

제1주 표본공간과 사상  
hylee@silla.ac.kr

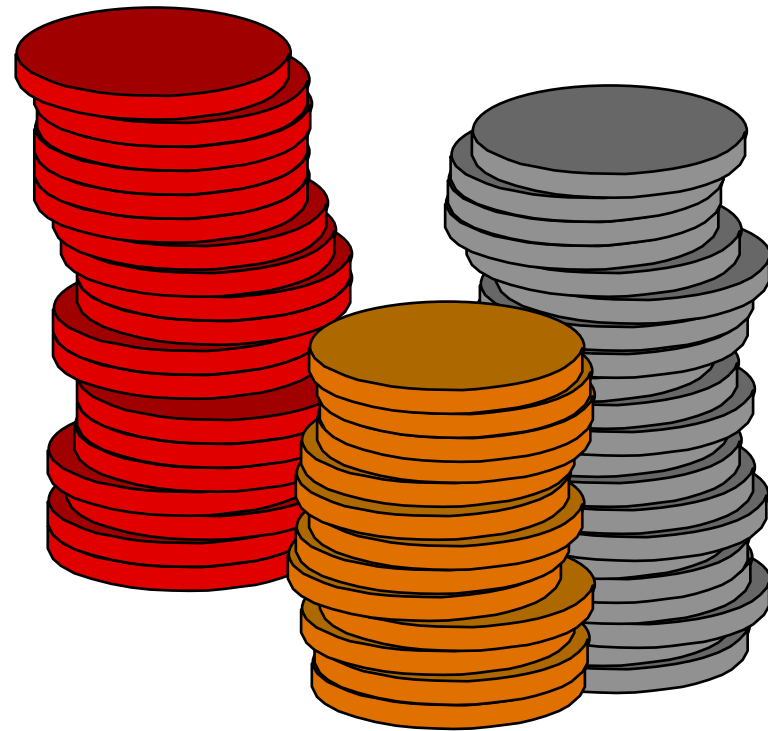
# 확률 및 통계 (2)

# 제 1 절 표본공간과 사상

- ◎ 표본공간과 사상을 설명한다
- ◎ 사상의 연산과 연산법칙

# 동전 2번 던지는 실험

- ◎ 동전을 두 번 던졌을 때 나타나는 현상들을 모두 나열해 봅시다



앞면을 H 로 뒷면을 T 로 표시  
하면 다음의 표본공간을 얻는다

head

tail

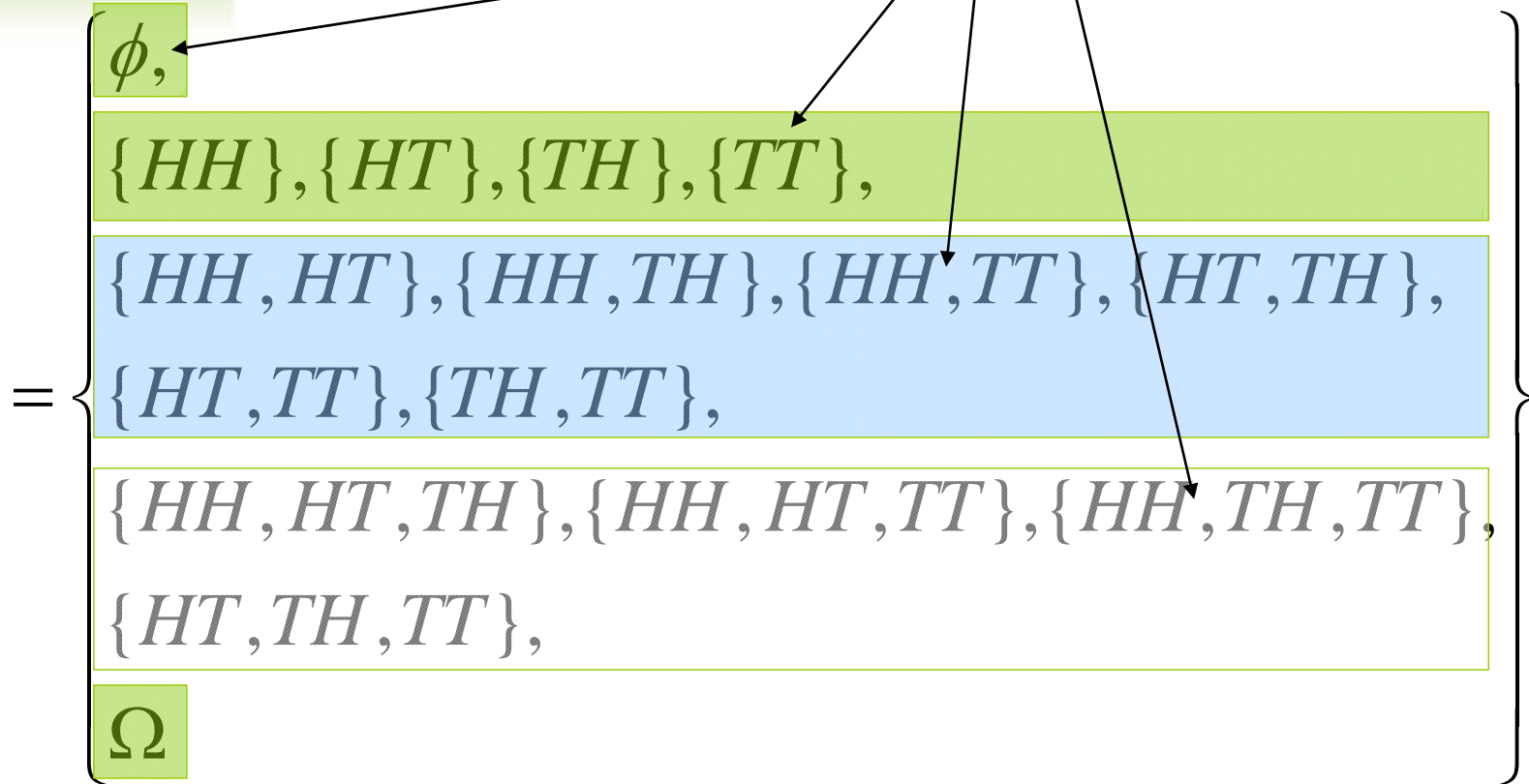
$$\Omega = \{HH, HT, TH, TT\}$$

- ◎ 여기서 얻어진 표본공간은 4개의 원소로 이루어진 집합이다.
- ◎ 표본공간의 한 부분집합을 사상(event) 이라고 정의한다.

$\Omega$ 의 부분집합의 집합  $P(\Omega)$ 를 생각하면

$P(\Omega) = \Omega$ 의 멱집합

사상





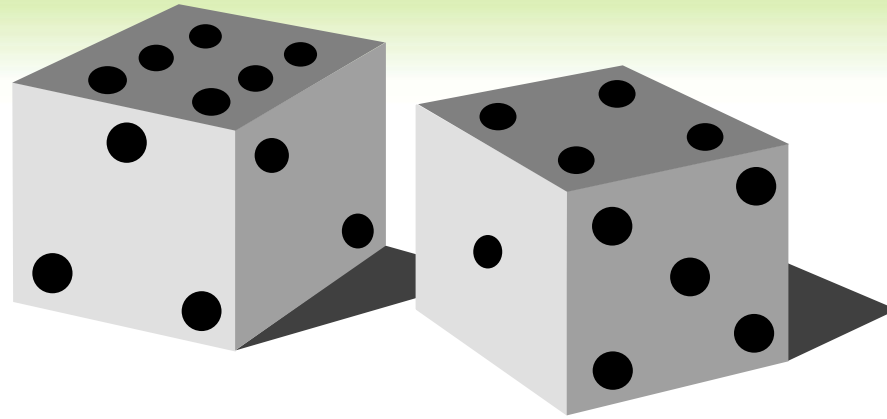
그러므로 예를 들면

$\{HH, HT\}$  = 첫번째 동전이 앞면인 사상

$\{HH, TT\}$  = 첫번째와 두번째 동전표면이  
같은 경우

등 이다.

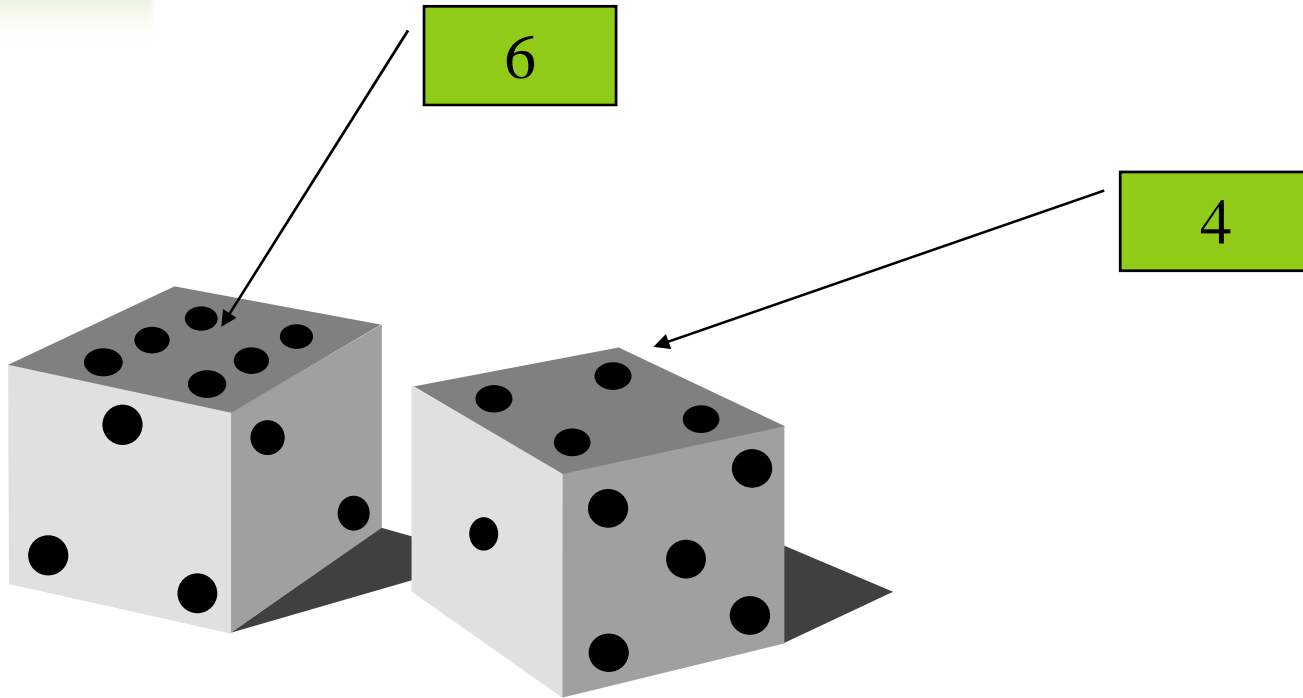
# 주사위 두 개 던지기



- ◎ 주사위 두 개의 표면에 나타날 수 있는 모든 경우를 조사해 보면 다음과 같은 **표본공간**을 얻게 된다.



**(6,4)**





# 이 때 나타나는 표본공간은

$$\Omega = \{(i, j) \mid i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

- 여기서  $i$ 는 첫 번째 주사위의 표면에 나타난 숫자이고  $j$ 는 두 번째 주사위의 표면에 나타난 숫자를 나타낸다

다음과 같은 사상을 생각해 보자

$$A = \{(1, j) \mid j = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

☞ 사상  $A$ 는 첫 번째 주사위가 1을 나타내는 사건이다

$$B = \{(i, 3) \mid i = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

◎ 사상  $B$ 는 두 번째 주사위가 3을 나타내는 사건을 의미한다

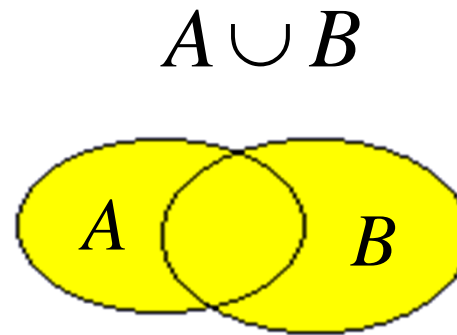
# 사상의 연산

- ◎ 1. 합사상
- ◎ 2. 곱사상
- ◎ 3. 여사상
- ◎ 4. 공사상
- ◎ 5. 배반사상



# 1. 합사상

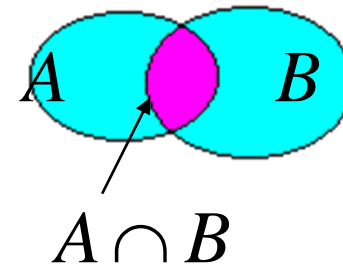
- ◎ 표본공간  $\Omega$  의 임의의 두 사상  $A$  와  $B$  의 적어도 한쪽이 일어나는 사상을 **합사상** (union event)이라 한다.



$$A \cup B = \{\omega \mid \omega \in A \text{ 또는 } \omega \in B\}$$

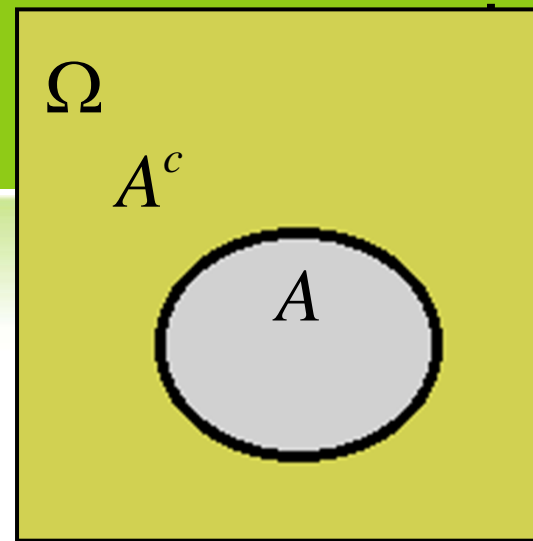
## 교사상

$\Omega$



- ◎ 표본공간  $\Omega$ 의 임의의 두 사상 A와 B가 함께 일어나는 사상을 **교사상**(intersection event)이라 하며, 다음과 같이 표현한다.

$$A \cap B = \{\omega \mid \omega \in A \text{ 그리고 } \omega \in B\}$$



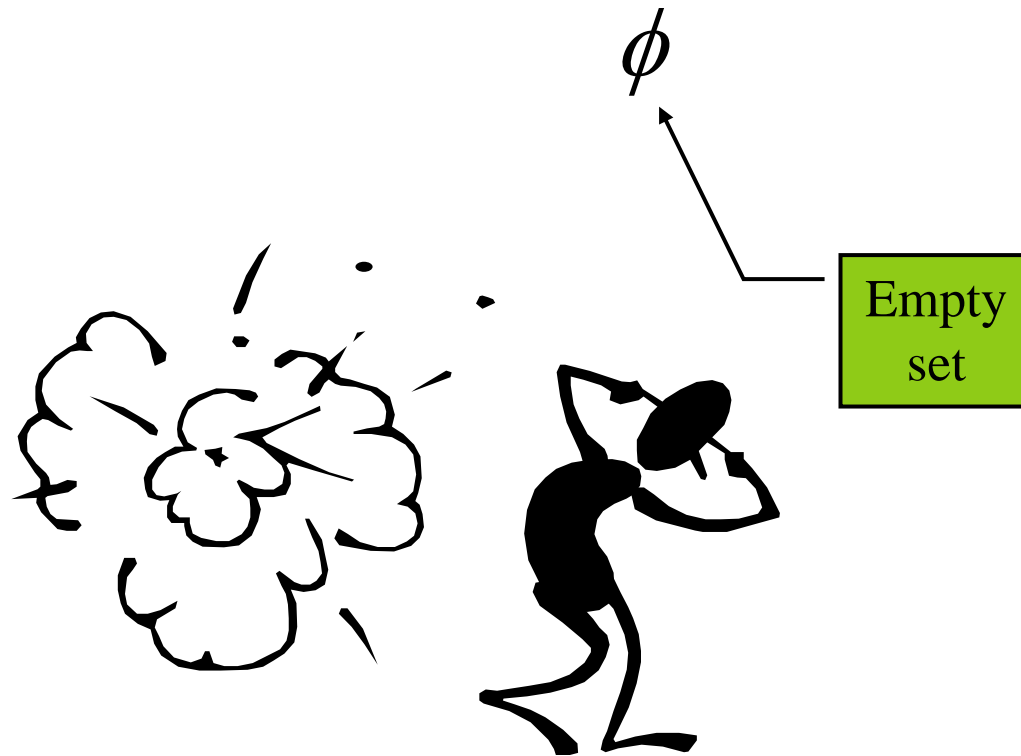
여사상

- ◎ 사상  $A$ 가 일어나지 않는 사상을 **여사상** (complement event)이라 하며 다음과 같이 표현한다.

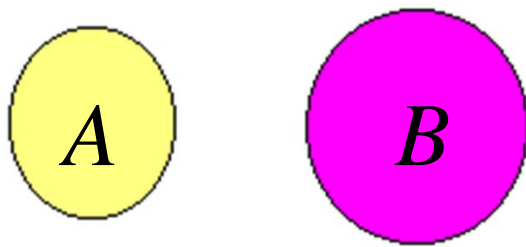
$$A^c = \{ \omega \mid \omega \notin A \}$$

## 4. 공사상

- 사건 A 가 어떠한 결과도 포함하지 않는 경우, 이러한 사상을 공사상(null event or empty event)이라고 하고  $\emptyset$  라고 표현한다.



## 5. 배반사상



$$A \cap B = \phi$$

$A$  와  $B$  는  
교집합이 없다.



## 예제 4

동전을 두 번 던지는 시행에서

$$A_1 = \{HH\}, \quad A_2 = \{HT\},$$

$$A_3 = \{TH\}, \quad A_4 = \{TT\}$$

라 할 때 다음 사상

$$E_1 = A_1 \cup A_2 \cup A_3,$$

$$E_2 = A_3 \cup A_4$$

의 확률  $P(E_1), P(E_2)$  를 구하시오



여기서

$$P(A_1) = \frac{1}{16}, \quad P(A_2) = \frac{3}{16}$$


$$P(A_3) = \frac{3}{16}, \quad P(A_4) = \frac{9}{16}$$

라가정한다

$$\begin{aligned}
 P(E_1) &= P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) \\
 &= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) \\
 &\quad - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) \\
 &\quad + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \\
 &= \frac{1}{16} + \frac{3}{16} + \frac{3}{16} - \{0 + 0 + 0\} + 0 = \frac{7}{16}
 \end{aligned}$$

(2)  $A_1 \cap A_2 = 1$ 이 첫번째, 2가 두번째  
자리에 위치하는 사상이므로,

$$A_1 \cap A_2 = \{(1, 2, \boxed{k_1, \dots, k_{n-2}}) \mid k_1, \dots, k_{n-2} = 3, \dots, n\}$$




$|A_1 \cap A_2| = (n-2)!$  이므로

구하는 확률은

$$P(A_1 \cap A_2) = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)}$$

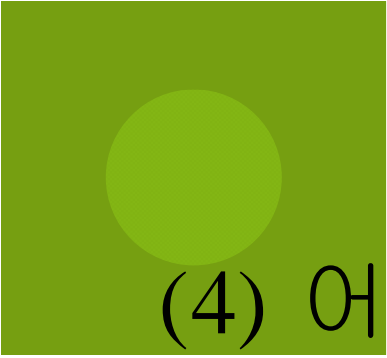
이다.


$$(3) \quad P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$$

을 이용한다.

따라서

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2) &= \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n(n-1)} \\ &= \frac{2n-3}{n(n-1)} \end{aligned}$$



(4) 어느 숫자도 제 번호에 있지

않으려면 사상은

첫번째 자리도 1 이 아니고 (즉,  $A_1^c$ ),

두번째 자리도 2 가 아니고 ( $A_2^c$ ),

...

$n$  번째 자리도  $n$  이 아니어야 한다.

즉,

$$A_1^c \cap A_2^c \cap \cdots \cap A_n^c$$

의 확률을 구하는 것이다.

그런데

$$A_1^c \cap A_2^c \cap \cdots \cap A_n^c$$

$$= (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)^c$$

의 확률을 구하는 것이다.



즉,

$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$  의 여사상을

의미한다.

그러므로 구하고자 하는 확률은

$$1 - P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n)$$

이고,

위에서 배운 확률계산법을 이용하면,


$$1 - P(A_1 \cup \dots \cup A_n)$$

$$= 1 - \left\{ \sum_i P(A_i) - \sum_{i < j} P(A_i \cap A_j) \right.$$

$$+ \sum_{i < j < k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \dots$$

$$\left. + (-1)^{n-1} P(A_1 \cap \dots \cap A_n) \right\}$$

이다.