개의 열린 부분에 대해서만 적분하면 되므로 s는 조리개의 열린 부분을 나타낸다.

적분 함수

$$\nabla_n \frac{e^{ikr}}{r} = \cos(\hat{n},\vec{r}) \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) = \cos(\hat{n},\vec{r}) \left(\frac{ike^{ikr}}{r} - \frac{e^{ikr}}{r^2} \right) \qquad (11.1.9)$$

$$\nabla_n \frac{e^{ikr'}}{r'} = \cos(\hat{n},\vec{r}') \frac{\partial}{\partial r'}\left(\frac{e^{ikr'}}{r'} \right) = \cos(\hat{n},\vec{r}') \left(\frac{ike^{ikr'}}{r'} - \frac{e^{ikr'}}{r'^2} \right) \qquad (11.1.10)$$

$(\hat{n},\vec{r})$, $(\hat{n},\vec{r}')$은 조리개 표면에 수직한 단위 벡터($\hat{n}$)과 두 변위벡터 $\vec{r}$과 $\vec{r}'$이 이루는 각을 각각 나타냄.

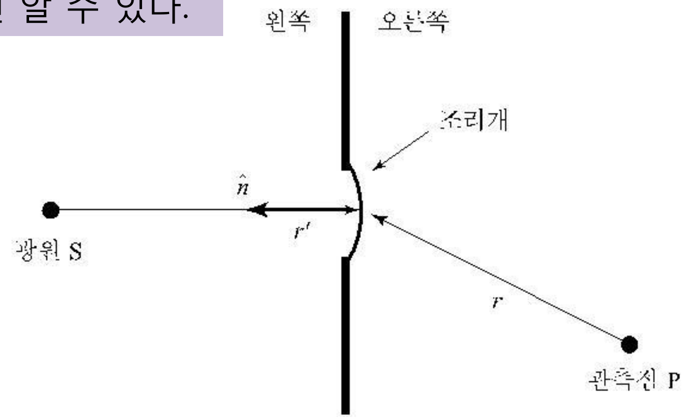
$k = 2\pi/\lambda$ 이며, 일반적으로 광원에서 조리개까지의 거리 $\vec{r}'$와 조리개에서 관측점까지의 거리 $\vec{r}$ 은 파장에 비해서 매우 크므로, 즉, $\vec{r}$, $\vec{r}' >> \lambda$이므로 $\frac{k}{r} = \frac{2\pi}{r\lambda} >> \frac{1}{r'^2}$ 이 되어 식 (11.1.9)와 식 (11.1.10)의 괄호 안의 두 번째 항은 첫 항에 비하여 무시할 정도로 작다.

$$U_p = -\frac{ikU_0}{4\pi} e^{i\omega t} \oint_S \frac{e^{ik(r+r')}}{rr'} \left[\cos(\hat{n},\vec{r}) - \cos(\hat{n},\vec{r}') \right] dA$$

프레넬-키르히호프 적분 공식

(11.1.11)

프레넬-키르히호프 적분공식은 실제로 호이겐스 원리의 수학적 표현으로서
그림과 같이 원형 조리개에 대하여 대칭인 광원에 식 (11.1.11)을 적용시켜 보면 알 수 있다.



그림에서 $\hat{n}$와 $\vec{r}'$이 서로 반대 방향을 가리키므로,
$\cos(\hat{n},\vec{r}') = -1$ 이 되어 식 (11.1.11)은

$$U_p = -\frac{ik}{4\pi}\oint_S \frac{U_A e^{i(kr-\omega t)}}{r}\left[\cos(\hat{n},\vec{r})+1\right]dA \qquad (11.1.12)$$

$U_A = \dfrac{U_0 e^{ikr'}}{r'}$: 조리개 면에 입사하는 1차 파면의 복소수 진폭

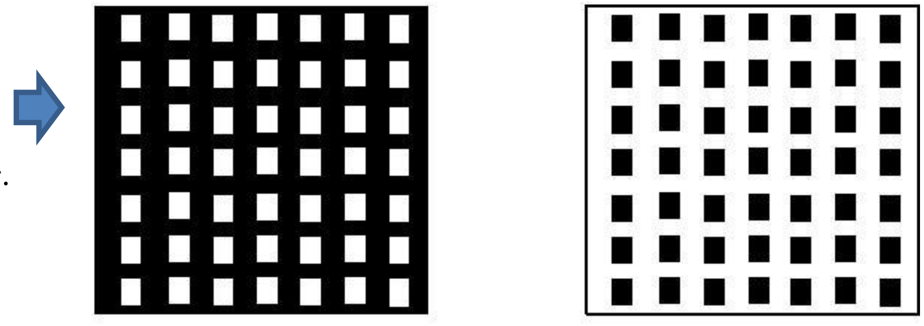
조리개 표면에서의 면적소(dA)는 이러한 1차 파면으로부터 $\dfrac{U_A e^{i(kr-\omega t)}}{r} dA$로 주어지는 2차 구면파를 발생시키는 파원이 된다.

관측점 P에서의 빛은 조리개의 면적소로부터 오는 2차 파들의 합으로 얻어지나,
조리개의 면적소로부터 오는 2차 파들을 합할 때에 경사 인자로서 알려진 "$\left[\cos(\hat{n},\vec{r})-\cos(\hat{n},\vec{r}')\right]=\left[\cos(\hat{n},\vec{r})+1\right]$"를 고려해야 한다.
경사 인자는 조리개면에 비스듬하게 들어오거나 나갈 때에 빛의 세기에서의 감소를 가져오며,
광원과 관측점 및 조리개의 위치에 따라 다른 값을 가진다.

그림에서와 같이 관측점이 조리개의 오른쪽에 있는 경우에 $\hat{n}$ 과 $\vec{r}$ 이 이루는 각이 "0"가 되므로
$\cos(\hat{n},\vec{r}) = 1$이 되어 경사 인자는 최대값 "2"를 가지게 된다. 이는 빛이 오른쪽 방향으로 최대 회절이 일어남을 의미한다.
반면에 관측점이 조리개의 왼쪽에 있는 경우에 과 이 이루는 각이 180°가 되므로 경사 인자의 값은 "영"이 되므로
조리개 면에서 2차 파면이 발생할 경우에 조리개의 왼쪽(광원쪽)으로 진행하는 회절파는 발생하지 않음을 의미한다.
그리고 식 (11.1.12)의 계수 "$-i(=e^{-i\pi/2})$"는 회절된 파의 위상이 1차 파면에 대하여 90°만큼 늦어짐을 의미하며,
이러한 현상들은 호이겐스의 원리에는 나와 있지 않다.

바비넷의 원리

한 조리개의 투명 영역이 다른 조리개의 불투명 영역과
완전히 일대일 대응 관계를 이루거나
또는 이와 반대의 일대일 대응관계를 이룰 때
이들 두 조리개는 서로 **상보적(complementary)**이라고 한다.



(a) (b)

서로 상보적 관계에 있는 두 조리개를 합하면
완전히 불투명한 조리개가 되며,
그림 (a)에서 네모난 창의 전체 면적을 A_1, (b)에서 흰색 부분의 면적을 A_2라고 할 때에
이들을 합한 조리개의 면적은 $A_1 + A_2 = A$이 된다.

상보적 관계에 있는 두 조리개 A_1, A_2 각각이 제 위치에 있을 때에
조리개 A_1 만에 의해 P점에 생기는 빛을 U_{1p}
A_2 만에 의해 P점에 생기는 빛을 U_{2p}라고 할 때,
각각의 조리개에 의한 P점에서의 빛(U_p)은 프리즈넬 - 키르히호프 공식에 의하여,

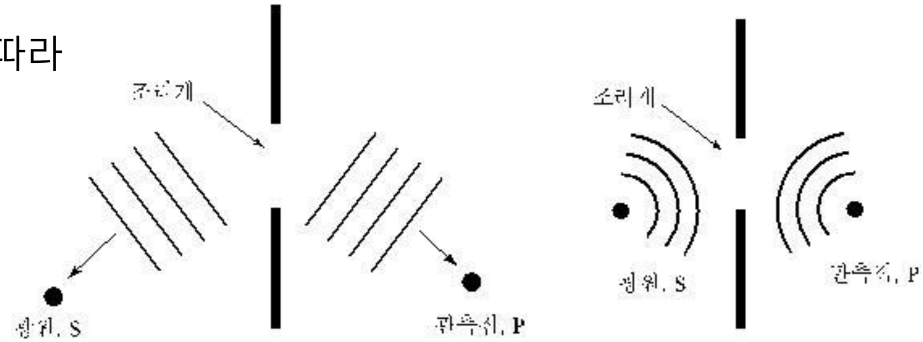
$$U_p = U_{1p} + U_{2p} \quad (11.1.13)$$

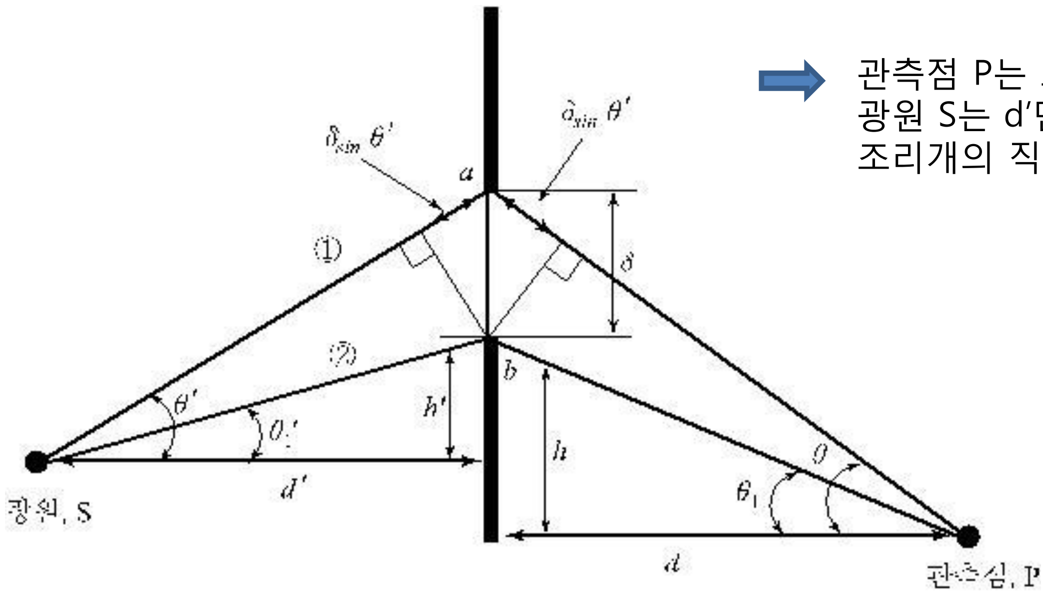
바비넷의 원리

U_p는 두 조리개가 동시에 존재할 경우로서 불투명 영역이 없는 경우에
해당되며, 이는 빛의 경로에 장애물이 없을 때에 관측점에 도달하는 빛이다.

회절 : 조리개의 크기에 대한 광원과 관측점까지의 거리에 따라

- **프라운호퍼 회절** :
  조리개로부터 광원과 관측점까지의 거리가 비교적 멀다.
  빛을 평면파로 간주한 원거리장 회절
- **프레넬 회절** :
  조리개로부터 광원과 관측점 사이의 거리가 가까움.
  파면의 곡률을 무시할 수 없는 근접장 회절.





관측점 P는 조리개로부터 d만큼 떨어져 있고,
광원 S는 d′만큼 떨어져 있다.
조리개의 직경을 δ

조리개의 a 부분을 지나 관측점까지 가는 거리(경로 ①)와
b 부분을 지나 관측점까지 가는 거리(경로 ②)의 차는

$$\Delta = \sqrt{d'^2+(h'+\delta)^2}+\sqrt{d^2+(h+\delta)^2}-\sqrt{d'^2+h'^2}-\sqrt{d^2+h^2}$$

$$= \boxed{\left(\frac{h'}{d'}+\frac{h}{d}\right)}\delta+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{d'}+\frac{1}{d}\right)\delta^2+\cdots \qquad (11.2.1)$$

광원 및 관측점에서 조리개까지의 거리가 매우 먼 경우

$$\theta'_1 \approx \theta' \ , \quad \theta_1 \approx \theta \quad \Rightarrow \quad \tan\theta' = h'/d' = \sin\theta'$$

$$\Rightarrow \quad (h'/d')\delta = \delta\sin\theta'$$

$$(h'/d)\delta = \delta\sin\theta$$

오른쪽 첫 항은 빛이 통과하는 위치에 따른 경로차